دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره سی و نهم، آذر و دی ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۵۸۸-۲۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

روش تحلیلی جدید برای حل جریان لایه مرزی آشفته در محدوده وسیع اعداد رینولدز بالا بر روی صفحه تخت بدون حضور گرادیان فشار

محمد حسین کفاش[۱]، داوود دمیری گنجی*[۲]، محمد حسن نوبختی[۱]

(۱) گروه مهندسی مکانیک و هوافضا، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران
(۲) دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل ، بابل، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۷/۱۰/۰۶ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۷/۱۱/۲۸

چکیده

مقاله حاضر به بررسی یک روش نوین برای حل جریان لایه مرزی آشفته بر روی صفحه تخت بدون حضور گرادیان فشار می‌پردازد.ابتدا معادلات پیوستگی و مومنتم حرکت را برای شرایط حل مساله نوشته و سپس با ارائه یک مدل توربولانسی جدید در معادلات و نیز یک رابطه تحلیلی برای ترم تنش رینولدز، ترم تنش رینولدز را به ترم های همسان معادله تبدیل کرده. در نهایت با متغیرهای تشابهی معادلات فوق را به یک معادله دیفرانسیل معمولی غیر خطی تبدیل نموده که آن را یک معادله شبه تشابهی می‌نامیم. این معادله با استفاده از روش رانک کوتا وشوتینگ، به ازای اعداد رینولدز مختلف حل شده و نهایتا تنش برشی دیواره و ضریب اصطکاک محاسبه و با نتایج تجربی مقایسه شد که تطابق بسیار عالی مشاهده گردید. هم چنین با استفاده از روش انطباق منحنی ها برای (ضریب اصطکاک پوسته ای) و (ضخامت لایه مرزی) دو رابطه مستقل پیشنهاد گردید. دیده شد که در اعداد رینولدز خاصی پروفیل سرعت بدست آمده با پروفیل سرعت توان قابل مقایسه است. هرچه عدد رینولدز افزایش یابد انحراف آنها از یکدیگر بیشتر می‌شود.

واژه‌های کلیدی: حل تشابهی- لایه مرزی آشفته-صفحه تخت-ضریب اصطکاک پوسته ایی-رانج-کوتا.

* عهده‌دار مکاتبات: Email: m_h_k2001@yahoo.com

۱- مقدمه

زندگی روزمره یک دانش اولیه و مقدماتی از آشفتگی سیال را به ما ارائه می‌دهد. یک جریان آشفته خود تشابه نامیده می‌شود،هرگاه همه یا برخی از خواص آماری آن فقط به ترکیب مشخص از متغیرهای مستقل به جای هر متغیر مستقل، به صورت منفرد بستگی داشته باشد. نتیجه این رفتار جریانی آن است که تعداد متغیرهای مستقل مساله کاهش می‌یابد، بنابراین حل آن بسیار ساده‌تر می‌شود[۱-۵]. از آنجایی که اغتشاش پدیده‌ای بسیار پیچیده است و تحلیل و شناسایی دقیق آن به آسانی امکان پذیر نیست لذا یافتن یک حل تشابهی می تواند روند حل را بسیار ساده نماید[۶-۸]. در رابطه با لایه مرزی آشفته خود تشابه کارهای آزمایشگاهی و تئوری های مختلف این ایده را حمایت می‌کند که سرعت جریان آزاد تابع قانون توان، برای خود تشابهی مورد نیاز است. خود تشابهی لایه مرزی یک پدیده بسیار مفید است که حل را ساده کرده و این حل ساده فهم بهتر لایه مرزی و دسته بندی سازمان یافته و درک بهتر نتایج آزمایشگاهی و تجربی را ممکن می‌سازد[۹]. اصل خود تشابهی به عنوان نماد یک تعادل متحرک توسط تاونسند[۱۰] معرفی شد. یک متغیر بدون بعد که به عنوان تابعی از مختصات عرضی بدون بعد نوشته می‌شود خود تشابه نامیده می‌شود اگر تابع با موقعیت پایین دست تغییر نکند[۱۱-۱۳]. ولفشتاین[۶-۸] احتمال وجود یک حل خود تشابهی را برای مساله لایه مرزی آشفته غیر قابل تراکم دو بعدی مورد بررسی قرار داد، و احتمال داد که با بررسی بیشتر نتایج آزمایشگاهی و بررسی تحلیلی تئوری مشخصه‌ها و ویژگی‌های معادلات دیفرانسیل معمولی تشابهی می‌توان حل‌هایی را بدست آورد. کلاوزر [۱۴] آزمایشهایی را انجام داد که در آنها گرادیان فشار را طوری تنظیم کرد که یک لایه مرزی آشفته خود تشابه بدست آید. یک گرادیان فشار بدون بعد ثابت $\beta=\frac{\delta^*}{\tau_w}\frac{dp}{dx}$ به عنوان یک شرط برای خود تشابهی لایه مرزی معرفی شد. در اینجا δ^* ضخامت لایه مرزی جابجایی، τ_w تنش برشی دیواره و $\frac{dp}{dx}$ گرادیان فشار است. ملوروگبسون [۱۵] نشان دادند که خود تشابهی در صورتی حاصل می‌شود که متغیر جریان آزاد تابع یک فرم توانی از متغیر در جهت پایین دست را داشته باشد. $(U_\infty \sim x^m)$ به طوری که U_∞ سرعت جریان آزاد و x مختصات در جهت جریان باشد. تاونسند [۱۰]از طول و مقیاسهای سرعت استفاده کرد و معادله توصیف کننده بخش بیرونی لایه مرزی آشفته را تحلیل نمود. تحلیل وی نشان داد که علاوه بر شرط $(U_\infty \propto x^m)$ مقیاس طولی باید به صورت خطی با مختصات پایین دست تغییر کند.

جریان لایه مرزی آشفته پیچیده تر از جریانهای برشی و جت سیال آشفته هستند. زیرا حضور یک دیواره جامد نیرویی را به مساله تحمیل می‌کند که در جتها و دنباله‌ها وجود ندارد. بدیهی‌ترین موضوع این است که ویسکوزیته سیال صرف نظر از کوچک بودن آن شرط عدم لغزش را به مساله اعمال می‌کند. شرطی که بیان می‌کند سرعت سیال روی سطح جامد باید برابر با سرعت سطح باشد.

لایه مرزی متلاطم روی صفحه تخت در بسیاری از کاربردهای صنعتی و نظامی دیده می‌شود. به عنوان مثال می‌توان کاربرد آن را در پره‌های توربو ماشین و کمپرسورهای دوار و محاسبه نیروی کشش اصطکاکی بر روی کشتی‌ها در کاربردهای صنعتی و بلند کردن سطوح و بدنه هواپیماها در کاربردهای نظامی اشاره کرد[۱۶].

در این نوع جریانها اصطکاک پوسته با اصطکاک پوسته در جریان آرام آنچنان تفاوت زیادی نخواهد کرد[۱۷, ۱۸]. همانطور که ذکر شد، جریان لایه مرزی آشفته بر روی صفحه تخت کاربردهای عملی

و صنعتی زیادی دارد و حل تحلیلی برای این نوع جریان تا کنون ارائه نشده است و تنها تحقیقات انجام شده بر مبنای شبیه سازی‌های مستقیم عددی (DNS) صورت پذیرفته است و این شبیه سازی‌ها بر مبنای چهار مدل توربولانسی رایج جبری، $\mathrm{K}-\varepsilon$، $K-\omega$ و مدل تنش رینولدز می‌باشد[۱۶, ۱۹]. هنوز هم بحث‌های زیادی در مقالات برای حل‌های تشابهی لایه مرزی آشفته بر روی صفحه تخت بدون یا وجود گرادیان فشار وجود دارد. دانستن این حل‌ها نه تنها مفید برای فهم بهتر مفاهیم توربولانسی است بلکه به ما می‌فهماند که برای نتایج آزمایشگاهی مانند تونل باد تا چه حد می‌توان مدل با مقیاس مشخص ساخت[۱۲]. در این مقاله روشی تحلیلی برای حل جریان لایه مرزی آشفته روی صفحه تخت بدون در نظر گرفتن گرادیان فشار ارائه شده است. برای حل از معادلات لایه مرزی آشفته با میانگین گیری رینولدز استفاده کردیم که لزجت توربولانسی (ν_t) نیز در معادلات ظاهر گردید. به کمک مدل توربولانسی طول اختلاط پرانتل (ν_t) را مدل نمودیم. با توجه به مقادیر تجربی طول اختلاط که توسط کیز و اندرسون[۲۰] , ارائه شده است. مشاهده می‌شود که l در نزدیکی دیواره متناسب با y (فاصله از دیواره) و پس از آن متناسب با $y^{\frac{1}{2}}$ می‌باشد.
با این انتخاب معادله دیفرانسیل بدست آمده از حل تشابهی را با روش رانک کوتا وشوتینگ حل نموده و در نهایت پروفیل‌های سرعت، تنش برشی دیواره و ضریب اصطکاک پوسته‌ای را محاسبه نمودیم.

۲- معادلات حاکم:

در این بخش معادلات لایه مرزی آشفته آورده می‌شود. برای لایه مرزی غیر قابل تراکم در طول یک صفحه تخت بدون در نظر گرفتن گرادیان فشار معادلات ناویر- استوکس متوسط گیری شده رینولدز در یک جریان آشفته به صورت زیر نوشته می‌شود.[۹, ۱۲, ۱۶]

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\dfrac{\partial \bar{v}}{\partial y}=0 & (1)\\[2mm] \bar{u}\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\bar{v}\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\nu\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y}-\overline{u'v'}\right)=0 & (2)\end{cases}$$

فرم تنش رینولدز را به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$-\overline{u'v'}=\nu_t(y)\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \qquad (3)$$

با جایگذاری معادلات (۳) در معادله (۲) می‌توان نوشت:

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}+\nu_t\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) \qquad (4)$$

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_t\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) \qquad (5)$$

که ترم تنش رینولدز ترم اضافی است که در معادلات لایه مرزی آرام ظاهر نمی‌شود.
لزجت توربولانسی را می‌توان بر حسب طول اختلاط پراندتل به صورت زیر بیان کرد[۹, ۱۶]

$$\nu_t=l^2\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \qquad (6)$$

تغییر متغیرهای زیر را برای حل تشابهی با توجه به تابع جریان به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases}\psi=U_\infty.g(x).f(\eta) & (7)\\[2mm] \eta=\dfrac{y}{g(x)} & (8)\end{cases}$$

که $g(x)$ تابعی از فقط متغیر x و $f(\eta)$ تابعی از فقط متغیر η می‌باشد.
با توجه به روابط (۷) و (۸) می‌توان روابط معادل زیر را برای ترمهای معادله (۵) بدست آورد:

$$\bar{u}=\frac{\partial\psi}{\partial y}=U_\infty . f'(\eta) \quad (۹)$$

$$\bar{v}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}=U_\infty . g'(x)\left[\eta f'(\eta)-f(\eta)\right] \quad (۱۰)$$

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}=-U_\infty\frac{g'(x)}{g(x)}.\eta f''(\eta) \quad (۱۱)$$

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}=\frac{U_\infty}{g(x)}.f''(\eta) \quad (۱۲)$$

$$\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}=\frac{U_\infty}{g^2(x)}.f'''(\eta) \quad (۱۳)$$

ترم آخر معادله (۵) با تغییر متغیرهای (۷) و (۸) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\nu_t\frac{\partial\bar{u}}{\partial y})=\frac{U_\infty^3}{g^3(x)}\frac{\partial}{\partial\eta}(l^2.f''^2(\eta)) \quad (۱۴)$$

با جایگذاری روابط (۹) الی (۱۴) در معادله (۵) می‌توان نوشت:

$$-U_\infty^2\frac{g'(x)}{g(x)}f f''=\nu\frac{U_\infty}{g(x)}f'''+\frac{U_\infty^3}{g^3(x)}\frac{\partial}{\partial\eta}(l^2 f''^2) \quad (۱۵)$$

همانطور که ذکر شد لایه مرزی به دو بخش داخلی و خارجی تقسیم می‌شود که هر یک از آنها مقیاس بندی خاص خود را دارد. مقیاس بندی لایه مرزی آشفته بدون گرادیان فشار تا کنون توسط دانشمندان زیادی ارائه شده است از جمله ون کارمن (۱۹۳۰) و میلیکال (۱۹۳۸و روتا (۱۹۵۰،کلوزر (۱۹۵۴) و کلوز (۱۹۵۶) . با توجه به منحنی تجربی طول اختلاط که توسط اندرسون و کیز [۲۰]ارائه شده است، به نظر می رسد رابطه ای به فرم زیر می تواند وجود داشته باشد:

$$\frac{l}{\delta}=a(\frac{y}{\delta})^n \quad (۱۶)$$

از این منحنی نتایج زیر را استخراج نمودیم:

$$l\propto\begin{cases} y & if \quad 0\le y\le 0/1\delta \\ y^{\frac{1}{2}} & if \quad 0/1\delta\le y\le\delta \end{cases} \quad (۱۷)$$

$$l=a\delta(\frac{y}{\delta})^n\Rightarrow l^2=a^2\delta^{2-2n}.y^{2n} \quad (۱۸)$$

با جایگذاری رابطه (۸) در (۱۸) داریم:

$$l^2=a^2\delta^{2-2n}.g^{2n}(x).\eta^{2n} \quad (۱۹)$$

با جایگذاری رابطه (۱۹) در معادله (۱۵) می‌توان نوشت:

$$f'''+\frac{U_\infty g(x).g'(x)}{\nu}f f'' +g^{2n-1}(x)\frac{U_\infty}{\nu}a^2\delta^{2-2n}\frac{\partial}{\partial\eta}(\eta^{2n}f''^2)=0 \quad (۲۰)$$

برای حل تشابهی می‌بایست ضرایب این معادله تابع x نبوده و ثابت باشند لذا قرار می‌دهیم:

$$\frac{U_\infty g(x).g'(x)}{\gamma}=1\Rightarrow g(x)=\sqrt{\frac{2\nu.x}{U_\infty}} \quad (۲۱)$$

اکنون میدان حل مطابق رابطه (۱۷) به دو قسمت تقسیم می‌شود:

الف) نزدیک دیواره ($n=1$)

$(l\propto y\Rightarrow l=\chi y)$

که $\chi=0/41$ و معادله (۲۰) برای $n=1$ بصورت زیر در می‌آید:

$$f'''+f f''+g(x)\frac{U_\infty}{\nu}\chi^2.\frac{\partial}{\partial\eta}(\eta^2 f''^2)=0 \quad (۲۲)$$

از طرفی طبق رابطه (۸) می‌توان نتیجه گرفت:

$$\eta_{99}=\frac{\delta}{g(x)} \quad (۲۳)$$

که η_{99} جائیست که در آنجا $f'=1$ یا به عبارتی: $f'(\eta_{99})=0/99$

با جایگذاری (۲۳) در (۲۲) و تعریف $\mathrm{Re}_\delta = \dfrac{U_\infty.\delta}{\nu}$ و ساده کردن معادله داریم:

$$f''' + f\,f'' + (\chi^{۲}.\mathrm{Re}_\delta/\eta_{۹۹})\frac{\partial}{\partial\eta}(\eta^{۲} f''^{۲}) = ۰ \qquad (۲۴)$$

$$f(۰)=۰,\; f'(۰)=۰$$

ب) کمی دورتر از دیواره $y \geq ۰/۱\delta$ ($n=\frac{۱}{۲}$) و معادله (۲۰) در این حالت خواهد شد:

$$f''' + f\,f'' + \frac{U_\infty\delta}{\nu}a^{۲}.\frac{\partial}{\partial\eta}(\eta f''^{۲}) = ۰ \qquad (۲۵)$$

که a از طریق فیت کردن کردن معادله بر منحنی طول اختلاط اندرسون و کیز ۰/۱۳ بدست آمد.
دو معادله (۲۴) و (۲۵) معادلات دیفرانسیل غیر خطی تشابهی برای لایه مرزی آشفته هستند توجه داریم که:

$$\mathrm{Re}_\delta = \frac{U_\infty.\delta}{\nu} = \frac{U_\infty\eta_{۹۹}.g(x)}{\nu} = \frac{U_\infty\eta_{۹۹}}{\nu}.\sqrt{\frac{۲\nu.x}{U_\infty}} = \eta_{۹۹}.\sqrt{۲\,\mathrm{Re}_x} \qquad (۲۶)$$

با توجه به رابطه (۲۶) مشخص می‌شود که ضرائب معادله دیفرانسیل غیر خطی تشابهی لایه مرزی آشفته با گرادیان فشار صفر(معادلات ۲۴ و ۲۵) بر حسب Re_x می باشد.

۲-۱- الگوریتم حل مسأله

همانطور که گفته شد معادله حاکم بر جریان بصورت زیر بوده که با استفاده از روش رانک کوتا وشوتینگ[۲۱, ۲۲] حل می‌شود:

$$f''' = \frac{-f\,f'' - ۲\chi^{۲}\sqrt{۲R_{ex}}\;\eta f''^{۲}}{۱+۲\chi^{۲}\sqrt{۲R_{ex}}\;\eta^{۲} f''} \qquad if \quad ۰ \leq \frac{y}{\delta} \leq ۰/۱ \qquad (۲۷)$$

$$f''' = \frac{-f\,f'' - a^{۲}\eta_{۹۹}\sqrt{۲R_{ex}}\;f''^{۲}}{۱+۲a^{۲}\eta_{۹۹}\sqrt{۲R_{ex}}\;\eta f''} \qquad if \quad ۰/۱ < \frac{y}{\delta} \leq ۱ \qquad (۲۸)$$

با شرایط $f'(\infty)=۱$ و $f(0)=f'(0)=0$.لازم به یادآوری است که η_{99} جائیست که در آنجا f' به سمت 1 میل می‌کند. $\chi = ۰/۴۱$ و با توجه به منحنی تجربی طول اختلاط آندرسون و کیز [۲۰] a=0/13 می باشد. با حل معادلات ۲۷ و ۲۸ با روش تکرار وشوتینگ به ازای هر عدد رینولدز $f''(۰)$ و $\eta_{۹۹}$ مربوط به آن بدست می آید.
بدست آوردن $f''(۰)$ این امکان را فراهم می‌کند که بتوان تنش برشی و یا ضریب اصطکاک را محاسبه نمود. با استفاده از رابطه (۱۲) و جایگزینی از رابطه (۲۱) برای $g(x)$:

$$\tau_{۰} = \mu\frac{\partial u}{\partial y} = \mu\frac{U_\infty}{g(x)}f''(۰) = \mu\frac{U_\infty}{\sqrt{\frac{۲\nu x}{U_\infty}}}f''(۰) = \sqrt{\frac{\rho\mu U_\infty^{۳}}{۲x}}f''(۰) \qquad (۲۹)$$

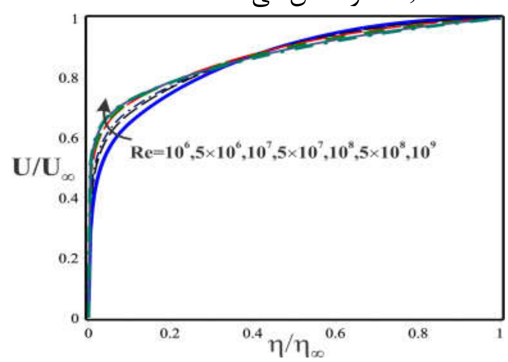
و

$$\frac{C_f}{۲} = \frac{\tau_{۰}}{\rho U_\infty^{۲}} = \frac{f''(۰)}{\sqrt{۲\,\mathrm{Re}_x}} \qquad (۳۰)$$

بنابراین به ازای یک عدد رینولدز دلخواه معادلات (۲۷) و (۲۸) با شرایط مرزی معلوم با استفاده از روش شوتینگ با حدس $f''(0)$، وروش تکرار و سعی و خطا برای یافتن η_{99} (بقسمی که $f'(\eta_{99})=0.99$) حل می‌شوند. واضح است که به ازای اعداد رینولدز مختلف $f''(0)$ و η_{99} های مختلف بدست می آید. به این ترتیب می‌توان η_{99} را بر حسب Re_x بدست آورد.

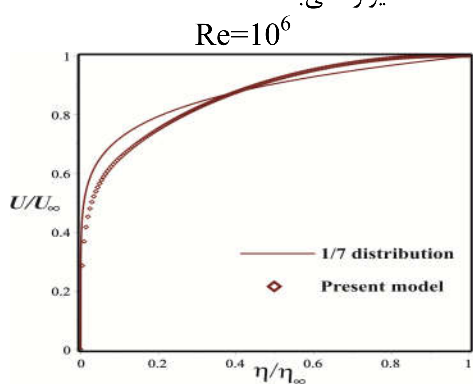
۳- نتایج:

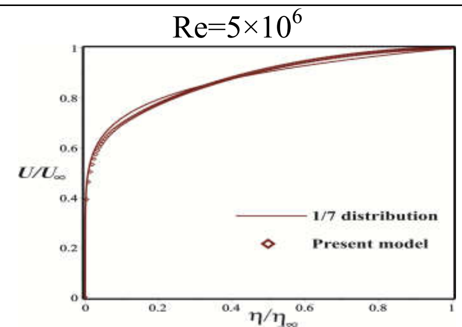
به ازای اعداد رینولدز مختلف مساله حل و نتایج لازم استخراج گردید. شکل (۱) پروفیل سرعت بی‌بعد شده $\frac{u}{U_\infty}$ بر حسب $\frac{\eta}{\eta_{۹۹}}=\frac{y}{\delta}$ به ازای رینولدزهای مختلف $۱۰^{۶}, ۵\times۱۰^{۶}, ۱۰^{۷}, ۵\times۱۰^{۷}, ۱۰^{۸}, ۵\times۱۰^{۸}, ۱۰^{۹}$ را نشان می‌دهد.

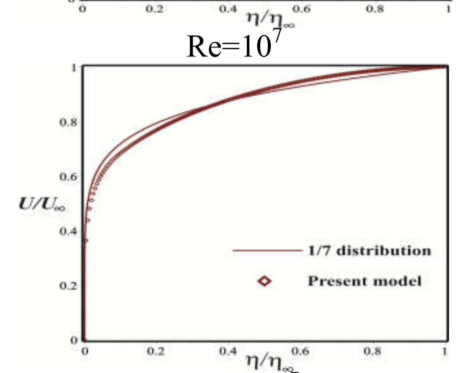


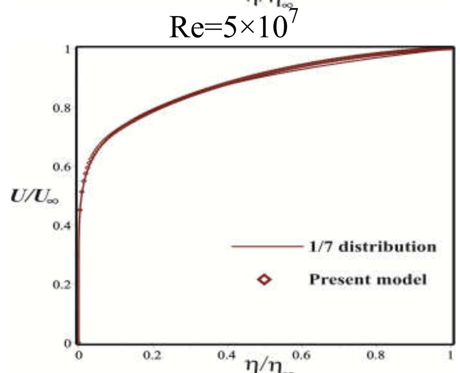
شکل ۱: پروفیل سرعت بی‌بعد شده در رینولدزهای مختلف

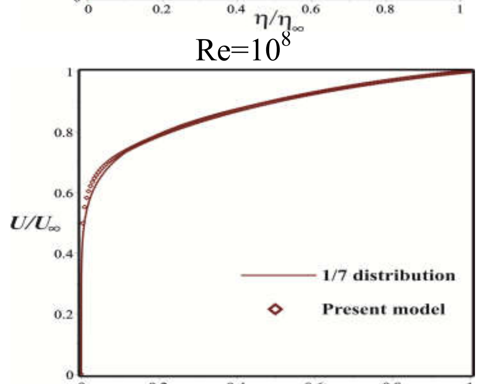
در شکل (۲) توزیع سرعت به ازای رینولدزهای مختلف $۱۰^{۶}, ۵\times۱۰^{۶}, ۱۰^{۷}, ۵\times۱۰^{۷}, ۱۰^{۸}, ۵\times۱۰^{۸}, ۱۰^{۹}$ را بر حسب $\frac{y}{\delta}$ و مقایسه آن با توزیع سرعت توان $\frac{۱}{۷}$ نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش عدد رینولدز سرعت در هر $\frac{y}{\delta}$ ثابت افزایش می‌یابد همچنین شیب سرعت روی دیواره نیز افزایش می‌یابد که این به معنی کاهش ضریب اصطکاک دیواره می‌باشد.

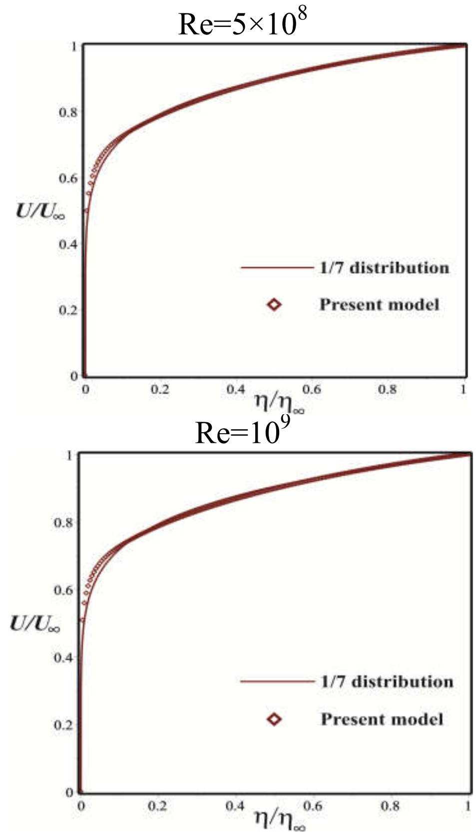












شکل ۲: توزیع سرعت به ازای رینولدزهای مختلف در داخل لایه مرزی درهم و مقایسه آن با توزیع سرعت توان $\frac{۱}{۷}$

مشاهده می شود با افزایش عدد رینولدز همپوشانی حل عددی با حل تجربی بیشتر می شود که این خود بیانگر این موضوع است که حل های شبه تشابهی در حل مسائل جریان سیال حتی در محدوده اعداد رینولدز بالا نیز از دقت بالایی برخوردار است.

همچنین طبق تعریف η_{99} داریم:

$$\eta_{۹۹} = \frac{\delta}{g(x)} = \frac{\delta}{\sqrt{\frac{۲\nu . x}{U_\infty}}} \rightarrow \frac{\delta}{x} = \eta_{۹۹}\sqrt{\frac{۲}{\mathrm{Re}_x}} \qquad (۳۱)$$

بنابراین با داشتن $\eta_{۹۹}$ که خود تابع عدد رینولدز است می‌توان $\frac{\delta}{x}$ را محاسبه نمود.

جدول ۱ مقادیر $f''(۰)$ و $\frac{C_f}{۲}$ محاسبه شده از رابطه (۳۰) را نشان می‌دهد:

جدول (۱) مقادیر $f''(۰)$ در اعداد رینولدز مختلف و $\frac{C_f}{۲}$ مربوطه.

$\frac{C_f}{۲}$	$f''(0)$	Re_x
$۲/۰۵\times۱۰^{-۳}$	۲/۹۰۳	$۱۰^{۶}$
$۱/۳۵۹\times۱۰^{-۳}$	۶/۷۹۵	$۱/۲۵\times۱۰^{۷}$
$۹/۹۴۶۶\times۱۰^{-۴}$	۱۴/۹۲	$۱/۱۲۵\times۱۰^{۸}$
$۷/۴۴\times۱۰^{-۴}$	۳۵/۲۹	$۱/۱۲۵\times۱۰^{۹}$
$۶/۲۶۹\times۱۰^{-۴}$	۶۲/۶۹	۵×۱۰^{۹}
$۴/۹۲۳\times۱۰^{-۴}$	۱۵۵/۷	۵×۱۰^{۱۰}
$۳/۹۴۲\times۱۰^{-۴}$	۳۹۴/۲	۵×۱۰^{۱۱}
$۳/۶۸\times۱۰^{-۴}$	۵۵۲/۲	$۱/۱۲۵\times۱۰^{۱۲}$
$۲/۸۲۴\times۱۰^{-۴}$	۱۴۰۱/۲	$۱/۲۵\times۱۰^{۱۳}$

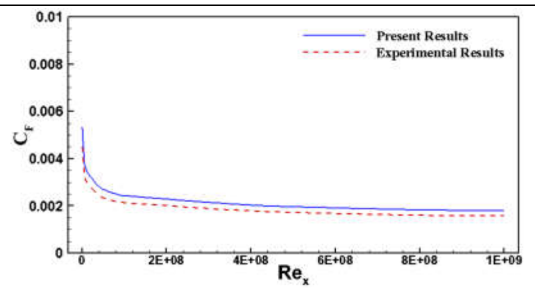
یکی از معتبرترین روابط تجربی ضریب اصطکاک رابطه زیر است: [۲۵]

$$\frac{C_f}{۲} = \frac{۰/۴۵۵}{[\ln(۰/۰۶\,\mathrm{Re}_x)]^{۲}} \qquad (۳۲)$$

در شکل (۳)، مقایسه نتایج بدست آمده از مدل و رابطه فوق را نشان می‌دهد که تطابق بسیار خوبی برقرار است.

هم‌چنین با استفاده از جدول (۱) می‌توان رابطه‌ای خطی بین $\log(\mathrm{Re})$ و $\log(\frac{C_f}{۲})$ بدست آورده و رابطه بین آنها را بیان نمود:

$$\frac{C_f}{۲} = \frac{۰/۰۰۹۳۹۷}{\mathrm{Re}_x^{۰/۱۱۸۱}} \qquad (۳۳)$$



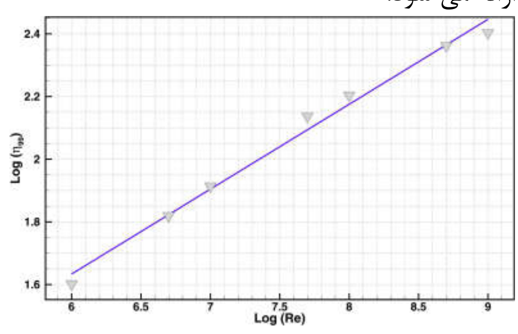
شکل ۳: مقایسه نتایج بدست آمده از مدل با فرمول تجربی

شکل (۴) رابطه $\log(\eta_{۹۹})$ را بر حسب $\log(\mathrm{Re})$ نشان می‌دهد که با استفاده از Curve fitting رابطه‌ای برای $\eta_{۹۹}$ بدست می‌آید که با قرار دادن آن در رابطه (۳۱) رابطه زیر بدست می‌آید:

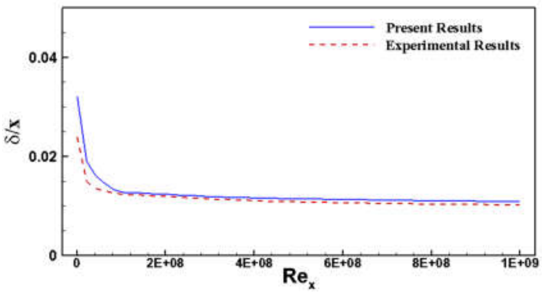
$$\frac{\delta}{x} = \frac{۰/۱۳}{\mathrm{Re}_x^{۰/۸۲}} \qquad (۳۴)$$

این معادله در شکل (۵) رسم شده است. دیده می‌شود که در طیف گسترده‌ای از اعداد رینولدز δ متناسب با $x^{۰/۹۱}$ است.

روابط ۳۳ و ۳۴ بعنوان روابط پیشنهادی این مقاله ارائه می شود.



شکل ۴: رابطه بین $\eta_{۹۹}$ بر حسب عدد رینولدز به منظور محاسبه ضخامت لایه مرزی



شکل ۵: تغییرات $\frac{\delta}{x}$ بر حسب عدد رینولدز

۴- نتیجه‌گیری:

اگرچه معادله دیفرانسیل بدست آمده $f(\eta)$، معمولی است امّا دارای ضریب غیر ثابت Re_x می‌باشد که این مساله ما را از داشتن یک رابطه عمومی (مانند رابطه بلازیوس در جریان آرام بر روی صفحه تخت که مستقل از عدد رینولدز است) محروم می‌نماید[۲۳]. امّا در عوض روش حل برای بدست آوردن توزیع سرعت بمراتب ساده‌تر و آسان‌تر از حل معادلات اصلی حرکت (پیوستگی و مومنتم) خواهد بود.

عدد رینولدز بعنوان یک پارامتر در معادلات ظاهر شده و این موضوع در شکل (۲) کاملاً مشخص است.

اگر بپذیریم که طول اختلاط پرانتل که بصورت تجربی توسط اندرسون و کیز [۲۰] بدست آمده برای طیف وسیعی از اعداد رینولدز معتبر است می‌توان به نتایج بدست آمده از مدل تا حد بسیار بالایی اعتماد کرد. اگر چه این اعتماد را می‌توان از طریق مقایسه نتایج تجربی ضریب اصطکاک و مدل (شکل(۳)) تا حد زیادی بدست آورد.

توزیع سرعت توان $\frac{۱}{۷}$ فقط در محدوده‌ای از اعداد رینولدز $۱۰^{۶} < \mathrm{Re} < ۱۰^{۹}$ با نتایج ما سازگاری دارد و در اعداد رینولدز بالا انحراف پروفیل‌های سرعت از پروفیل سرعت توان $\frac{۱}{۷}$ افزوده می‌شود. این نتیجه‌ی جدیدی نیست زیرا ضریب اصطکاک بدست آمده از طریق توزیع توان $\frac{۱}{۷}$ در رینولدزهای بالا با نتایج تجربی [۱۶, ۲۴] مغایرت پیدا می‌کند.

خوشبختانه مشاهده شد که در این مدل، هیچ‌گونه محدودیتی در عدد رینولدز وجود ندارد بعبارت دیگر برای کلیه اعداد رینولدز بزرگ‌تر از رینولدز بحرانی مدل بخوبی پاسخ می‌دهد.

یکی از نتایج شاخص این مدل استخراج ضریب اصطکاک پوسته‌ای بصورت تابعی از عدد رینولدز است که در معادله (۳۳) بیان گردید که صحت این رابطه از مقایسه آن با نتایج تجربی در شکل(۳) و (۴) بخوبی مشهود است. علاوه بر آن یک رابطه مشابه برای ضخامت لایه مرزی طبق فرمول (۳۴) بدست آمد.

از آنجا که حل تشابهی به معنای عدم وابستگی به x است، این روش نیاز به اطلاعات بالادست جریان یا بعبارت دیگر جریان آرام ابتدای صفحه ندارد. و هم‌چنین این حل تشابهی نیاز به اطلاعات پایین‌دست جریان نیز ندارد. و فقط تابعی از عدد رینولدز محلی است که حل، در آن مقطع انجام می‌گیرد. و این یکی از برجستگی‌های مهم این روش می‌باشد.

ضمیمه:

تغییر متغیرهای زیر را برای حل تشابهی با توجه به تابع جریان به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\psi = U_{\infty}.g(x).f(\eta) \tag{۱۰}$$

$$\eta = \frac{y}{g(x)} \tag{۱۱}$$

$$\frac{\bar{T} - T_{\infty}}{T_W - T_{\infty}} = \theta(\eta) \tag{۱۲}$$

که $g(x)$ تابعی از فقط متغیر x و $f(\eta)$ و $\theta(\eta)$ تابعی از فقط متغیر η می‌باشد. همچنین، ψ تابع جریان می‌باشد.

$$\bar{u} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = U_{\infty}.f'(\eta) \tag{۱۳}$$

$$\bar{v} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = U_{\infty}.g'(x)\left[\eta f'(\eta) - f(\eta)\right] \tag{۱۴}$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = -U_{\infty}\frac{g'(x)}{g(x)}.\eta f''(\eta) \tag{۱۵}$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{U_{\infty}}{g(x)}.f''(\eta) \tag{۱۶}$$

$$\frac{\partial^{۲} \bar{u}}{\partial y^{۲}} = \frac{U_{\infty}}{g^{۲}(x)}.f'''(\eta) \tag{۱۷}$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \frac{T_w - T_{\infty}}{g(x)}\theta'(\eta) \tag{۱۸}$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = -\frac{T_w - T_{\infty}}{g(x)}g'(x)\eta\,\theta'(\eta) \tag{۱۹}$$

$$\frac{\partial^{۲} T}{\partial y^{۲}} = \frac{T_w - T_{\infty}}{g^{۲}(x)}\theta'(\eta) \tag{۲۰}$$

همچنین، ترم آخر معادله (۷) با تغییر متغیرهای (۱۰)، (۱۱) و (۱۲) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) = \frac{U_{\infty}^2}{g^3(x)}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(l^2 f''^2(\eta)\right) \tag{۲۱}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_t \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(l^{۲}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\frac{\partial \bar{T}}{\partial y}\right) \tag{۲۲}$$

در نتیجه، با جایگذاری روابط (۱۳) الی (۲۰) در معادلات (۷) و (۸) می‌توان نوشت:

$$-U_{\infty}^2 \frac{g'(x)}{g(x)} f f'' = \nu \frac{U_{\infty}}{g(x)} f''' + \frac{U_{\infty}^2}{g^3(x)}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(l^2 f''^2\right) \tag{۲۳}$$

$$-\left[U_{\infty}\frac{g'(x)}{g(x)}(T_W - T_{\infty})\right] f\theta' = \frac{\nu}{pr}\frac{T_W - T_{\infty}}{g^{۲}(x)}\theta'' + \left[\frac{۱}{pr_t}\frac{V_{\infty}}{g^{۳}(x)}(T_W - T_{\infty})\right]\frac{\partial}{\partial \eta}\left(l^{۲} f''\theta'\right) \tag{۲۴}$$

طرفین معادله (۱۶) را در $\frac{۱}{\upsilon}.\frac{g^{۲}(x)}{U_{\infty}}$ و طرفین معادله (۱۷) را در $\frac{g^{۲}}{T_W - T_{\infty}}.\frac{\Pr}{\upsilon}$ ضرب کرده، داریم:

$$f''' + \frac{U_{\infty}}{\nu} g'(x) g(x) f f'' + \frac{U_{\infty}}{\nu g(x)}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(l^{۲} f''^{۲}(\eta)\right) = ۰ \tag{۲۵}$$

$$\theta'' + \frac{pr}{\nu} U_{\infty} g g' f.\theta' + \frac{pr}{pr_t}\frac{U_{\infty}}{\upsilon g(x)}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(l^{۲} f''\theta'\right) = ۰ \tag{۲۶}$$

همانطور که ذکر شد لایه مرزی به دو بخش داخلی و خارجی تقسیم می‌شود که هر یک از آنها مقیاس‌بندی خاص خود را دارد.

$$\frac{l}{\delta} = a\left(\frac{y}{\delta}\right)^n \tag{۲۷}$$

که در آن δ ضخامت لایه مرزی می‌باشد و a یک پارامتر ثابت می‌باشد. با مقایسه معادله (۲۷) نتیجه می‌گیریم که:

$$l \propto \begin{cases} y & if \quad 0 \le y \le 0.1\,\delta \\ y^{\frac{1}{2}} & if \quad 0.1\delta \le y \le \delta \end{cases} \tag{۲۸}$$

در نتیجه معادله (۲۷) به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$l = a\delta(\frac{y}{\delta})^n \Rightarrow l^2 = a^2\delta^{2-2n}.y^{2n} \qquad (۲۹)$$

با جایگذاری رابطه (۱۱) در (۲۹) داریم:

$$l^2 = a^2\delta^{2-2n}.g^{2n}(x).\eta^{2n} \qquad (۳۰)$$

حال با جایگذاری رابطه (۳۰) در معادلات (۲۳) و (۲۴) می‌توان نوشت:

$$f''' + \frac{U_\infty g(x).g'(x)}{\nu} f\, f'' + g^{2n-1}(x)\frac{U_\infty}{\nu} a^2\delta^{2-2n}\frac{\partial}{\partial\eta}(\eta^{2n} f \qquad (۳۱)$$

$$\theta'' + \frac{pr}{\nu}U_\infty gg' f.\theta' + \frac{pr}{pr_t}.a^2\delta^{2-2n}.g^{2n-1}(x)\frac{U_\infty}{\upsilon}\frac{\partial}{\partial\eta}(\eta^{2n} f' \qquad (۳۲)$$

الف) ناحیه نزدیک دیواره $(y \le 0/1\delta)$ که در آنجا $n = 1$:

$$f''' + \frac{U_\infty}{\nu}.g(x).g'(x) f\, f'' + g(x)\frac{U_\infty}{\nu}\chi^2.\frac{\partial}{\partial\eta}(\eta^2 f''^2) = 0 \qquad (۳۳)$$

$$\theta'' + \frac{pr}{\nu}gg'U_\infty f\theta' + \frac{pr}{pr_t}\frac{U_\infty}{\nu}\kappa^2 g\frac{\partial}{\partial\eta}(\eta^2 f''\theta') = 0 \qquad (۳۴)$$

ب) ناحیه دورتر از دیواره $(y > 0/1\delta)$ که در آنجا $n = \frac{1}{2}$

$$f''' + f\, f'' + \frac{U_\infty\delta}{\nu}a^2.\frac{\partial}{\partial\eta}(\eta f''^2) = 0 \qquad (۳۵)$$

$$\theta'' + prf\theta' + \frac{pr}{pr_t}\frac{U_\infty}{\upsilon}a^2\delta\frac{\partial}{\partial\eta}(\eta f''\theta') = 0 \qquad (۳۶)$$

در نهایت:

$$\begin{cases} f''' = \dfrac{-f f'' - 2\chi^2\sqrt{2R_{ex}}\ \eta f'''^2}{1 + 2\chi^2\sqrt{2R_{ex}}\ \eta^2 f''} \\ f(0) = 0,\ f'(0) = 0 \\ \theta' = \dfrac{-pr.f\theta - \kappa^2\dfrac{pr}{pr_t}B(2\eta f''\theta + \eta^2 f'''\theta)}{1 + \dfrac{pr}{pr_t}.B\kappa^2.\eta^2 f''} & if \quad 0 \le \dfrac{y}{\delta} \le 0.1 \\ \theta(0) = 1 \end{cases} \qquad (۳۷)$$

$$\begin{cases} f''' = \dfrac{-f f'' - a^2\eta_{99}\sqrt{2R_{ex}}\ f'''^2}{1 + 2a^2\eta_{99}\sqrt{2R_{ex}}\ \eta f''} \\ f'(\eta_{99}) = 1 \\ \theta' = \dfrac{-prf\theta - \dfrac{pr}{pr_t}a^2\mathrm{Re}_\delta(f''\theta + \eta f''\theta)}{1 + \dfrac{pr}{pr_t}a^2\mathrm{Re}_\delta.\eta f''} & if \quad 0.1 < \dfrac{y}{\delta} \le \\ \theta(\eta_{99}) = 0 \end{cases} \qquad (۳۸)$$

فهرست مراجع

[1] Ganji, D.D., M.J. Hosseini, and J. Shayegh, *Some nonlinear heat transfer equations solved by three approximate methods.* International Communications in Heat and Mass Transfer, 2007. 34(8): p. 1003-1016.

[2] Ganji, D.D. and A. Rajabi, *Assessment of homotopy– perturbation and perturbation methods in heat radiation equations.* International Communications in Heat and Mass Transfer, 2006. 33(3): p. 391-400.

[3] Sheikholeslami, M., M. Gorji-Bandpay, and D.D. Ganji, Magnetic field effects on natural convection around a horizontal circular cylinder inside a square enclosure filled with nanofluid. International Communications in Heat and Mass Transfer, 2012. 39(7): p. 978-986.

[4] Soleimani, S., et al., *Local RBF-DQ method for two-dimensional transient heat conduction problems.* International Communications in Heat and Mass Transfer, 2010. 37(9): p. 1411-1418.

[5] Soleimani, S., et al., *Natural convection heat transfer in a nanofluid filled semi-annulus enclosure.* International Communications in Heat and Mass Transfer, 2012. 39(4): p. 565-574.

[6] Wolfshtein, M., *the Self-similar Turbulent Boundary Layer with Injection.* Annual Conference on Aeronautics and Astronautics, 2004.

[7] Wolfshtein, M., *The self-similar turbulent boundary layer with injection.* Proceedings on CHT2008, Marrakech, Morocco.

[8] Wolfshtein, M., *Some comments on turbulence modelling.* International Journal of Heat and Mass Transfer, 2009. 52(17–18): p. 4103-4107.

[9] White, F.M., *Viscous Fluid Flow*1991: McGrow-Hill.

[10] Townsend, A.A., *The structure of turbulent shear flow*1956: Cambridge university press.

[11] T. Cebeci, An inverse boundary layer method for compressible laminar and turbulent boundary layers J. Aircraft, 1976. 13: p. 709-717.

[12] Henkes, R.A.W.M., Scaling of the turbulent boundary layer along a flat plate according to different turbulence models. International Journal of Heat and Fluid Flow, 1998. 19: p. 338-347.

[13] s Coles, D., *The* law *of the wake in the turbulent boundary layer.* J. Fluid Mech., 1956. 1: p. 191-226.

[14] Clauser, F.H., Turbulent Boundary Layers in Adverse Pressure Gradients. Aero. Sci., 1954. 21: p. 91-108.

[15] Mellor, G.L., Gibson, D. M., *Equilibrium Turbulent Boundary Layers.* Fluid Mech, 1966. 24: p. 225-253.

[16] Schlichting, H., *Boundary Layer Theory*, ed. 7th1979, NY :McGraw-Hill.

[17] Kondjoyan, A., F. Péneau, and H.-C. Boisson, Development of flat-plate thermal and velocity boundary layers

under highly turbulent and instable air flows: Reynolds numbers ranging from 8400 to 127 000. International Journal of Thermal Sciences, 2004. 43(11): p. 1091-1100.

[18] Kondjoyan, A., F. Péneau, and H.-C. Boisson, Effect of high free stream turbulence on heat transfer between plates and air flows: A review of existing experimental results. International Journal of Thermal Sciences, 2002. 41(1): p. 1-16.

[19] Stuart W. Churchill, t., *The Conceptual analysis of turbulent flow and convection.* chemical Engineering and Processing, 1999. 38: p. 427-439.

[20] Anderson, P.S., W. M. Keys and R. J. Moffat:, J. Fluid Mech, 1975. 69: p. 353-375.

[21] Chun, M.-H. and S.-J. Park, *Effects of turbulence model and interfacial shear on heat transfer in turbulent falling liquid films.* International Communications in Heat and Mass Transfer, 1995. 22(1): p. 1-12.

[22] Makinde, O.D. and O.O. Onyejekwe , A numerical study of MHD generalized Couette flow and heat transfer with variable viscosity and electrical conductivity. Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 2011. 323(22): p. 2757-2763.

[23] H. Blasius, *Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung.* Z. Math. Phys.,, 1908. 56: p. 37-42.

[24] Holman, J.P., *Heat Transfer* ed. J. 13. Vol. 2. 2009: Mcgraw-Hill

[25] M.H. Khademi, A. Zeinolabedini Hezave, D. Mowla, M. Taheri, A Simple Model for Turbulent Boundary Layer Momentum Transfer on a Flat Plate, Chemical Engineering & Technology, 33 (2010) 867-877.