دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال پنجم، شماره بیست و دوم، بهمن و اسفند ۱۳۹۸
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

میانگین‌پذیری مدولی جبرهای باناخ دوگان مدولی

محمود خوشحال[۱]، داوود ابراهیمی بقاء[۲*]، امید پور بحری راهپیما[۳]

[۱و۲] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران مرکزی، تهران، ایران
[۳] گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد چالوس، مازندران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۴/۰۷.   تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۰۷/۱۹

چکیده

در این مقاله، با بیان تعریف میانگین‌پذیری مدولی روی جبر باناخ و کن- میانگین‌پذیری مدولی روی جبرهای باناخ دوگان مدولی و همچنین با تعریف آرنز منظم مدولی با ساختار متفاوت [۱] ارتباط بین میانگین‌پذیری مدولی جبر باناخ A و کن- میانگین‌پذیری مدولی دوگان دوم مدولی A یعنی $\frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}}$ مورد بررسی قرار می‌گیرد و همچنین با تعریف σWC – قطر حقیقی مدولی و توابع متناوب ضعیف مدولی ارتباط بین کن- میانگین‌پذیری مدولی جبر باناخ دوگان مدولی و σWC – قطر حقیقی مدولی آن مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: میانگین‌پذیری مدولی، جبر باناخ دوگان مدولی، کن – میانگین‌پذیری مدولی، توابع متناوب ضعیف مدولی، σWC – قطر حقیقی مدولی.

*عهده‌دار مکاتبات: Email:e_bagha@yahoo.com

۱- مقدمه

مفهوم کن $-$ میانگین‌پذیر برای یک جبر باناخ دوگان توسط روند در[۵,۶] معرفی گردید که جبر باناخ دوگان A کن $-$ میانگین‌پذیر است اگر برای هر $A-$ مدول نرمال دوگان مانند X هر مشتق W^*- پیوسته $D: A \to X$ درونی باشد و در [۵] ثابت کرد که گروه موضعاً فشرده G میانگین‌پذیر است اگر و فقط اگر جبر باناخ دوگان $M(G)$ کن $-$ میانگین‌پذیر باشد.

روند در [۵,۶] نشان داد که جبر باناخ آرنز منظم A در A^{**} ایده آل باشد میانگین‌پذیر است اگر و فقط اگر A^{**} کن $-$ میانگین‌پذیر باشد.

همچنین روند [۶,۷] با بیان تعریف $\sigma WC(X)$ (مجموعه تمام $x \in X$ که X یک $A-$ دو مدول می‌باشد، نگاشت‌های $W - W^*,\ A \to X\, , a \to \begin{cases} a.x \\ x.a \end{cases}$ پیوسته باشد.) ثابت کرد که جبر باناخ دوگان A کن $-$ میانگین‌پذیر است اگر برای هر $A-$ مدول مانند X هر مشتق W^*- پیوسته $D: A \to \left(\sigma WC(X)\right)^*$ درونی باشد. او با معرفی $\sigma WC-$ قطر حقیقی در [۶,۷] به این معنی که برای جبر باناخ دوگان A، $M \in \left(\sigma WC\left(A \hat{\otimes} A\right)^*\right)^*$ $\sigma WC-$ قطر حقیقی است هرگاه

$$a.M = M.a,$$
$$a.\Delta_{\sigma WC} M = a \quad (a \in A)$$

که درآن $\Delta_{\sigma WC}: \left(\sigma WC\left(A \hat{\otimes} A\right)^*\right)^* \to A$ یک هومومورفیسم است.

در این مقاله با بیان مفهوم میانگین‌پذیری مدولی با ساختار متفاوت با تعریف [۲] و با معرفی آرنز منظم مدولی، جبر باناخ دوگان مدولی و کن- میانگین‌پذیر مدولی، تحت شرایطی نشان می‌دهیم A میانگین‌پذیر مدولی است اگر و فقط اگر $\frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}} \simeq J_{J_A^{\perp}}^{\perp}$ کن- میانگین‌پذیر مدولی باشد.

و با بیان مفهوم $\sigma WC_U(X)$ نشان می‌دهیم که جبر باناخ دوگان مدولی A کن $-$ میانگین‌پذیر مدولی هرگاه هر W^*- پیوسته مشتق مدولی $D: A \to \left(\sigma WC_U(X)\right)^*$ درونی باشد.

و همچنین با بیان تعریف $\sigma WC-$ قطر حقیقی مدولی تحت شرایطی نشان می‌دهیم که جبر باناخ دوگان مدولی A دارای $\sigma WC-$ قطر حقیقی مدولی است اگر و فقط اگر A، کن $-$ میانگین‌پذیر مدولی باشد.

۲- میانگین پذیری مدولی و کن- میانگین پذیری مدولی

فرض کنیم A و U دو جبر باناخ و A یک $U-$ مدول باناخ باشد که

$$(\alpha.a)b = \alpha.(ab)\,,$$
$$(ab).\alpha = a(b.\alpha) \quad (a, b \in A, \alpha \in U)$$

همچنین فرض کنیم X یک $A-$ مدول باناخ و یک $U-$ مدول باناخ باشد بطوریکه برای هر $a \in A$، $x \in X$ و $\alpha \in U$

$$\alpha.(a.x) = (\alpha.a).x$$
$$(a.x).\alpha = a.(x.\alpha)$$
$$x.(a.\alpha) = (x.a).\alpha$$
$$(a.x).a = \alpha.(x.a)$$

در اینصورت X را یک $A - U-$ مدول باناخ گوییم. همچنین اگر برای هر $\alpha \in U$ و $x \in X$

$$\alpha.x = x.\alpha$$

آنگاه X را یک $A - U-$ مدول باناخ جابجایی گوییم. اگر X یک $A - U-$ مدول باناخ (جابجایی) باشد آنگاه X^* نیز چنین خواهد بود.

فرض کنیم X و Y فضاهای باناخ A–U– مدول که برای هر $a \in A$، $x \in X$ و $\alpha \in U$ تابع $\varphi: X \to Y$ در شرایط زیر صدق کند

$$\varphi(\alpha.x) = \alpha.\varphi(x)$$
$$\varphi(x.\alpha) = \varphi(x).\alpha$$
$$\varphi(a.x) = a.\varphi(x)$$
$$\varphi(x.a) = \varphi(x).a$$

در اینصورت φ را دو همریختی مدولی نامیم. فرض کنیم X یک باناخ $A - U-$ مدول باناخ جابجایی، در

اینصورت $A\widehat{\otimes}X$ نیز با ضرب های زیر $A-U$ - مدول خواهد شد:

$$a.(b\otimes x)=(ab)\otimes x,$$
$$(b\otimes x).a=b\otimes(x.a)$$
$$\alpha.(b\otimes x)=(\alpha.b)\otimes x\ ,$$
$$(b\otimes x).\alpha=b\otimes(x.\alpha)$$

برای هر $a,b\in A$، $x\in X$ و $\alpha\in U$.

حال برای $a\in A$ و $x\in X$، تابع $\pi_X:A\widehat{\otimes}X\to X$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\pi_X(a\otimes x)=a.x$$

واضح است که π_X یک $A-U$ - دو همریختی مدولی است.

فرض کنیم I_X یک $A-U$ - زیرمدول بسته از ضرب تنسوری پروژکتیو $A\widehat{\otimes}X$ که توسط مجموعه $\{(a.\alpha)\otimes x-a\otimes(\alpha.x):\ a\in A,\alpha\in U,x\in X\}$ تولید شده است. همچنین J_X را زیرمدول بسته X که توسط $\pi_X(I_X)$ تولید شده است در نظر می‌گیریم. در اینصورت

$$J_X=\overline{\langle\pi_X(I_X)\rangle}$$
$$=\overline{\langle\left\{\begin{matrix}(a.\alpha).x-a.(\alpha.x):\\ a\in A.\alpha\in U.x\in X\end{matrix}\right\}\rangle}$$

نکته ۱-۱. در حالت خاص، اگر $X=A$ آنگاه J_A ایده‌آل بسته تولید شده توسط $\{(a.\alpha)b-a(\alpha.b):a,b\in A.\alpha\in U\}$ از A می‌باشد.

همچنین جبر باناخ خارج قسمتی $\frac{A}{J_A}$ با اعمال زیر یک $A-U$ - مدول است.

$$A\times\frac{A}{J_A}\to\frac{A}{J_A}$$
$$(a,b+J_A)\to a.(b+J_A)=ab+J_A$$
$$\frac{A}{J_A}\times A\to\frac{A}{J_A}$$
$$(b+J_A\ ,a)\to(b+J_A).a=0$$
$$U\times\frac{A}{J_A}\to\frac{A}{J_A}$$
$$(\alpha,a+J_A)\to\alpha.(a+J_A)=\alpha.a+J_A$$
$$\frac{A}{J_A}\times U\to\frac{A}{J_A}$$
$$(a+J_A\ ,\alpha)\to(a+J_A).\alpha=a.\alpha+J_A$$
$$(a,b\in A\ \ ,\alpha\in U)$$

در ادامه $\frac{A}{J_A}$ با اعمال زیر یک جبر باناخ $\frac{A}{J_A}-U-$ مدول است.

$$\frac{A}{J_A}\times\frac{A}{J_A}\to\frac{A}{J_A}$$
$$(a+J_A\ ,b+J_A)\to(a+J_A).(b+J_A)$$
$$=ab+J_A$$
$$(b+J_A\ ,a+J_A)\to(b+J_A).(a+J_A)$$
$$=0$$
$$(a,b\in A)$$

تعریف ۲-۱. فرض کنیم A و U دو جبر باناخ و X یک $A-U$ - مدول باناخ باشد. یک تبدیل خطی کراندار $D:A\to X$ را مشتق مدولی نامیم هرگاه در دو شرط زیر صدق کند:

$$D(ab)=D(a).b+a.D(b)$$
$$D(\alpha.a)=\alpha.D(a),D(a.\alpha)=D(a).\alpha$$

برای هر $a,b\in A$ و $\alpha\in U$.

لم ۳-۱. فرض کنیم X^* یک $A-U$ - مدول باناخ جابجایی و $D:A\to X^*$ یک مشتق مدولی باشد، در این صورت $D(A)\subseteq J_X^{\perp}$.

برهان. برای هر $a,b\in A,\alpha\in U$ و $x\in X$، داریم $(a.\alpha).x-a.(\alpha.x)\in J_X$. بنابراین

$$\langle D(b),(a.\alpha).x-a.(\alpha.x)\rangle=$$
$$\langle D(b).(a.\alpha)-(D(b).a).\alpha,x\rangle=0$$

لذا $D(b)$ روی یک عضو دلخواه از عناصر پایه J_X برابر صفر است و چون D نگاشت خطی و کراندار است، در اینصورت حکم ثابت است.

با توجه به لم قبل، هر مشتق مدولی که هم‌دامنه آن در X^* باشد برد آن برابر $J_X^{\perp}$ است. از طرفی $J_X^{\perp}$ زیرمدولی از X^* است. بنابراین می‌توانیم X^* و X^{**} که دوگان اول و دوم فضای باناخ X می‌باشند، دوگان مدولی اول و دوم را به صورت زیر تعریف کنیم.

تعریف ۴-۱. $A-U$ - مدول بسته $J_X^{\perp}$ از X^* و $J_{J_X^{\perp}}^{\perp}$

از X^{**} را به ترتیب دوگان مدولی اول و دوم از X نامیم.
در حالتی که X یک $A-$ مدول جابجایی باشد آنگاه $J_X^{\perp} = X^*$ و $J_{J_X^{\perp}}^{\perp} = X^{**}$.

نکته ۵-۱. می‌دانیم ([۳]،قضیه۱۰.۲) $J_A^{\perp} \simeq \left(\frac{A}{J_A}\right)^*$.
بنابراین $\langle \tilde{f}, a + J_A\rangle = \langle f, a\rangle (a \in A)$ بطوریکه $f \in J_A^{\perp}$ عضو متناظر به $\tilde{f} \in \left(\frac{A}{J_A}\right)^*$ می‌باشد. از طرفی بنا به [۴]، $\left(\frac{A}{J_A}\right)^{**} \simeq \frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}}$. بنابراین $\langle \tilde{F}, \tilde{f}\rangle = \langle F, f\rangle (\tilde{f} \simeq f \in J_A^{\perp})$ بطوریکه $F + J_A^{\perp\perp} \in \frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}}$ عضو متناظر به $\tilde{F} \in \left(\frac{A}{J_A}\right)^{**}$ می‌باشد. لازم به ذکر است که $\left(\frac{A}{J_A}\right)^*$ یک A–مدول است به طوریکه عمل A روی $\left(\frac{A}{J_A}\right)^*$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle \tilde{f}.a, b + J_A\rangle = \langle \tilde{f}, ab + J_A\rangle$$
$$\langle a.\tilde{f}, b + J_A\rangle = \langle \tilde{f}, ba + J_A\rangle$$

برای هر $a, b \in A$ و $\tilde{f} \in \left(\frac{A}{J_A}\right)^*$. در حقیقت دوگان دوم مدولی A یعنی $J_{J_A^{\perp}}^{\perp}$، هم ایده‌آل بسته A^{**} و هم با تقریب یکریختی، ایده‌آل بسته $\frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}}$ می‌باشد.
امینی در [۲] میانگین‌پذیری مدولی برای جبر باناخ A (که U–مدول نیز می‌باشد) را بدین‌صورت تعریف کرد که A را میانگین پذیر مدولی نامیم هرگاه برای هر $A-U-$ مدول باناخ جابجایی X و هر مشتق مدولی $D: A \to X^*$، عنصری مانند $y \in X^*$ موجود باشد به طوریکه برای هر $a \in A$،

$$D(a) = a.y - y.a$$

حال با توجه به لم (۳-۱)، چون برد هر مشتق مدولی $D: A \to X^*$ در $J_A^{\perp}$ است، لذا میانگین‌پذیری مدولی را می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد.

تعریف ۶-۱. یک جبر باناخ A را میانگین‌پذیر مدولی (به عنوان $U-$ مدول) گوییم هرگاه برای هر $A-U-$ مدول X که $J_X^{\perp}$ به عنوان $U-$ مدول جابجایی باشد، هر مشتق مدولی $D: A \to J_X^{\perp}$ که

$$b.(\alpha.y) = (b.\alpha).y$$
$$(b \in A, \alpha \in U, y \in J_X^{\perp})،$$

عنصر $y \in J_X^{\perp}$ موجود باشد، بطوریکه برای هر $a \in A$،

$$D(a) = a.y - y.a.$$

در [۲] میانگین‌پذیری مدولی را با شرایط جابجایی X به عنوان $U-$ مدول و اینکه $y \in X^*$ وجود دارد تعریف شده است. اما در تعریف (۶-۱)، ما $J_X^{\perp}$ را به عنوان $U-$ مدول جابجایی در نظر گرفته‌ایم و $y \in J_X^{\perp}$ وجود دارد که مشتق درونی شود. بنابراین در تعریف جدید نگاه ما به $J_X^{\perp}$ که زیرمدولی از X^* می‌باشد و ساختار $U-$ مدولی در آن نمایان شده، معطوف گردیده است.

گزاره ۷-۱. فرض کنیم A و B جبرهای باناخ و $U-$ مدول‌های باناخ با ضرب‌های سازگار باشند و $\varphi: A \to B$ یک همریختی جبری کراندار و یک همریختی مدولی بطوریکه $im\varphi$ در B چگال است. در اینصورت میانگین‌پذیری مدولی A، میانگین‌پذیری مدولی B را نتیجه می‌دهد.

برهان. اگر X یک $B-U-$ مدول باناخ جابجایی باشد آنگاه با استفاده از خواص φ، X را می‌توان به یک $A-U-$ مدول باناخ جابجایی تبدیل کرد. همچنین برای هر مشتق مدولی $D: B \to {J_X}^{\perp}$، تابع $Do\varphi: A \to {J_X}^{\perp}$ یک مشتق مدولی است و چون A میانگین‌پذیر مدولی است لذا $Do\varphi$ درونی است. با توجه به چگال بودن $img\varphi$ در B و پیوستگی D، نتیجه می‌شود که D نیز درونی است.

نتیجه ۸-۱. فرض کنیم A یک جبر باناخ $U-$ مدول و I یک ایده‌آل بسته در A باشد، A میانگین‌پذیر مدولی باشد آنگاه $\frac{A}{I}$ میانگین‌پذیر مدولی است.

نتیجه ۹-۱. فرض کنیم A یک جبر باناخ U - مدول و $A\widehat{\otimes}A$ میانگین‌پذیر مدولی باشد آنگاه $\frac{A}{J_A}\widehat{\otimes}\frac{A}{J_A}$ میانگین‌پذیر مدولی است.

قضیه ۱۰-۱. فرض کنیم A یک جبر باناخ U - مدول و I یک ایده آل بسته U - زیرمدول از A باشد. اگر I و $\frac{A}{I}$ میانگین‌پذیر مدولی باشد آنگاه A میانگین‌پذیر مدولی است.

برهان. فرض کنیم X یک فضای باناخ $A-U-$ مدول و $D: A \to {J_X}^{\perp}$ یک مشتق مدولی کراندار باشد چون I میانگین‌پذیر مدولی است در نتیجه $f_1 \in {J_X}^{\perp}$ موجود است بطوریکه:

$D_{|_I} = D_{f_1}$.

حال نگاشت $\widetilde{D} = D - D_{f_1}$ را در نظر می‌گیریم، فرض کنیم Y مجموعه بسته تولید شده توسط

$\{a(x + J_X) + (y + J_X).b|\ a, b \in I, x, y \in X\}$

و

$$F = \left\{\psi \in \left(\frac{X}{J_X}\right)^* \simeq J_X^{\perp} \middle| a.\psi = \psi.a = 0\,, a \in I\right\}$$

و به آسانی می‌توان بررسی کرد که

$$J_Y^{\perp} = F \subseteq \left(\frac{X}{J_X}\right)^* \simeq {J_X}^{\perp}$$

$D_1: \frac{A}{I} \to {J_X}^{\perp}$ را به صورت $D_1(b + I) = \widetilde{D}(b)$ تعریف می‌کنیم D_1 خوش‌تعریف و مشتق مدولی است و با توجه به اینکه

$$a.\widetilde{D}(b) = \widetilde{D}(ab) - \widetilde{D}(a).b = 0 \quad (a \in I\,, b \in A)$$

و به صورت مشابه $\widetilde{D}(b).a = 0$.

در نتیجه $\widetilde{D}(b) \in F = J_Y^{\perp}$ و چون $\frac{A}{I}$ میانگین‌پذیر مدولی است پس $f_2 \in {J_Y}^{\perp}$ وجود دارد بطوریکه $D_1 = D_{f_2}$. بنابراین

$$D = D_{f_1} + D_{f_2} = D_{f_1 + f_2}$$

در نتیجه A میانگین‌پذیر مدولی است.

قضیه ۱۱-۱. فرض کنیم A و B دو جبر باناخ U - مدول باشند، $A\oplus B$ میانگین‌پذیر مدولی است اگر و فقط اگر A و B میانگین‌پذیر مدولی باشند.

برهان. فرض کنیم A و B میانگین‌پذیر مدولی باشند چون A ایده آل بسته از $A\oplus B$ می‌باشد و $\frac{A\oplus B}{A} \simeq B$ میانگین‌پذیر مدولی است. در نتیجه در قضیه (۱۰-۱) $A\oplus B$ میانگین‌پذیر مدولی است.

برعکس: طبق فرض $A\oplus B$ میانگین‌پذیر مدولی است و چون $\frac{A\oplus B}{B} \simeq A$ و $\frac{A\oplus B}{A} \simeq B$ طبق نتیجه (۸-۱) A و B میانگین پذیر مدولی می‌باشند.

قضیه ۱۲-۱. اگر جبر باناخ A میانگین‌پذیر باشد آنگاه A میانگین‌پذیر مدولی است.

برهان. برای هر $A-U$ - مدول باناخ X^* که $J_X^{\perp}$ به عنوان U-مدول جابجایی باشد، چون $J_X^{\perp} \simeq \left(\frac{X}{J_X}\right)^*$ بنابراین حکم ثابت است.

تعریف ۱۳-۱. یک جبر باناخ $\left(U -\text{مدول}\right)$ A را آرنز منظم مدولی می‌نامیم هرگاه به ازای هر $m\,, n \in (J_A^{\perp})^* \simeq J_{J_A^{\perp}}^{\perp}$، $m\Box n = m \Diamond n$.
در اینصورت A آرنزمنظم مدولی است اگر و فقط اگر $\frac{A}{J_A}$ آرنز منظم باشد.

تعریف ۱۴-۱. A را جبر باناخ دوگان مدولی $A-U-$ مدول می‌نامیم اگر زیرمدول بسته‌ای $A-U-$ مدول مانند A_* از $J_A^{\perp}$ موجود باشد بطوریکه $J_{A_*}^{\perp} = A$. (A_* را پیش‌دوگان مدولی A گوییم)

مثال ۱۵-۱. اگر A جبر باناخ $(U-$ مدول$)$ آرنز منظم مدولی باشد در این صورت $\frac{A^{**}}{J_{A}^{\perp\perp}}$ یک جبر باناخ دوگان مدولی $A-U-$ مدول با پیش‌دوگان $J_{A}^{\perp}$ می‌باشد. چون A آرنز منظم مدولی باشد در نتیجه $\left(\frac{A}{J_A}\right)^{*} \simeq J_{A}^{\perp}$ زیرمدول بسته‌ای از $\frac{A^{**}}{J_{A}^{\perp\perp}}-U-$مدول از $\left(\frac{A^{**}}{J_{A}^{\perp\perp}}\right)^{*}$ است، بطوریکه: $\frac{A^{**}}{J_{A}^{\perp\perp}} \simeq J_{J_A^{\perp}}^{\perp}$.

لم ۱۶-۱. $J_{J_{A}^{\perp}} = \{0\}$.

برهان. به ازای هر $m \in J_{J_A^{\perp}}^{\perp}$، $a \in A$ و $\alpha \in U$ داریم

$$\begin{aligned}
&\langle (a.\alpha).m - a.(\alpha.m), f \rangle \\
&= \langle m\ , f.(a.\alpha) - (f.a).\alpha \rangle \\
&= lim_i \langle \widehat{b_i}\ , f.(a.\alpha) - (f.a).\alpha \rangle \\
&= lim_i \langle f.(a.\alpha) - (f.a).\alpha\ , b_i \rangle \\
&= lim_i \langle f\ , (a.\alpha)b_i - a.(\alpha.b_i) \rangle = 0 \\
&(f \in J_A^{\perp})
\end{aligned}$$

در نتیجه $(a.\alpha).m - a.(\alpha.m) = 0$ و چون $(a.\alpha).m - a.(\alpha.m)$ عناصر پایه‌ی $J_{J_A^{\perp}}$ می‌باشد بنابراین $J_{J_A^{\perp}} = \{0\}$.

تعریف ۱۷-۱. فرض کنیم U یک جبر باناخ دوگان و A یک جبر باناخ دوگان مدولی $A-U-$ مدول باشد فضای باناخ دوگان X، $A-U-$ مدول را نرمال می‌گوییم هرگاه

$$A \to X\,, a \to \begin{cases} a.x \\ x.a \end{cases} (a \in A\,, x \in X)$$

$W^{*}-W^{*}-$ پیوسته باشد.

$$U \to X\ ,\ \ a \to \begin{cases} \alpha.x \\ x.a \end{cases} (\alpha \in U\ \ , x \in X)$$

$W^{*}-W^{*}-$ پیوسته باشد.

تعریف ۱۸-۱. فرض کنیم U یک جبر باناخ دوگان و A یک جبر باناخ دوگان مدولی $A-U-$ مدول باشد A را کن- میانگین‌پذیر مدولی می‌نامیم هرگاه به ازای هر فضای باناخ دوگان $A-U-$ مدول نرمال جابجایی X هر $W^{*}-W^{*}-$ پیوسته مشتق مدولی $D: A \to \frac{X}{J_X}$ درونی باشد.

قضیه ۱۹-۱. فرض کنیم U یک جبر باناخ دوگان و A یک جبر باناخ دوگان مدولی $A-U-$ مدول و نگاشت

$$U \to A, \alpha \to \begin{cases} a.\alpha \\ \alpha.a \end{cases} (\alpha \in U, a \in A)$$

$W^{*}-W^{*}-$ پیوسته باشد و $(U-$ ،$\frac{A}{J_A}$ مدول جابجایی) اگر A کن- میانگین‌پذیر مدولی باشد آنگاه $\frac{A}{J_A}$ عضو خنثی دارد.

برهان. فرض کنیم X یک فضای باناخ $A-U-$ مدول جابجایی باشد در این صورت $\frac{X}{J_X}$ ، $A-U-$ مدول جابجایی است. فضای زمینه را A در نظر می‌گیریم با اعمال زیر $\frac{A}{J_A}$، $A-U-$ مدول نرمال است

$$\begin{aligned}
&A \to \frac{A}{J_A} \\
&a \to \begin{cases} a.(b+J_A) = ab + J_A \\ (b+J_A).a = 0 \end{cases}, (a, b \in A) \\
&U \to \frac{A}{J_A} \\
&\alpha \to \begin{cases} \alpha.(a+J_A) = \alpha.a + J_A \\ (a+J_A).\alpha = a.\alpha + J_A \end{cases}, \\
&(\alpha \in U, a, b \in A)
\end{aligned}$$

$W^{*}-W^{*}-$ پیوسته می‌باشد.

حال $D: A \to \frac{A}{J_A}$، $D(a) = a + J_A$ را در نظر می‌گیریم، D خوش‌تعریف و D مشتق مدولی است و چون A کن- میانگین‌پذیر مدولی است پس D درونی است، یعنی برای هر $a \in A$، $b + J_A$ در $\frac{A}{J_A}$ موجود است بطوریکه:

$$\begin{aligned}
&D(a) = a.(b+J_A) - (b+J_A).a = \\
&a.(b+J_A) \\
&\Longrightarrow a + J_A = a.(b+J_A) = ab + J_A = \\
&(a+J_A)(b+J_A)
\end{aligned}$$

پس $\frac{A}{J_A}$ همانی راست دارد. به همین صورت $\frac{A}{J_A}$ همانی چپ دارد.

قضیه ۲۰-۱. فرض کنیم U جبر باناخ دوگان و A جبر باناخ $U-$ مدول و B جبر باناخ دوگان مدولی $U-B-$ مدول و $\varphi: A \to B$ یک $U-$ مدول هومورفیسم پیوسته باشد و $W^* - \overline{\varphi(A)} = B$

۱) A میانگین‌پذیر مدولی باشد آنگاه B کن – میانگین‌پذیر مدولی است.

۲) A یک جبر باناخ دوگان مدولی $U-A-$ مدول و کن – میانگین‌پذیر مدولی باشد و φ، W^*- پیوسته باشد آنگاه B کن – میانگین‌پذیر مدولی است.

برهان. ۱) فرض کنیم X یک فضای باناخ دوگان $U-B-$ مدول نرمال و $\frac{X}{J_X}$، $U-$ مدول جابجایی باشد، در این صورت طبق اعمال زیر X یک فضای باناخ $U-A-$ مدول است

$$A \times X \to X \quad (a, x) \to a.x = \varphi(a).x$$
$$,X \times A \to X \quad (x.a) \to x.a = x.\varphi(a)$$
$$(a \in A, x \in X)$$

و نیز $\frac{X}{J_X}$ یک فضای باناخ $U-A-$ مدول است. فرض کنیم $D: B \to \frac{X}{J_X}$، $W^* - W^*-$ پیوسته مشتق مدولی باشد، با توجه به اینکه X یک فضای باناخ دوگان $U-B-$ مدول در این صورت $\frac{X}{J_X}$ نیز یک فضای باناخ دوگان $U-B-$ مدول می‌باشد یعنی زیر مدول بسته‌ای مانند Y از $J_X^{\perp} \simeq \left(\frac{X}{J_X}\right)^*$ موجود است بطوریکه $Y^* \simeq \frac{X}{J_X}$ در این صورت

$$D: B \to J_Y^{\perp} \subseteq Y^* \simeq \frac{X}{J_X}$$

$W^* - W^*-$ پیوسته مشتق مدولی است.

بنابراین $Do\varphi: A \to J_Y^{\perp}$ مشتق مدولی است و چون A میانگین پذیر مدولی است در نتیجه $Do\varphi$ درونی است. یعنی به ازای هر $a \in A$، $f \in J_Y^{\perp}$ موجود است بطوریکه:

$$Do\varphi(a) = a.f - f.a$$

با توجه به اینکه $W^* - \overline{\varphi(A)} = B$ پس برای هر $b \in B$ دنباله‌ای مانند $(a_\alpha)_\alpha$ در A موجود است بطوریکه

$$W^* - lim_\alpha \varphi(a_\alpha) = b$$
$$D(b) = D(W^* - lim_\alpha \varphi(a_\alpha))$$
$$= W^* - \lim_{\alpha}\big(Do\varphi(a_\alpha)\big)$$
$$= W^* - lim_\alpha (a_\alpha.f - f.a_\alpha)$$
$$= W^* - lim_\alpha \big(\varphi(a_\alpha).f - f.\varphi(a_\alpha)\big)$$
$$= b.f - f.b$$

پس درونی است.

۲) X یک فضای باناخ $U-B-$ مدول دوگان نرمال باشد طبق (۱) X یک فضای باناخ $U-A-$ مدول و به تبع آن $\frac{X}{J_X}$ نیز یک فضای باناخ $U-A-$ مدول می‌باشد. حال کافی است نشان دهیم که X یک $A-$ مدول نرمال است، نگاشت زیر را در نظر می‌گیریم.

$$A \to X \ , a \to \begin{cases} a.x = \varphi(a).x \\ x.a = x.\varphi(a) \end{cases}$$
$$(a \in A, x \in X)$$

نگاشت فوق خوش‌تعریف است. فرض کنیم

$$W^* - lim_n a_n = a$$

طبق فرض، φ، W^*- پیوسته است، پس

$$W^* - lim_n \varphi(a_n) = \varphi(a)$$

و چون X یک $B-$ مدول نرمال است در این صورت

$$W^* - lim_n \varphi(a_n).x = \varphi(a).x$$

پس $lim_n a_n.x = a.x$، یعنی X یک $A-$ مدول نرمال است و بقیه برهان، همانند (۱) می‌باشد.

گزاره ۲۱-۱. فرض کنیم U یک جبر باناخ دوگان و A جبر باناخ دوگان مدولی $U-A-$ مدول باشد، اگر میانگین پذیر مدولی باشد آنگاه A کن- میانگین‌پذیر مدولی است.

برهان. فرض کنیم X یک فضای باناخ دوگان $U-A-$ مدول نرمال ($U-$ مدول جابجایی)، در این

صورت $\frac{X}{J_X}$ یک فضای باناخ دوگان $A-U-$ مدول نرمال است.

فرض کنیم $D: A \to \frac{X}{J_X}$ یک W^*-W^*- پیوسته مشتق مدولی باشد، با توجه به اینکه $\frac{X}{J_X}$ یک فضای باناخ دوگان $A-U-$ مدول است پس زیرمدول بسته‌ای مانند Y از $J_X^{\perp}$ موجود است بطوریکه $Y^* \simeq \frac{X}{J_X}$ در این صورت $D: A \to J_Y^{\perp} \subseteq Y^*$ مشتق مدولی است و چون A میانگین‌پذیر مدولی است پس D درونی است.

قضیه ۲۲-۱. فرض کنیم U یک جبر باناخ دوگان و A یک جبر باناخ $A-U-$ مدول، آرنز منظم مدولی باشد و به ازای هر $\alpha \in U$ و $a \in A$ نگاشت‌های

$$U \to A,\ \ \alpha \to \begin{cases} a.\alpha \\ \alpha.a \end{cases}$$

W^*- پیوسته باشند و $\frac{A}{J_A}$ ایده‌آلی در $\frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}}$ باشد، A میانگین‌پذیر مدولی است اگر و فقط اگر $\frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}}$ کن $-$ میانگین‌پذیر مدولی باشد.

برهان. فرض کنیم A میانگین پذیر مدولی باشد در نظر می‌گیریم

$$\varphi: A \to \frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}} \simeq J_{J_A^{\perp}}^{\perp}$$
$$\varphi(a) = \hat{a} + J_A^{\perp\perp} \simeq \hat{a}$$

φ، W^*- پیوسته همریختی $U-$ مدولی است و $W^* - \overline{\varphi(A)} = \frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}}$ پس بنا به قضیه(۲۰-۱)، $\frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}}$ کن $-$ میانگین‌پذیر مدولی است.

برعکس: فرض کنیم X یک فضای باناخ $A-U-$ مدول جابجایی باشد در این صورت $\frac{X}{J_X}$ یک فضای باناخ $A-U-$ مدول جابجایی است و همچنین $\frac{X}{J_X}$ طبق اعمال زیر یک فضای باناخ $\frac{A}{J_A}-U-$ مدول است

$$\frac{A}{J_A} \times \frac{X}{J_X} \to \frac{X}{J_X}$$
$$(a + J_A).(x + J_X) = a.x + J_X$$
$$\frac{X}{J_X} \times \frac{A}{J_A} \to \frac{X}{J_X}$$
$$(x + J_X).(a + J_A) = x.a + J_X$$
$$(a \in A\,, x \in X)$$

به آسانی می‌توان نشان داد که نگاشتهای فوق خوش‌تعریف‌اند. و به تبع آن $J_X^{\perp} \simeq \left(\frac{X}{J_X}\right)^*$ نیز یک فضای باناخ $\frac{A}{J_A}-U-$ مدول است. فرض کنیم $D: A \to J_X^{\perp}$ مشتق مدولی پیوسته دلخواه باشد. پس طبق تعریف $\bar{D}: \frac{A}{J_A} \to J_X^{\perp}$، $\bar{D}(a + J_A) = D(a)$ یک مشتق مدولی است.

فرض کنیم X یک فضای باناخ $A-$ مدول شبه‌یکدار باشد یعنی به ازای هر $x \in X$ و $a \in A$ و $y \in X$ موجود باشند بطوریکه $x = a.y$ در این صورت $\frac{X}{J_X}$، $\frac{A}{J_A}-$ مدول شبه‌یکدار است، یعنی به ازای هر $x + J_X \in \frac{X}{J_X}$ داریم $x + J_X = a.y + J_X$، و همچنین $x + J_X = (a + J_A).(y + J_X)$ و چون $J_{J_A^{\perp}}^{\perp} \simeq \frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}}$ کن$-$ میانگین‌پذیر مدولی است، پس بنا به قضیه (۱۹-۱)، $\frac{\frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}}}{J_{\frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}}}}$ دارای عضو همانی است و بنا به لم (۱۶-۱)، $\left(\frac{A}{J_A}\right)^{**} \simeq \frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}}$ پس $J_{J_{J_A^{\perp}}^{\perp}} \simeq J_{\frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}}} = \{0\}$ دارای عضو خنثی است. در نتیجه بنا به ([۸] قضیه، ۵.۱.۸) $\frac{A}{J_A}$ دارای واحد تقریبی کراندار است. پس بنا به ([۵] قضیه، ۲.۱.۶) $\tilde{D}: \left(\frac{A}{J_A}\right)^{**} \to J_X^{\perp}$ یک مشتق می‌باشد. بطوریکه تحدید $\tilde{D}$ روی $\frac{A}{J_A}$ برابر $\bar{D}$ است.

ادعا می‌کنیم $J_X^{\perp}$، $\left(\frac{A}{J_A}\right)^{**} - U \simeq \frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}}-$ مدول نرمال است. فرض کنیم $(a_\alpha)_\alpha$ دنباله کراندار در $\frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}}$ بطوریکه $W^* - lim_\alpha\, a_\alpha = 0$ و فرض کنیم $f \in J_X^{\perp}$ دلخواه باشد، برای هر $x + J_X \in \frac{X}{J_X}$ با توجه به اینکه $\frac{X}{J_X}$ شبه‌یکدار $\frac{A}{J_A}-$ مدول است پس $a + J_A \in \frac{A}{J_A}$ و $y + J_X \in \frac{X}{J_X}$ موجود است بطوریکه $x + J_X = (y + J_X).(a + J_A)$ چون W^*- توپولوژی از $\frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}}$ تحدید به $\frac{A}{J_A}$ یک $W-$توپولوژی بر

روی $\frac{A}{J_A}$ است پس داریم

$$W-lim_\alpha (a+J_A).a_\alpha = 0$$

بنابراین

$$W-lim_\alpha (x+J_X).a_\alpha = \left((y+J_X).(a+J_A)\right).a_\alpha = (y+J_X).\left((a+J_A).a_\alpha\right) = 0$$

از این رو داریم

$$\langle a_\alpha .f\ , x+J_X\rangle = \langle f\ , (x+J_X).a_\alpha\rangle \to 0$$

پس $W^*-lim_\alpha\, a_\alpha .f = 0$ به همین صورت $W^*-lim_\alpha\, f.a_\alpha = 0$ از طرفی طبق فرض نگاشت

$$U\to A \quad \alpha \to \begin{cases}\alpha.a\\ a.\alpha\end{cases} (a\in A\,, \alpha\in U)$$

$W-W^*$– پیوسته می‌باشد یعنی (a_n) دنباله‌ای در U باشد بطوریکه:

$$W^*-lim_\alpha\, a_n = 0$$

آنگاه

$$W-lim_\alpha\, a_n .a = 0$$

و همچنین

$$W-lim_\alpha\, a_n .(a+J_A) = 0$$

حال برای هر $x+J_X\in\frac{X}{J_X}$ با توجه به اینکه $\frac{X}{J_X}$، $\frac{A}{J_A}$– مدول شبه یکدار است $a+J_A\in\frac{A}{J_A}$ و $y+J_X\in\frac{X}{J_X}$ موجود است بطوریکه

$$W-lim_\alpha\, a_n .(x+J_X) = \left(a_n .(a+J_A)\right).(y+J_X) = 0$$

پس $J_X^\perp$، $U-\frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}}$– مدول نرمال است.

$\widetilde{D}$، W^*– پیوسته می‌باشد زیرا فرض کنیم $(a_\alpha)_\alpha$ دنباله کراندار در $\frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}}$ که $W^*-lim_\alpha\, a_\alpha = 0$، برای هر $x+J_X\in\frac{X}{J_X}$ چون $\frac{X}{J_X}$، $\frac{A}{J_A}$– مدول شبه‌یکدار است $a+J_A\in\frac{A}{J_A}$ و $y+J_X\in\frac{X}{J_X}$ موجود است بطوریکه:

$$x+J_X = (\,y+J_X).(a+J_A)$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned}&\langle\widetilde{D}(a_\alpha)\,, x+J_X\rangle\\ &= \langle\widetilde{D}(a_\alpha)\,, (\,y+J_X)(a+J_A)\rangle\\ &= \langle(a+J_A)\widetilde{D}(a_\alpha)\,, y+J_X\rangle\\ &= \langle\overline{D}\left((a+J_A).a_\alpha\right)-\overline{D}(a+J_A).a_\alpha, y+J_X\rangle\\ &= \langle D(a.a_\alpha)-\left(\overline{D}(a+J_A)\right).a_\alpha\,, y+J_X\rangle\end{aligned}$$

با توجه به اینکه D پیوسته ضعیف است و $J_X^\perp$، $U-\frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}}$– مدول نرمال است پس

$$D(a.a_\alpha)-\left(\overline{D}(a+J_A)\right).a_\alpha \to 0$$

بنابراین $W^*-lim_\alpha\,\widetilde{D}(a_\alpha) = 0$.

در ادامه نشان می‌دهیم که برای هر $\alpha\in U$ و $m\in\frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}}$، $D(\alpha.m) = \alpha.\widetilde{D}(m)$. با توجه به اینکه $m\in\frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}}$ دنباله کرانداری مانند $(a_\beta)_\beta$ در $\frac{A}{J_A}$ موجود است بطوریکه $W^*-lim_\beta\,\hat{a}_\beta\to m$

$$\begin{aligned}&\widetilde{D}(\alpha.m) = \widetilde{D}\left(W^*-lim\alpha._\beta\,\hat{a}_\beta\right) = W^*-lim_\beta\,\widetilde{D}\left(\alpha.\hat{a}_\beta\right)\\ &= W^*-lim_\beta\,\widetilde{D}\left(\widehat{\alpha.a_\beta}\right) = W-lim_\beta\,\overline{D}\left(\alpha.\hat{a}_\beta\right) = \alpha\left(W-lim_\beta\,\overline{D}(a_\beta)\right)\\ &= \alpha\left(W^*-lim_\beta\,\widetilde{D}\left(\hat{a}_\beta\right)\right) = \alpha.\widetilde{D}(m)\end{aligned}$$

از طرفی چون $\frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}}$ کن – میانگین‌پذیر مدولی است پس $\widetilde{D}$ درونی است و همچنین $\overline{D}$ نیز درونی است. حال نشان می‌دهیم $D: A\to J_A^\perp$ درونی است. برای هر $a\in A$، $f\in J_X^\perp$ موجود است بطوریکه:

$$\begin{aligned}D(a) &= \overline{D}(a+J_A)\\ &= (a+J_A).f-f.(a+J_A)\\ &= a.f-f.a\end{aligned}$$

پس A میانگین‌پذیر مدولی است.

قضیه ۲۳-۱. فرض کنیم U جبر باناخ دوگان و A جبر باناخ $A-U$–مدول،

$$U\to A \qquad \alpha\to\begin{cases}\alpha.a\\ a.\alpha\end{cases}،$$

W^*-W- پیوسته باشد و A، $\frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}}$ آرنز منظم مدولی باشند، اگر $\left(\frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}}\right)^{**}$ کن- میانگین‌پذیر مدولی باشد آنگاه $\frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}}$ کن – میانگین‌پذیر مدولی است.
همچنین اگر $\frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}}$ ایده‌آلی از $\left(\frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}}\right)^{**}$ باشد بنابراین $\frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}}$ انعکاسی و میانگین‌پذیر مدولی است.

برهان. فرض کنیم X فضای باناخ، $\left(\frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}}\right)^{**}-U-$ مدول نرمال دوگان باشد در اینصورت $\frac{X}{J_X}$ یک فضای باناخ $\frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}}-U-$ مدول نرمال دوگان است. فرض کنیم

$$\pi: a^{****} \to a^{****}: \left(\frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}}\right)^{**} \to \frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}}$$

نگاشت تحدید روی $J_A^{\perp}$ باشد چون π نگاشت $U-$ مدول همومورفیسم W^*-W^*- پیوسته است در نتیجه $\frac{X}{J_X}$ طبق اعمال زیر $\frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}}-U-$ مدول می‌باشد.

$$a^{****}.(x+J_X)=\pi\left(a^{****}\right)(x+J_X),$$
$$(x+J_X).a^{****}=(x+J_X)\pi\left(a^{****}\right)$$
$$\left(x+J_X\in\frac{X}{J_X}\ ,a^{****}\in\left(\frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}}\right)^{**}\right)$$

فرض کنیم $D:\frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}}\to\frac{X}{J_X}$، W^*-W^*- مشتق مدولی پیوسته باشد، بنابراین $Do\pi:\left(\frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}}\right)^{**}\to\frac{X}{J_X}$، W^*-W^*- مشتق مدولی پیوسته است.
حال چون $\left(\frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}}\right)^{**}$ کن- میانگین‌پذیر مدولی است پس $Do\pi$ درونی است. در نتیجه D درونی است. از طرفی طبق قضیه (۱۹-۱) $\frac{\frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}}}{J_{\frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}}}}$ دارای عضو خنثی است و طبق لم (۱۶-۱) $J_{\frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}}}=\{0\}$ بنابراین $\frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}}$ دارای عضو خنثی است و چون ایده‌آلی در $\left(\frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}}\right)^{**}$ می‌باشد پس $\left(\frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}}\right)^{**}=\frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}}$ یعنی $\frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}}$ انعکاسی است و طبق قضیه (۲۲-۱) $\frac{A^{**}}{J_A^{\perp\perp}}$ میانگین‌پذیر مدولی است.

۳- σWC - قطر حقیقی مدولی جبر باناخ دوگان مدولی

تعریف ۱-۲. فرض کنیم A یک جبر باناخ $U-$ مدول و X یک فضای باناخ $A-U-$ مدول باشد هر $x\in X$ تقریباً متناوب ضعیف مدولی گوییم اگر نگاشت‌های

$$A\to X\ ,\quad a\to\begin{cases}a.x\\x.a\end{cases}$$
$$U\to X\qquad \alpha\to\begin{cases}\alpha.x\\x.\alpha\end{cases}$$
$$(a\in A\,,\alpha\in U)$$

فشرده ضعیف باشد، مجموعه تمام عناصر تقریبا متناوب ضعیف مدولی را با $WAP_U(X)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۲-۲. فرض کنیم U جبر باناخ دوگان و A جبر باناخ دوگان مدولی $A-U-$ مدول و X یک $A-U-$ مدول بطوری که X^* یک فضای باناخ $A-U-$ مدول نرمال باشد در این صورت $X=WAP_U(X)$.

برهان. فرض کنیم $x\in X$ چون X^*، $A-U-$ مدول نرمال است پس

$$A\to X,a\to\begin{cases}a.x\\x.a\end{cases}(a\in A)$$
$$U\to X\,,\ \ \alpha\to\begin{cases}\alpha.x\\x.\alpha\end{cases}(\alpha\in U)$$

W^*-W-پیوسته است.
طبق قضیه باناخ آل- اوغلو هر گوی واحد در A، W^*- فشرده است و نگاشت‌های فوق پیوسته هستند در نتیجه نگاشت‌های فوق فشرده ضعیف می باشند یعنی $X=WAP_U(X)$.

تعریف ۳-۲. فرض کنیم U جبر باناخ دوگان و A یک جبر باناخ دوگان مدولی $A-U-$ مدول، مجموعه تمام $x\in X$ که

$$A\to X\ ,\quad a\to\begin{cases}a.x\\x.a\end{cases}$$
$$U\to X\qquad \alpha\to\begin{cases}\alpha.x\\x.\alpha\end{cases}$$

W^*-W- پیوسته باشند را با $\sigma WC_U(X)$ نمایش می‌دهیم.

تبصره ۱. $\sigma WC_U(X)$ زیرمدول بسته‌ای $A-U-$ مدول از X است.

تبصره ۲. $\sigma WC_U(X) \subset WAP_U(X)$.

قضیه ۴- ۲. فرض کنیم A یک جبر باناخ دوگان $A-U-$ مدول و X یک $A-U-$ مدول باناخ باشد گزاره‌های زیر معادلند:

۱) X^* یک فضای باناخ $A-U-$ مدول نرمال است.

۲) $X=\sigma WC_U(X)$.

برهان. فرض کنیم X^* یک فضای باناخ $A-U-$ مدول نرمال باشد، طبق برهان قضیه (۲- ۲) $X=\sigma WC_U(X)$ برقرار است.

فرض کنیم $X=\sigma WC_U(X)$ برقرار باشد پس به ازای هر $x\in X$

$$A \to X \;,\quad a \to \begin{cases} a.x \\ x.a \end{cases}$$
$$U \to X \qquad \alpha \to \begin{cases} \alpha.x \\ x.\alpha \end{cases}$$

W^*-W- پیوسته است. پس در نتیجه X^* نرمال است.

تبصره۳. تمام عناصر $\left(\sigma WC_U(X)\right)^*$، $A-U-$ مدول نرمال می‌باشد.

نتیجه ۵-۲. فرض کنیم U جبر باناخ دوگان و A یک جبر باناخ $A-U-$ مدول بطوریکه $\frac{A}{J_A}$ یک جبر باناخ دوگان $A-U-$ مدول با پیش‌دوگان B_* باشد در این صورت $B_* \subset \sigma WC_U(J_A^\perp)$.

قضیه ۶-۲. فرض کنیم U جبر باناخ دوگان و A جبر باناخ دوگان مدولی $A-U-$ مدول باشد. اگر برای هر فضای باناخ $A-U-$ مدول مانند X هر W^*- پیوسته مشتق مدولی $D: A \to \left(\sigma WC_U(X)\right)^*$ درونی باشد آنگاه A کن – میانگین پذیر مدولی است.

برهان. فرض کنیم X یک فضای باناخ $A-U-$ مدول دوگان نرمال بطوریکه $\frac{X}{J_X}$، $U-$ مدول جابجایی باشد و $D: A\to \frac{X}{J_X}$، W^*-W- پیوسته مشتق مدولی باشد. چون X یک $A-U-$ مدول دوگان پس $\frac{X}{J_X}$، $A-U-$ مدول دوگان با پیش‌دوگان Y می‌باشد بطوریکه $Y^*=\frac{X}{J_X}$ و همچنین چون X یک $A-U-$ مدول نرمال است پس $Y^*\simeq\frac{X}{J_X}$، $A-U-$ مدول نرمال است.

در نتیجه طبق قضیه (۴-۲)، $Y=\sigma WC_U(Y)$ پس داریم:

$$D: A \to \left(\sigma WC_U(Y)\right)^* = Y^* \simeq \frac{X}{J_X}$$

W^*-W^*- مشتق مدولی است حال طبق فرض D درونی استپسA کن–میانگین‌پذیرمدولی است.

فضای باناخ $\frac{A}{J_A}\widehat{\otimes}\frac{A}{J_A}$ با تعریف زیر یک جبر باناخ $A-U-$ مدول است:

$$(a+J_A\otimes b+J_A)(c+J_A\otimes d+J_A)=(ac+J_A\otimes bd+J_A)$$
$$a.(b\otimes J_A\otimes c+J_A)=ab+J_A\otimes c+J_A$$
$$(b+J_A\otimes c+J_A).a=b+J_A\otimes ca+J_A$$
$$\alpha.(a+J_A\otimes b+J_A)=\alpha.a+J_A\otimes b+J_A$$
$$(a+J_A\otimes b+J_A).\alpha=a+J_A\otimes b.\alpha+J_A$$
$$\pi: \frac{A}{J_A}\widehat{\otimes}\frac{A}{J_A}\to\frac{A}{J_A}$$
$$\pi(a+J_A\otimes b+J_A)=ab+J_A$$

π یک $A-U-$ مدول همومورفیسم است. در این صورت

$$\pi^*: \left(\frac{A}{J_A}\right)^* \to \left(\frac{A}{J_A}\widehat{\otimes}\frac{A}{J_A}\right)^*$$
$$\pi^*\left(\sigma WC_U(J_A^\perp)\right) \subseteq \sigma WC_U\left(\frac{A}{J_A}\widehat{\otimes}\frac{A}{J_A}\right)^*$$

از طرفی اگر A جبر باناخ $A-U-$ مدول باشد، بطوریکه $\frac{A}{J_A}$ جبر باناخ دوگان $A-U-$ با پیش‌دوگان B_* باشد یعنی $B_*\subseteq J_A^\perp$ موجود است بطوریکه $\frac{A}{J_A}\simeq (B_*)^*$، در اینصورت طبق نتیجه (۵-۲) داریم

$B_* \subset \sigma WC_U(J_A^{\perp})$. بنابراین

$$\pi^*|_{B_*}: B_* \to \sigma WC_U\left(\frac{A}{J_A}\widehat{\otimes}\frac{A}{J_A}\right)^*$$
$$\Longrightarrow \pi_{\sigma WC}: \left(\sigma WC\left(\frac{A}{J_A}\widehat{\otimes}\frac{A}{J_A}\right)^*\right)^* \to (B_*)^* \simeq \frac{A}{J_A}$$

تعریف ۷-۲. فرض کنیم U جبر باناخ دوگان و A یک جبر باناخ دوگان مدولی $A-U-$ مدول و نگاشت‌های

$$U \to A \qquad \alpha \to \begin{cases}\alpha . a \\ a.\alpha\end{cases}$$

W^*-W^*- پیوسته باشند $M \in \left(\sigma WC\left(\frac{A}{J_A}\widehat{\otimes}\frac{A}{J_A}\right)^*\right)^*$ را $\sigma WC-$ قطر حقیقی مدولی A می‌نامیم هرگاه

$$a.M = M.a\,,$$
$$a.\pi_{\sigma WC}(M) = a + J_A (a \in A)$$

لم ۸-۲. فرض کنیم A یک جبر باناخ $A-U-$ مدول دوگان مدولی بطوریکه $\frac{A}{J_A}$ عضو خنثی داشته باشد و فرض کنیم X یک فضای باناخ دوگان $A-U-$ مدول و فرض کنیم $D: A \to \frac{X}{J_X}$، W^*-W^*- پیوسته مشتق مدولی باشد و نگاشت $\theta: \frac{A}{J_A}\widehat{\otimes}\frac{A}{J_A} \to \frac{X}{J_X}$ بصورت

$$\theta(a + J_A \otimes b + J_A) = (a + J_A).D(b)$$

تعریف شود در این صورت

$$\theta^*(Y) \subseteq \sigma WC_U\left(\frac{A}{J_A}\widehat{\otimes}\frac{A}{J_A}\right)^*$$

(Y پیش دوگان $\frac{X}{J_X}$)

برهان. θ خوش‌تعریف است و θ هومومرفیسم $A-U-$ مدول چپ است. پس بنابراین θ^* هومومرفیسم $A-U-$ مدول راست است در این صورت بنا به نتیجه(۵-۲)

$$\theta^*(Y) \subset \theta^*\left(\sigma WC_U(J_X^{\perp}) \subset \theta^*(\sigma WC_{Ur}(J_X^{\perp}))\right) \subset \sigma WC_{Ur}\left(\frac{A}{J_A}\widehat{\otimes}\frac{A}{J_A}\right)^*$$

فرض کنیم $e_{\frac{A}{J_A}}$ عضو خنثی$\frac{A}{J_A}$باشد و $R = e_{\frac{A}{J_A}} \otimes \frac{A}{J_A}$، R زیر مدول بسته $A-U-$ مدول باناخ راست $\frac{A}{J_A}\widehat{\otimes}\frac{A}{J_A}$ می‌باشد در این صورت $\frac{A}{J_A}\widehat{\otimes}\frac{A}{J_A} = ker\pi \oplus R$، $A-U-$ مدول باناخ راست است. در نتیجه $\left(\frac{A}{J_A}\widehat{\otimes}\frac{A}{J_A}\right)^* = (ker\pi)^* \oplus R^*$، $A-U-$ مدول باناخ چپ می‌باشد.

فرض کنیم $\theta_1 = \theta|_{ker\pi}$ و $\theta_2 = \theta|_R$ بنابراین $\theta = \theta_1 + \theta_2$. در نتیجه $\theta^* = \theta_1^* \oplus \theta_2^*$، θ_1^* هومومورفیسم $A-U-$ مدول باناخ چپ می‌باشد. بنابراین $\theta_1^*(Y) \subset \sigma WC_{Ul}\left(\frac{A}{J_A}\widehat{\otimes}\frac{A}{J_A}\right)^*$. به آسانی دیده می‌شود که R با$\frac{A}{J_A}$ ایزومتریک می‌باشد. بنابراین $\theta_2^*: J_X^{\perp} \to \left(\frac{A}{J_A}\right)^* \simeq R^*$ بنابر نتیجه (۵-۲)

$$\theta_2^*(Y) \subset B_* \subset \sigma WC_{Ul}(J_A^{\perp}) = \sigma WC_{Ul}(R^*) \subset \sigma WC_{Ul}\left(\frac{A}{J_A}\widehat{\otimes}\frac{A}{J_A}\right)^*$$

(B_* پیش‌دوگان مدولی$\frac{A}{J_A}$)

در اینصورت $\theta^*(Y) \subset \sigma WC_{Ul}\left(\frac{A}{J_A}\widehat{\otimes}\frac{A}{J_A}\right)^*$.

قضیه ۹-۲. فرض کنیم U جبر باناخ دوگان و A جبر باناخ دوگان مدولی $A-U-$ مدول نرمال باشد و نگاشت‌های

$$U \to A \qquad \alpha \to \begin{cases}\alpha . a \\ a.\alpha\end{cases}$$

W^*-W^*- پیوسته باشند و $\frac{A}{J_A}$ و $\frac{A}{J_A}\widehat{\otimes}\frac{A}{J_A}$، $U-$ مدول جابجایی باشند، A کن- میانگین‌پذیر مدولی است اگر و فقط اگر A دارای $\sigma WC-$ قطر حقیقی مدولی باشد.

برهان. فرض کنیم A کن- میانگین‌پذیر مدولی باشد آنگاه طبق قضیه (۱۹-۱)، $\frac{A}{J_A}$ دارای عضو خنثی است. تعریف می‌کنیم:

$$D: A \to (\sigma WC_U(\frac{A}{J_A}\hat{\otimes}\frac{A}{J_A})^*)^*$$
$$D(a) = a + J_A \otimes e_{\frac{A}{J_A}} - e_{\frac{A}{J_A}} \otimes a + J_A =$$
$$a + J_A.(e_{\frac{A}{J_A}} \otimes e_{\frac{A}{J_A}}) - (e_{\frac{A}{J_A}} \otimes e_{\frac{A}{J_A}})a + J_A$$

D یک مشتق مدولی است. با توجه به اینکه $\frac{A}{J_A}\hat{\otimes}\frac{A}{J_A}$ نشاننده طبیعی $(\sigma WC_U(\frac{A}{J_A}\hat{\otimes}\frac{A}{J_A})^*)^*$ می‌باشد و $(\sigma WC_U(\frac{A}{J_A}\hat{\otimes}\frac{A}{J_A})^*)^*$، $A-U-$ مدول نرمال می‌باشد بنابراین D، W^*-W^*- پیوسته مشتق مدولی است، همچنین مقادیر D زیر مدول W^*- بسته از $ker\pi_{\sigma WC}$ می‌باشد، از این رو $N \in ker\pi_{\sigma WC}$ موجود است بطوریکه

$$D(a) = a.N - N.a \quad (a \in A)$$

حال فرض کنیم $M = e_{\frac{A}{J_A}} \otimes e_{\frac{A}{J_A}} - N$ در این صورت داریم

$$a.M = a.(e_{\frac{A}{J_A}} \otimes e_{\frac{A}{J_A}} - N)$$
$$= D(a) + (e_{\frac{A}{J_A}} \otimes e_{\frac{A}{J_A}}).a - aN$$
$$= (e_{\frac{A}{J_A}} \otimes e_{\frac{A}{J_A}}).a - N.a = M.a$$
$$a.\pi_{\sigma WC}(M) = a(e_{\frac{A}{J_A}}) - \pi_{\sigma WC}(N) = a + J_A - J_A = a + J_A$$

پس
$M = e_{\frac{A}{J_A}} \otimes e_{\frac{A}{J_A}} - N \in (\sigma WC(\frac{A}{J_A}\hat{\otimes}\frac{A}{J_A})^*)^*$، $\sigma WC -$ قطر حقیقی مدولی A می‌باشد.

برعکس: اگر M، $\sigma WC -$ قطر حقیقی مدولی A باشد، آنگاه $\pi_{\sigma WC}(M)$ عضو خنثی $\frac{A}{J_A}$ می‌باشد. فرض کنیم X یک فضای باناخ دوگان $A-U-$ مدول بطوریکه $\frac{X}{J_X}$، $U-$ مدول جابجایی و $\frac{A}{J_A}-$مدول یکدار باشد و $D: A \to \frac{X}{J_X}$، W^*-W^*- پیوسته مشتق مدولی باشد در نظر می‌گیریم:

$$\theta: \frac{A}{J_A}\hat{\otimes}\frac{A}{J_A} \to \frac{X}{J_X}$$
$$\theta(a + J_A \otimes b + J_A) = (a + J_A).D(b)$$

θ خوش‌تعریف است. $\frac{X}{J_X}$ یک فضای باناخ دوگان $A-U-$ مدول با پیش‌دوگان Y، بطوریکه $Y^* = \frac{X}{J_X}$ و Y زیرمدول بسته $A-U-$ از $J_X^{\perp}$ می‌باشد در این صورت بنا به لم (۸-۲)

$$\theta^*(Y) \subset BWC_U\left(\frac{A}{J_A}\hat{\otimes}\frac{A}{J_A}\right)^*$$

در نظر می‌گیریم

$$\varphi = (\theta^*\big|_Y)^*: (\sigma WC(\frac{A}{J_A}\hat{\otimes}\frac{A}{J_A})^*)^* \to Y^* \simeq \frac{X}{J_X}$$

فرض کنیم

$$M = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + J_A \otimes b_n + J_A)$$

که $\sum_{n=1}^{\infty}\|a_n + J_A\|\|b_n + J_A\| < \infty$، $\sigma WC -$ قطر حقیقی مدولیA باشد. در اینصورت $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + J_A).D(b_n) = \varphi(M)$ متعلق به $\frac{X}{J_X}$ می‌باشد. به ازای هر $a \in A$ داریم

$$a.\varphi(M) - \varphi(M).a =$$
$$\varphi(a.M) - \left(\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + J_A).D(b_n)\right).a =$$
$$\varphi(a.M) - \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + J_A)(D(b_n).a) =$$
$$\varphi(a.M) - \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + J_A)D(b_n a)$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}(a_n b_n + J_A).D(a)$$
$$= \varphi(a.M) - \varphi(M.a) + \pi_{\sigma WC}(M).D(a)$$
$$= D(a)$$

در نتیجه D درونی است.

فهرست منابع

[1] M. Amini, ”Module arens regularity for semigroup algebras,”Semigroupfourm, 77, (2008), 300-305.

[2] M. Amini, “Module amenability for semigroup algebras,” Semigroupfourm, 69, (2004), 302 – 312.

[3] J. B. Conway, “A course in functional Analysis”, Springer –Verlag, New York, 1985.

[4] H. G. Dales, “Banach algebras and automatic continuity,” Clarendon, Oxford, (2000).

[5] V. Runde, ”Lectures on amenability,” Lecturer Notes in mathematics 1774, Springer- Verlage, Berlin, 2002.

[6] V. Runde,” Amenability for dual Banachalgebras”, Studia Math. 148, (2001), 47-66.

[7] V.Runde,”Dual Banach algebras: Connes-amenability, normal, virtual diagonals , and ingectivity of the redualbimodule”, Math.SCAND. 95(2004), 124-144.

[8] T. W. Palmer, “Banach algebras and the general theory of *-algebras,” Volume 1, Cambridge University press, (1994).