دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال پنجم، شماره بیستم، مهر و آبان ۱۳۹۸
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

میدان‌های برداری متقارب روی فضاهای فینسلری

سیدمحمد زمان‌زاده[۱]، بهزاد نجفی[*۲]، مگردیچ تومانیان[۱]

[۱] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد کرج، کرج، ایران
[۲] گروه ریاضی محض، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۷/۲۳ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۱/۱۸

چکیده

در این مقاله ما ثابت می‌کنیم که یک متر بروالد ایزوتروپیک غیر ریمانی یا یک (α,β) – متر غیر ریمانی میدان برداری متقارب نمی‌دهد. ما همچنین ثابت می‌کنیم که یک متر فینسلر L – کاهش یافته پذیرنده یک میدان برداری برداری متقارب به متر لاندزبرگ تبدیل می‌شود.

واژه‌های کلیدی: انحنای بروالد ایزو تروپیک، متر لاندزبرگ، میدان‌های برداری متقارب.

* عهده‌دار مکاتبات: Email: behzad.najafi@aut.ac.ir

۱- مقدمه

مطالعه میدان های برداری هندسی نقش مهمی در هندسه دیفرانسیل دارد. در [1]، یانو[1] مفهوم میدان‌های بردار متقارب بر روی یک منیفلد آفین (M,∇). سپس بری‌کل[2] و یانو این نوع از میدان‌های برداری هندسی را در هندسه ریمانی با توجه به التصاق لوی – چویتا[3]، ∇ مطالعه کردند [2]. فرض کنید (M,g) یک منیفلد ریمانی است. در این‌صورت میدان برداری X متقارب است اگر و فقط اگر X یک میدان برداری گرادیانی و متجانس با ضریب تجانس ۲ باشد که در آن تابع پتانسیل مجذور طول X است. هندسه فینسلر یک تعمیم طبیعی هندسه ریمانی است. میدان‌های برداری متقارب در چارچوب فینسلرین به‌طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفته‌اند (به‌عنوان مثال، [۳]، [۴]، [۵] را ببینید). فرض کنید «;» و «.» بترتیب مشتقات کواریانت افقی و عمودی التصاق کارتان $C\Gamma=(F^i_{jk},N^i_k,C^i_{jk})$ منیفلد فینسلر (M,F) را نشان می‌دهند. فرض کنیم که $X^i(x)$ یک میدان برداری در (M,F) است.

در [۶]، ماتسوموتو[4]و ایگوچی[5] این میدان را میدان برداری متقارب نامیدند، اگر در روابط زیر صدق کند:

$$X^i_{;j}=\delta^i_j, \tag{۱}$$

$$X^i_{.j}=0. \tag{۲}$$

همچنین می‌توان بطور معادل از مشتق کواریانت وابسته به التصاق بروالد برای تعریف میدان‌های برداری متقارب استفاده کرد [۷]. هرگاه ∇ التصاق کارتان متر فینسلر F باشد که روی کلاف قائم VTM در نظرگرفته شده باشد، آنگاه بطور معادل میدان برداری X متقارب است اگر و فقط اگر

$$\forall Y\in\chi(TM_\circ) \qquad \nabla_{h(Y)}X=Y,\quad \nabla_{v(Y)}X=0.$$

که در آن h,v به ترتیب تصویر روی زیرکلاف قائم و افقی نسبت به تجزیه $TTM_0=VTM\oplus HTM$ است.

فرض کنید که V یک فضای برداری و (x^i) چارت استاندارد روی V باشد. فرض کنید F یک نرم مینکوفسکی روی V است. سپس، میدان بردار شعاعی $X=x^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ یک میدان بردار متقارب روی (V,F) است. مترهای لاندزبرگ و مترهای بروالد ایزوتروپیک دو طبقه مهم از مترهای فینسلری را تشکیل می‌دهند. به‌تازگی، طیبی و برزگری مترهای لاندزبرگ تعمیم‌یافته و مترهای بروالد تعمیم‌یافته با (α,β)- مترها را بررسی کرده اند[۸، ۹].

کلاس (α,β)- مترها یک کلاس غنی از مترهای فینسلر است (برای جزئیات بیشتر، به [۱۰، ۱۱] مراجعه کنید). طبیعی است که مسئله پذیرنده یک میدان بردار متقارب بر روی این کلاس‌های متر فینسلر را مطالعه کنیم. دقیق‌تر، ما ثابت می‌کنیم که مترهای بروالد ایزوتروپیک غیر ریمانی یا (α,β)- مترغیر ریمانی، هیچ میدان برداری متقارب را قبول نمی‌کند (قضیه‌های ۴.۳ و ۶.۳) و همچنین ثابت می‌کنیم که متر فینسلر L- کاهش یافته پذیرنده یک میدان بردای متقارب به متر لاندزبرگ کاهش می‌یابد (قضیه ۱.۳).

۲- مباحث اولیه

فرض کنید که M یک منیفلد C^∞، n - بعدی باشد. فضای مماس در $x\in M$ را با T_xM و کلاف مماس M را با $TM=\cup_{x\in M}T_xM$ نشان می‌دهیم. یک متر فینسلر روی M تابع $F:TM\to[0,\infty)$ است که دارای خواص زیر است:

۱. F روی $TM_0:=TM\setminus\{0\}$، C^∞ است.

۲. F روی تارهای کلاف مماس TM، همگن از درجه مثبت یک است.

۳. برای هر $y\in T_xM$ فرم مربعی $\mathbf{g}_y$ زیر روی T_xMمثبت معین است.

$$\mathbf{g}_y(u,v):=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\Big[F^2(y+su+tv)\Big]|_{s,t=0},\quad u,v\in T_xM.$$

1. K. Yano
2. F. Brickell
3. Levi-Civita
4. M. Matsumoto
5. K. Eguchi

فرض کنید که $x \in M$ و $F_x := F|_{T_xM}$ و برای اندازه‌گیری ویژگی غیر اقلیدسی F_x، $C_y : T_xM \otimes T_xM \otimes T_xM \to \mathbb{R}$ که

$$\mathbf{C}_y(u,v,w) := \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\mathbf{g}_{y+tw}(u,v)\right]|_{t=0}, \quad u,v,w \in T_xM.$$

را تعریف می‌کنیم. خانواده $\mathbf{C} := \{\mathbf{C}_y\}_{y\in TM_0}$ تاب کارتان نامیده می‌شود. به خوبی شناخته شده است که $\mathbf{C}=0$ اگر و فقط اگر F ریمانی باشد. برای $y \in T_xM_0$ تاب کارتان میانگین $\mathbf{I}_y$ را بصورت $\mathbf{I}_y(u) := I_i(y)u^i$ که $I_i := g^{jk}C_{ijk}$ تعریف می‌کنیم. برای تعریف معکوس چرخان با استفاده از جایی که با استفاده از قضیه دیکه[1]، F ریمانی است اگر و فقط اگر $\mathbf{I}_y = 0$.

فضایی لاندزبرگی است هرگاه $L_{ijk}=0$ که انحنای لاندزبرگی با $L_{ijk}=C_{ijk;s}y^s$ مشخص می‌شود. همچنین فضای n- بعدی فینسلر L - کاهش یافته است هرگاه انحنای لاندزبرگ L_{ijk} بصورت زیر نوشته شود:

$$L_{ijk} = \frac{1}{n+1}\{h_{ij}J_k + h_{jk}J_i + h_{ki}J_j\}, \qquad (۳)$$

که $J_i = L^r_{ir} = I_{i;0}$.

منحنی‌های زئودزیک یک متر فینسلر $F=F(x,y)$ روی منیفلد هموار M، توسط سیستم معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم $\frac{d^2x^i}{dt^2} + 2G^i\left(x,\frac{dx}{dt}\right)=0$ مشخص می‌شود که توابع موضعی $G^i = G^i(x,y)$ ضریب اسپری نامیده می‌شوند و $G^i = \frac{1}{4}g^{il}\{[F^2]_{x^ky^l}y^k - [F^2]_{x^l}\}$ در مختصات موضعی استاندارد (x^i,y^i) در TM، میدان برداری $G = y^i\frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i(x,y)\frac{\partial}{\partial y^i}$ اسپری F نامیده می‌شود [۱۲].

برای $y \in T_xM_0$ تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{B}_y : T_xM \otimes T_xM \otimes T_xM \to T_xM$$

$$\mathbf{B}_y(u,v,w) := B^i{}_{jkl}u^jv^kw^l\frac{\partial}{\partial x^i}|_x$$

و

$$E_y : T_xM \otimes T_xM \to \mathbb{R}$$

که

$$B^i{}_{jkl} := \frac{\partial^3 G^i}{\partial y^j \partial y^k \partial y^l}, \quad E_{jk} := \frac{1}{2}B^m{}_{jkm}.$$

$\mathbf{B}$ و $\mathbf{E}$ را به ترتیب انحنای بروالد و انحنای بروالد میانگین می‌نامند. F متر بروالد یا متر بروالد ضعیف نامیده می‌شود اگر $\mathbf{B}=0$ یا $\mathbf{E}=0$ [۱۳]. در منیفلد بروالد ثابت شده است که انتقال موازی در طول هر زئودزی عملگرهای مینکوفسکی را حفظ می‌کند.

فرض کنید $X^i(x)$ یک میدان برداری متقارب بر روی منیفلد فینسلر باشد، از اتحادهای ریچی[2]، شرایط زیر را به دست آورده‌ایم:

$$X^hR_{hijk} = 0, \qquad (۴)$$

$$X^hP_{hijk} - C_{ijk} = 0, \qquad (۵)$$

$$X^hS_{hijk} = 0. \qquad (۶)$$

چون P_{hijk} در h و i نامتقارن هستند از (۵) داریم

$$X^iC_{ijk} = 0. \qquad (۷)$$

واضح است که

$$P_{hijk} = C_{ijk;h} - C_{hjk;i} + C_{hjr}C^r_{ik;0} - C_{ijr}C^r_{hk;0}. \qquad (۸)$$

از (۲) می‌توان دید

$$X^hC_{hjk;i} = -C_{ijk}. \qquad (۹)$$

از (۸) و (۹) در (۵)

$$X^hC_{ijk;h} = 0. \qquad (۱۰)$$

فرض کنید $X_i(x)$ مشخص کننده مولفه‌های کوواریانت

1. Diecke

2. Ricci

X^i باشند. ۱- فرم β را به‌صورت $\beta := X_i y^i$ تعریف می‌کنیم. قرار دهید $m_i := X_i - \beta \frac{y_i}{F^2}$.
به آسانی دیده می‌شود که روابط زیر برقرار هستند:

$$h_{ij} X^j = m_i \neq 0,$$

$$h_{ij} X^i X^j = m^2 \neq 0, \qquad (۱۱)$$

که $m^2 = g_{ij} m^i m^j$ و $m^i = g^{ij} m_j$.

$$P_{hijk} = C_{ijk;h} - C_{hjk;i} + C_{hjr} C^r_{ik;0} - C_{ijr} C^r_{hk;0}. \qquad (۱۲)$$

۳- پذیرش میدان‌برداری متقارب

اولاً، ما یک قضیه کوچک روی فضاهای فینسلری L- کاهش یافته که میدان برداری متقارب می‌پذیرد را ثابت می‌کنیم.
با انقباض (۳) با $X^i X^j$ و استفاده از (۲) بدست می‌آوریم $X^i X^j h_{ij} J_k = 0.$
با استفاده از (۱۲) بدست می‌آوریم $J_k = 0$. از این رو، می‌توانیم قضیه زیر را بیان کنیم.

قضیه ۱.۳. فضای فینسلر n- بعدی L- کاهش یافته (M, F) که یک میدان برداری متقارب می‌پذیرد فضای لاندزبرگ است.
ما می دانیم که

$$B^i_{jkl} = g^{si} \{C_{sjl|k} + C_{skl|j} - C_{jkl|s} + L_{sjk,l}\}, \qquad (۱۳)$$

$$E_{kl} = \frac{1}{2} g^{ij} \{C_{ijl|k} + L_{ijk,l}\}, \qquad (۱۴)$$

جایی که | و ، نشان دهنده مشتق کواریانت افقی و عمودی التصاق بروالد هستند (برای جزئیات بیشتر ر. ک. [۱۳]). در [۱۳] ثابت شده است که برای یک (۱،۱) — تانسور فینسلری T^i_j، ما رابطه‌های زیر رابین التصاق‌های کارتان و بروالد داریم

$$T^i_{j|k} = T^i_{j;k} - T^r_j L^i_{rk} + T^i_r L^r_{jk}, \qquad (۱۵)$$

$$T^i_{j,k} = T^i_{j.k} - T^r_j C^i_{rk} + T^i_r C^r_{jk}. \qquad (۱۶)$$

با استفاده از (۱۵) و (۱۶) می‌توان (۱۳) را به‌صورت زیر بازنویسی کرد

$$\begin{aligned} B^i_{jkl} = g^{im} \{ & C_{mjl;k} + C_{mkl;j} - C_{jkl;m} + L_{mjk.l} - 2C_{msl} L^s_{jk} \\ & - C_{mjs} L^s_{lk} - C_{mks} L^s_{lj} + C_{jks} L^s_{lm} \\ & + L_{sjk} C^s_{ml} + L_{msk} C^s_{jl} + L_{mjs} C^s_{kl} \}. \end{aligned} \qquad (۱۷)$$

با انقباض (۱۴) با $X^j X^k X^l$ و استفاده از (۲)، (۷) و (۱۰) داریم:

$$X^j X^k X^l B^i_{jkl} = 0. \qquad (۱۸)$$

تعریف ۲.۳. منیفلد فینسلری (M, F) انحنای بروالد ایزوتروپیک نامیده می‌شود اگر

$$B^i_{jkl} = c(x) \{F_{jk} \delta^i_l + F_{jl} \delta^i_k + F_{kl} \delta^i_j + F_{jkl} y^i\}, \qquad (۱۹)$$

برای بعضی از توابع اسکالر $c(x)$ روی M که $F_{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^i \partial y^j}$ و $F_{ijk} = \frac{\partial F_{ij}}{\partial y^k}$ به آسانی ثابت می‌شود که (۱۹) هم ارز رابطه زیر است

$$\begin{aligned} B^i_{jkl} = & \frac{c(x)}{F^3} \{2F^2 C_{jkl} - (h_{jk} g_{lm} + h_{kl} g_{jm} + h_{lj} g_{km}) y^m\} y^i \\ & + \frac{c(x)}{F} \{h_{jk} \delta^i_l + h_{jl} \delta^i_k + h_{kl} \delta^i_j\} \end{aligned} \qquad (۲۰)$$

با انقباض (۲۰) با $X^j X^k X^l$ داریم $c(x) m^2 m^i = 0$ که نتیجه می‌دهد $c = 0$. بنابراین داریم

گزاره ۳.۳. فرض کنید که F یک مترفینسلر از انحنای بروالد ایزو تروپیک باشد و میدان برداری متقارب می‌پذیرد. آنگاه F متربروالد است.
مشخص است که متر فینسلر F، متر بروالد است اگر و فقط اگر

$$C_{ijk|s} = 0. \qquad (۲۱)$$

حال فرض کنید که X میدان برداری متقارب روی متریک بروالد F است. آنگاه از (۷) مشتق کواریانت افقی بگیرید با استفاده از (۱) و (۲۱) داریم $C_{ijk} = 0$. بنابراین F ریمانی است.

قضیه ۴.۳. فرض کنید F متر فینسلر از انحنای بروالد ایزوتروپیک باشد و میدان برداری متقارب می‌پذیرد. آنگاه

F متر ریمانی است.

فرض کنید Θ متر فانک روی کره واحد اقلیدسی باشد که بصورت زیر تعریف شده است:

$$\Theta(x,y)=\frac{<x,y>+\sqrt{|y|^2-(|x|^2|y|^2-<x,y>^2)}}{2(1-|x|^2)},\quad y\in T\_xB^n(1)\cong R^n \qquad (۲۲)$$

مشخص است که Θ متر بروالد ایزوتروپیک غیر ریمانی با $c=\frac{1}{2}$ است. بنابراین Θ میدان برداری متقارب نمی‌پذیرد. مترفانک یک مثال ویژه از مترهای راندرز است. متر فینسلر F متر راندرز نامیده می‌شود اگر $F=\alpha+\beta$، که α یک متر ریمانی و β یک ۱-فرم است .به آسانی می‌توان دید که مترهای راندرزی C- کاهش یافته هستند یعنی تانسور کارتان آنها بصورت زیر است:

$$C_{ijk}=\frac{1}{n+1}\{h_{ij}I_k+h_{jk}I_i+h_{ki}I_i\}. \qquad (۲۳)$$

فرض کنید که X یک میدان برداری متقارب روی متر راندرز $F=\alpha+\beta$ باشد. با انقباض (۲۳) با X^iX^j و استفاده از (۱۲) داریم $I_k=0$. یعنی F ریمانی است. بنابراین داریم:

قضیه ۵.۳. فرض کنید F یک متر راندرز باشد و یک میدان برداری متقارب می‌پذیرد. آنگاه F یک متر ریمانی است.

مترهای راندرزی مثال خاصی از (α,β)- متر هستند. متر فینسلر F یک (α,β)- متر نامیده می‌شود هر گاه $F=\alpha\phi(s)$ که α یک متر ریمانی و β یک ۱-فرم و $s=\frac{\beta}{\alpha}$ و ϕ یک تابع هموار مثبت با شرایط منظم ویژه‌ای هستند. واضح است که (α,β)- مترها شبه C - کاهش یافته هستند یعنی تانسور کارتان آنها بصورت زیر است:

$$C_{ijk}=\frac{p}{n+1}\{h_{ij}I_k+h_{jk}I_i+h_{ki}I_i\}+\frac{q}{C^2}I_iI_jI_k, \qquad (۲۴)$$

p و q توابع هموار روی فضای مماس هستند و $C^2=g^{ij}I_iI_j$. فرض کنید که X یک میدان برداری متقارب روی (α,β)- متر $F=\alpha\phi(s)$ باشد. با انقباض (۲۴) با X^iX^j و استفاده از (۱۲) داریم $I_k=0$. یعنی F ریمانی است. بنابراین داریم:

قضیه ۶.۳. فرض کنید F یک (α,β)- متر غیر ریمانی باشد آنگاه F میدان برداری متقارب نمی‌پذیرد.

با استفاده از (۱۵) و (۱۶) می‌توان (۱۴) را بصورت زیر بازنویسی کرد

$$E_{kl}=\frac{1}{2}g^{ij}\{C_{ijl;k}+L_{ijk.l}-C_{ijm}L^m_{lk}+L_{ijm}C^m_{kl}\}. \qquad (۲۵)$$

با انقباض (۲۵) با X^kX^l و استفاده از (۲) و (۱۰) داریم:

$$X^kX^lE_{kl}=0. \qquad (۲۶)$$

فرض کنید که F انحنای بروالد میانگین ایزوتروپیک دارد یعنی

$$E_{kl}=\frac{n+1}{2}c(x)F^{-1}h_{kl}, \qquad (۲۷)$$

که $c(x)$ تابع اسکالر روی M است. با انقباض (۲۷) با X^kX^l و استفاده از (۱۲) و (۲۶) داریم $c=0$.

قضیه ۷.۳. یک فضای n- بعدی فینسلر (M,F) با انحنای بروالد میانگین ایزوترو پیک که میدان برداری متقارب می‌پذیرد یک متر بروالد میانگین است.

فهرست منابع

[1] K. Yano, Sur le parallélisme et la concourance dans l'espace de Riemann, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 19, (1943), 189-197.

[2] F. Brickell and K. Yano, Concurrent vector fields and Minkowski structures, Kodai Math. SEM. REP, 26 (1974), 22-28.

[3] O. Constantinescu, Myller configurations in Finsler spaces. Applications to the study of subspaces and of torse forming vector fields, J. Korean Math. Soc., (45), Vol. 5, (2008), 1443-1482.

[4] S. C. Rastogi and A. K. Dwivedi, On the existence of concurrent vector fields in a Finsler space, Tensor (N.S.) 65 (2004), no.1, 48-54.

[5] U. P. Singh, On concurrent vector fields in Finsler spaces, Univ. Nac. Tucumán Rev. Ser. A28 (1978), no.1-2, 141-146.

[6] M. Matsumoto and K. Eguchi, Finsler spaces admiting a concurrent vector field, Tensor (N.S.) 28 (1974), no.1, 239-249.

[7] K. C. Sarangi and A. Goswami, On concurrent vector fields in special Finsler spaces, Journal of International Academy of Physical Sciences, 7 (2003), 83-89.

[8] A. Tayebi, On the class of generalized Landsberg manifolds, Periodica Math Hungarica, 72(2016), 29–36.

[9] A. Tayebi and M. Barzegari, Generalized Berwald spaces with (α,β)-metrics, Indagationes Mathematicae, 27 (2016), 670-683.

[10] A. Tayebi and H. Sadeghi, Generalized P-reducible (α,β)-metrics with vanishing S-curvature, Ann. Polon. Math. 114(1) (2015), 67-79.

[11] A. Tayebi and H. Sadeghi, On generalized Douglas-Weyl (α,β)-metrics, Acta Mathematica Sinica, English Series, 31(10) (2015), 1611-1620.

[12] M. Kitayama, Finsler spaces admiting a parallel vector field, Balkan Journal of Geoemtry and its Applications, Vol. 3, (1998), 29-36.

[13] Z. Shen, Differential Geometry of Sprays and Finsler Spaces, Kluwer Academic Publisher, The Netherlands, (2001).