دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال پنجم، شماره بیستم، مهر و آبان ۱۳۹۸
شماره شاپا: ۵۸۸X-۲۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دسته‌بندی گروه‌های ساده متناهی که سیلو ۳- زیر گروه‌های آنها از مرتبه ۹ هستند

محمدرضا سالاریان *

گروه ریاضی، دانشگاه خوارزمی، تهران/کرج، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۶/۰۶/۱۸ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۴/۰۴

چکیده

در این مقاله بدون استفاده از قضیه دسته‌بندی گروه‌های ساده متناهی قصد داریم ساختار گروه‌های ساده متناهی که سیلو ۳- زیرگروه‌های آنها از مرتبه ۹ هستند را مشخص کنیم. بطور دقیق‌تر گروه‌های ساده متناهی را دسته‌بندی می‌کنیم که سیلو ۳- زیرگروه‌های آنها آبلی مقدماتی باشند.

واژه‌های کلیدی: گروه‌های متناهی، گروه‌های ساده متناهی.

---

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: salarian@khu.ac.ir , salar2x@yahoo.com

این پروژه توسط صندوق حمایت از پژوهشگران حمایت مالی شده است.

۱– مقدمه

بعد از حدود بیش از یک قرن کار تحقیقاتی مستمر توسط بسیاری از ریاضیدانان، در دهه هشتاد میلادی گرنشتاین بهمراه عده معدودی از ریاضیدانان خبر از اتمام برهان قضیه دسته‌بندی گروهای ساده متناهی دادند. البته بررسی برهان و راستی آزمایی آن در آن زمان با توجه به حجم حدود ۱۵۰۰۰ صفحه‌ای کارهای تحقیقاتی انجام شده و با توجه به اینکه بسیاری از کارهای تحقیقاتی که انجام شده بود بصورت دست نوشته بودند و منتشر نشده بوند، برای همه امکان پذیر نبود. به همین منظور گرنشتاین[۱] بهمراه سالامون[۲] و لیون[۳] خبر از پروژه‌ای دادند که هدف آن ارائه یک برهان جامع و منسجم برای قضیه دسته‌بندی گروه‌های ساده متناهی بود. در همین راستا تاکنون شش کتاب منتشر شده است و پروژه همچنان در حال انجام است. این پروژه تحت عنوان نسل دوم دسته‌بندی گروه‌های ساده متناهی شناخته می‌شود.
در سال ۲۰۰۱ و در کنفرانس درهام[۴] مایافرانکلفد[۵] به همراه اشتقوت[۶] و اشتلماخر[۷] خبر ازشروع یک کار پژوهشی دادن که هدف آن استفاده از تکنیک‌های بروز نظریه گروه‌ها مانند روش آمالگام‌ها برای ارائه یک برهان بسیار راحت‌تر، بهتر و ساده‌تر برای دسته‌بندی گروه‌های ساده متناهی بود. این پروژه در میان ریاضیدانان بعنوان نسل سوم دسته‌بندی شناخته شده است.
در نسل سوم دسته بندی گروه‌ها و در آخرین مرحله از برهان نیاز به تعیین ساختار یک گروه ساده متناهی هست وقتی که ساختار برخی از زیرگروه‌های آن مشخص هستند. در این مقاله و در راستای نسل سوم دسته‌بندی گروه‌های ساده متناهی، گروه‌های ساده‌ای را بررسی می‌کنیم که ۳–سیلو زیرگروه‌های آنها از مرتبه ۹ هستد و ساختار نرمال ساز یک سیلو ۳–زیرگروه آنها مشخص است. بطور دقیق‌تر در این مقاله همواره G یک گروه ساده متناهی و M یک سیلو ۳–زیرگروه آن و از مرتبه ۹ است. نمادگذاری‌های زیر که در نظریه گروه‌ها استاندارد هستند را در ادامه لازم داریم. برای هرعضو g از گروه G و هر زیر مجموعه غیرتهی B از G تعریف کنید

$$C_G(g) = \{\, x \in G\,;\ \ xg = gx\}$$

$$N_G(B) = \Big\{x \in G\,;\ \ x^{-1}bx \in B,\ \ b \in B \text{ برای هر }\Big\}.$$

به $C_G(g)$ مرکزساز g در G گوییم و به $N_G(B)$ نرمال‌ساز B در G گوییم.
با مفروضات و نمادهایی که معرفی کردیم در این مقاله مساله زیر را بررسی می‌کنیم.

سوال ۱. اگر $C_G(g) \leq N_G(M)$ برای هر عضو مرتبه سه g از M و بعلاوه $M = C_G(M)$، آیا می‌توان ساختار گروه G را مشخص کرد؟

سوال ۱ اولین بار توسط هیگمن[۸] در مرجع [1] بررسی شد و نتایج بسیار خوبی به دست آمد. بطور دقیق‌تر با مفروضات سوال۱ هیگمن در مرجع [1] حالاتی که M دوری باشد یا M دوری نباشد ولی یک سیلو ۲–زیرگروه $N_G(M)$ دوری باشد یا یکریخت با گروه چهارتایی کلاین باشد را کاملاً بررسی نمود و ساختار گروه ساده G را در همه حالات کاملاً مشخص نمود. روش هیگمن برای تعیین ساختار G استفاده از نظریه مشخصه و بطور دقیق‌تر روشی معروف به روش سوزوکی برای کنترل مرتبه یک گروه با استفاده از جدول مشخصه یک زیرگروه آن است.
حال فرض کنید M دوری نباشد و S یک سیلو ۲– زیرگروه $N_G(M)$ باشد. با قضیه نرمال‌ساز–مرکزساز داریم $N_G(M)/_M$ یکریخت با یک زیرگروه از $GL_2(3)$ است. چون M یک سیلو ۳–زیرگروه G است لذا $N_G(M)/_M$ یکریخت با یک زیرگروه از SD_{16} است. حال با نتایج هیگمن در مرجع [1] اگر S دوری یا یکریخت با گروه چهارتایی کلاین باشد آنگاه ساختار G

1. Gorenstein
2. Solomon
3. Lyon
4. Durham
5. Meierfrankenfeld
6. Stroth
7. Stellmacher

8. Higman

کاملاً مشخص است. لذا تنها در حالاتی که S یکریخت با SD_{16}، Q_8 یا D_8 باشد ساختار باید ساختار G را بررسی کنیم. در مرجع [2] ما ساختار G را در حالتی که S یکریخت با SD_{16} باشد بررسی کرده‌ایم و قضیه زیر را ثابت نموده‌ایم.

قضیه ۲. فرض کنید S یکریخت با SD_{16} باشد در این صورت گروه ساده G یکریخت با گروه ماتیو M_{11} است.

ما در این مقاله قصد داریم حالتی را بررسی کنیم که S یکریخت با D_8 باشد. بطور مشخص در این مقاله قضیه زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیه ۳. اگر $S \cong D_8$ آنگاه G نمی‌تواند یک گروه ساده باشد.

با توجه به قضایای فوق فقط حالتی که S یکریخت با Q_8 باشد باقی می‌ماند. بنابر آنچه ما از پروفسور پارکر[1] از دانشگاه بیرمنگهام شنیده‌ایم، این حالت توسط شخصی بنام اینگلند[2] انجام شده است. ولی نه پروفسور پارکر و نه ما نتوانستیم مقاله‌ای یا مطلبی در این زمینه پیدا کنیم. بنابراین این حالت را بعنوان مساله تحقیقاتی باز مطرح می‌کنیم.

مساله ۴. اگر S یکریخت با Q_8 باشد. در مورد ساختار گروه G چه می‌توان گفت؟

حدسی که می‌توان در مورد مساله فوق مطرح کرد این است که چنین گروه ساده‌ای وجود ندارد. و برای حل مساله فوق باید از تکنیک نظریه مشخصه‌ها استفاده نمود.

روش ما برای اثبات قضیه۳ کنترل ساختار سیلو ۲–زیرگروه G است. هدف ما این است تا نشان دهیم S یک سیلو ۲–زیرگروه G است یا یک سیلو ۲–زیرگروه G یکریخت با SD_{16} است. استراتژی ما برای برهان قضیه۳ شبیه استراتژی ما در برهان قضیه ۲ است.

1. Parker
2. England

۲- برهان قضیه اصلی

در این فصل قصد داریم قضیه ۳ را ثابت کنیم، بنابراین نمادها و فرضیات فصل قبل را حفظ می‌کنیم. یعنی G یک گروه ساده و M یک ۳– سیلو زیرگروه آن از مرتبه ۹ است. بعلاوه فرض کنید M آبلی مقدماتی است، $M = C_G(M)$ و $C_G(g) \leq N_G(M)$ برای هر عضو مرتبه سه g از M. با توجه به اینکه برهانی که ما برای قضیه ۳ بیان می‌کنیم شباهت زیادی به برهان قضیه ۲ در مرجع [2] دارد لذا سعی می‌کنیم برهان را مختصرتر بیان کنیم و خواننده می‌توانند برای توضیحات بیشتر به مرجع [2] مراجعه کند. در ابتدا لم زیر را داریم.

لم ۵. در $N_G(M)$ گزاره‌های زیر برقرار هستند.

i) همه عناصر مرتبه ۳ در M در $N_G(M)$ با هم مزدوجند.

ii) برای هر عضو مرتبه ۲ مانند x در $S\backslash Z(S)$ داریم:
$$C_{N_G(M)}(x) \cong 2 \times S_3$$

iii) S دارای ۳ کلاس مزدوجی از عناصر مرتبه دو هست.

برهان. لم فوق به راحتی از ساختار $N_G(M)$ نتیجه می‌شود. Δ

لم بعد نتیجه مستقیم از قضیه عمل متباین[3] و لم ۵ است. قضیه عمل مبتابین را می‌تونید در مرجع [3] ببینید.

لم ۶. هیچ زیرگروهی که ۳ مرتبه‌اش را نشمارد و M–پایا باشد در G وجود ندارد .

فرض کنید $x \in S\backslash Z(S)$ یک عضو مرتبه دو باشد. در این صورت با قضیه اصلی در مرجع [4]، $C_G(x)$ دارای یک زیرگروه نرمال و پوچتوان N است به طوریکه C/N با یکی از گروه‌های Z_3, S_3, A_5 یا $L_2(7)$ یکریخت است. بعلاوه در حالتی که $C/N \cong L_2(7)$ داریم $N =< x >$ و در حالتی که $C/N \cong A_5$ داریم $N/< x >$ یک ۲–گروه آبلی مقدماتی است. ما این نمادهای N و x را در ادامه حفظ می‌کنیم. قرار دهید $C_G(x) = C$ و $Y = O_2(C)$. واضح است که

3. Coprime Action Theorem

C/N با Z_3 یکریخت نیست. در لم زیر نشان می‌دهیم که C/N با $L_2(7)$ نیز یکریخت نیست.

لم ۷. اگر A_5 یا $\frac{C}{N} \cong L_2(7)$ آنگاه $Y \neq < x >$.

برهان. فرض کنید A_5 یا $\frac{C}{N} \cong L_2(7)$ و $Y =< x >$. با مرجع [5] داریم
$C \cong SL_2(5), SL_2(7)$ یا $2 \times L_2(7)$ یا $2 \times A_5$.

چون یک سیلو ۲-زیرگروه G نمی‌تواند یکریخت با گروه چهارگان‌ها باشد بنابراین C یکریخت با $SL_2(5)$ یا $SL_2(7)$ نیست. حال فرض کنید $2 \times A_5$ یا $C \cong 2 \times L_2(7)$. در این صورت ساختار گروه G کاملاً در مرجع [5] مشخص شده است و می‌توان دید که هیچ کدام از این گروه‌ها زیرگروهی یکریخت با $N_G(M)$ ندارند. Δ
با لم فوق نتیجه می‌شود که C/N با یکی از گروه‌های A_5 یا S_3 یکریخت است. حال لم زیر را می‌آوریم که به راحتی از قضیه معروف عمل متباین نتیجه می‌شود.

لم ۸. فرض کنید B مجموعه همه اعضای مرتبه ۲ در $S\backslash Z(S)$ باشد. در این صورت داریم
$1 =\cap_{y\in B}\, O_2\big(C_G(y)\big)$.

برهان. فرض کنید $w \in\cap_{y\in B}\, O_2\big(C_G(y)\big)$ یک عضو مرتبه ۲ باشد. قرار دهید
$K = \{\, w^y;\ y \in M\}$.

در این صورت K یک۲-زیرگروه M-پایای G است که با لم ۶ در تناقض است. Δ
قراردهید $< z >= Z(S)$ و $W = O_2(C_G(xz))$.
در قضیه بعد ثابت می‌کنیم که C/N یکریخت با A_5 نیست.

قضیه۹. داریم:
i) $C_Y(S) = 1$.
ii) اگر C/N باA_5 یکریخت باشد داریم $1 \neq Y \cap W$.
ii) C/N باA_5 یکریخت نیست.

برهان. برهان این قضیه دقیقاً مشابه برهان لم ۳،۴ و قضیه ۳،۵ در مرجع [2] است. بطور خلاصه فرض کنیدC/N با A_5 یکریخت باشد. در این صورت به راحتی می‌توان دید Y آبلی نیست و یک عضو مرتبه ۲ مانند y در $Y \cap W$ وجود دارد که $y \in C_Y(S)$.اما این با i) در تناقض است. اکنون قضیه ثابت شده است. Δ
در قضیه بعد ثابت می‌کنیم یا S یک سیلو ۲-زیرگروه G است یا یک سیلو ۲-زیرگروه G یکریخت با SD_{16} است.

قضیه ۱۰. فرض کنید $C/N \cong S_3$. در این صورت یا S یک سیلو ۲-زیرگروه G است یا یک سیلو ۲-زیرگروه G یکریخت با SD_{16} است.

برهان. فرض کنید $C/N \cong S_3$ و T یک سیلو ۲-زیرگروه C باشد. در این‌صورت داریم $Z(T) =< x >$. این نتیجه می‌دهد که T یک سیلو ۲-زیرگروه G است و لذا شامل یک زیرگروه یکریخت با S است. حال چون $C_G(S) = Z(S)$ نتیجه می‌شود که $T = S$ یا T یکریخت با SD_{16} است و حکم ثابت است. Δ
اکنون می‌توانیم **قضیه ۳** که قضیه اصلی این مقاله هست را ثابت کنیم.

برهان قضیه ۳. با قضیه ۹ و لم ۷ داریم $C/N \cong S_3$ و با قضیه ۱۰ یا S یک سیلو ۲-زیرگروه G است یا یک سیلو ۲-زیرگروه G یکریخت با SD_{16} است. حال با مطالب مرجع [7] ساختار گروه G کاملاً مشخص است و به راحتی می‌توان دید که هیچ کدام از این گروه‌ها در شرایط قضیه ۳ صدق نمی‌کنند و قضیه ۳ ثابت شده است. Δ

فهرست منابع

[1] .G. Higman; Odd haracterizations of finite simple groups; Lecture notes, University of Michigan, 1968.

[2]. M. R. Salarian; A 3-local characterization for M_{11}; Comm. Algebra. No. 43, pp 1-5, 2015.

[3] D. Gorenstein; Finite groups, 1980.

[4]. W. Feit and J. G. Thompson; Finite groups which contain a self-centralizing subgroup of order 3; Nagoya Math. J. 21,185-197, 1962.

[5]. K. Harada; On finite groups having self-centralizing 2-subgroups of small order; J. Algebra. Volume 33, Issue 1, Pages 144-160, 1975.

[6] Schur, I. Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare substitutionen. *J. Reine Angew. Math.* 132:85–137 1907.

[7]. J. L. Alprin, R. Brauer and D. Gorensein; Finite groups with quasi-dihedra and wreathed Sylow 2-subgroups; Trans. AMS. Volume, 151, 1-261, 1970.