دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال نهم، شماره چهل و سوم، مرداد و شهریور ۱۴۰۲
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

یک توپولوژی جدید روی فضای M – متری

مهدی اسدی[۱*]، فرشید خجسته[۲]

(۱) گروه ریاضی، واحد زنجان، دانشگاه آزاد اسلامی، زنجان، ایران
(۲) گروه ریاضی، واحد اراک، دانشگاه آزاد اسلامی، اراک، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۱۰/۲۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۹/۱۴

چکیده

در این مقاله، تعریف جدیدی برای فضای M - متری ارائه می‌کنیم. با ارائه توپولوژی این فضا، ضمن بررسی برخی از خواص آن، نشان می‌دهیم حد یک دنباله لزوما یکتا نیست. در ادامه با تعریف توپولوژی جدید بیان می‌کنیم که ضعیفتر از توپولوژی تعریف شده قبلی است.

واژه‌های کلیدی: فضای M -متری، m -متر، متر جزئی.

* عهده‌دار مکاتبات: Email: masadi@iauz.ac.ir ; me.asadi@iau.ac.ir

۱- مقدمه

در سال ۱۹۹۴ ماتیو در مقاله [۱] نماد فضای متری جزئی را معرفی کرد و قضیه انقباضی نقطه ثابت باناخ را ثابت کرد. بعد از آن بسیاری از ریاضی‌دانان دنیا فضایای نقطه ثابت با ساختارهای مختلف معروف را برای متر جزئی ثابت کردند. در این راستا در این مقاله سعی داریم تعریف جدیدی برای فضای M - متری معرفی کنیم (که در سال ۲۰۱۴ توسط اسدی و همکارانش در [۲] آورده شده) که گسترش یافته متر جزئی بوده و مثالی بیان می‌کنیم که لزوما این فضای جدید هاسدورف نیست.

تعریف ۱.۱ متر جزئی روی X تابع $p: X\times X\to {}^{+}$ است به‌طوری‌که $x,y,z\in X$:

$$1.\ p(x,x)=p(y,y)=p(x,y)\Leftrightarrow x=y$$
$$2.\ p(x,x)\le p(x,y).$$
$$3.\ p(x,y)=p(y,x)$$
$$4.\ p(x,y)\le p(x,z)+p(z,y)\quad p(z,z).$$

(X,p) را فضای p -متری می‌نامند.

نمادهای زیر در ادامه مقاله ضروری است:

$$m_{xy}:=\min\{m(x,x),m(y,y)\},$$
$$M_{xy}:=\max\{m(x,x),m(y,y)\},$$
$$۰\le M_{xy}\quad m_{xy}=|m(x,x)\quad m(y,y)|$$

اکنون ویراست جدید یک فضای M - متری را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

تعریف ۱.۲ فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد. تابع $m: X\times X\to {}^{+}$ یک m -متر نامیده می‌شود هرگاه

$$1.\ m(x,x)=m(y,y)=m(x,y)\Leftrightarrow x=y$$
$$2.\ m(x,y)=m(y,x)$$
$$3.\ \big(m(x,y)\quad m_{xy}\big)\le \big(m(x,z)\quad m_{xz}\big)+\big(m(z,y)\quad m_{zy}\big).$$

در این‌صورت (X,m) را فضای M- متری می‌نامند.

توجه داریم که شرط $m_{xy}\le m(x,y)$ در [۲] از شرط $(m3)$ با فرض $x=y$ و $z:=y$ بدست می آید. کافیست فقط توجه کنیم که

$$M_{x,x}=m_{x,x}=m(x,x).$$

مثال ۱.۳ فرض کنید $X:=[0,\infty)$ و

$$m(x,y):=x+y$$

در این‌صورت m یک m -متر روی X است.

مثالهایی وجود دارند که m -متر هستند اما p متر نیستند.

مثال ۱.۴ فرض کنید $X=\{۱,۲,۳\}$ و قرار دهید:

$$m(1,1)=1$$
$$m(2,2)=9$$
$$m(3,3)=5$$
$$m(1,2)=m(2,1)=10$$
$$m(1,3)=m(3,1)=7$$
$$(3,2)=m(2,3)=7.$$

m-متری که p -متر نیست.

مثال ۱.۵ فرض کنید m یک m -متر باشد در این‌صورت

$$D(x,y)=m(x,y)\quad m_{x,y}$$

یک متر معمولی نیست. کافیست فرض کنیم $X:=\{۱,۲\}$ و

$$m(1,2)=m(2,1)=m(1,1)=1$$
$$m(2,2)=2$$

در این‌صورت

$$D(1,2)=m(1,2)\quad m_{1,2}$$
$$=1\quad 1=0$$

اما ۲ $\neq$ ۱.

مثال ۱.۶ فرض کنید (X,d) یک فضای متری و $\phi:[0,\infty)\to[\phi(0),\infty)$ یک نگاشتی صعودی یا اکیدا صعودی یک به یک باشد به‌طوری‌که $\phi(0)\geq 0$ و

$$\phi(x+y)\leq\phi(x)+\phi(y)\quad \phi(0),$$
$$\forall x,y\geq 0.$$

در این‌صورت $m(x,y)=\phi(d(x,y))$ یک m-متر است.

مثال ۱.۷ برای فضای متری (X,d) با فرض $\mathrm{a},\mathrm{b}>0$ دراین‌صورت

$$m(x,y)=ad(x,y)+b$$

یک m -متر است چرا که کافیست بنا به مثال قبل فرض کنیم

$$\phi(t)=at+b.$$

مثال ۱.۸ فرض کنید m یک m -متر یاشد در این‌صورت $\mathrm{m^w}$ متر معمولی است:

$$m^w(x,y)=m(x,y)\quad 2m_{xy}+M_{xy},$$

تبصره ۱.۹ برای هر $\mathrm{x},\mathrm{y}\in\mathrm{X}$ داریم:

1. $m(x,y)\quad M_{xy}\leq m^w(x,y)\leq m(x,y)+M_{xy},$
2. $(m(x,y)\quad M_{xy})\leq m^s(x,y)\leq m(x,y).$

به عبارتی

$$|m^w(x,y)\quad m(x,y)|\leq M_{xy},$$
$$|m^s(x,y)\quad m(x,y)|\leq M_{xy}$$

که در آن:

$$m^s(x,y)=m(x,y)\quad m_{xy}.$$

لم ۱.۱۰ ([۲]) هر p یک m -متر هست.

۲. توپولوژی فضای M - متری

نشان می‌دهیم که هر m-متر m روی X یک T_0 برای توپولوژی τ_m را تولید می‌کند. مجموعه

$$\{B_m(x,\varepsilon):x\in X,\varepsilon>0\},$$

که در آن

$$B_m(x,\varepsilon)=\{y\in X: m(x,y)<m_{x,y}+\varepsilon\}.$$

برای نشان دادن توپولوژی τ_m که یک T_0 هست، برای $x\neq y$ اگر فرض کنید $\varepsilon:=m(x,y)\quad m_{x,y}$ آنگاه $y\not\in B_m(x,\varepsilon)$.

برای تشکیل یک پایه به τ_m فرض کنید برای همه $x\in X$ و $\varepsilon>0$

$$y\in B_m(x,\varepsilon)\Rightarrow m(x,y)<m_{x,y}+\varepsilon$$

ادعا می‌کنیم

$$\exists\delta>0\quad B_m(y,\delta)\subseteq B_m(x,\varepsilon).$$

فرض کنید

$$\delta:=m_{x,y}\quad m(x,y)+\varepsilon.$$
$$z\in B_m(y,\delta)\Rightarrow m(y,z)\quad m_{y,z}<\delta$$
$$m(y,z)\quad m_{y,z}<m_{x,y}\quad m(x,y)+\varepsilon$$

$$m(z,x)\quad m_{z,x}\leq m(y,z)\quad m_{y,z}+m(x,y)\quad m_{x,y}<\varepsilon$$

در نتیجه

$$z \in B_m(x,\varepsilon).$$

تعریف ۲.۱ فرض کنید (X,m) یک فضای M - متری باشد:
دنباله $\{x_n\}$ در فضای (X,m) همگرا به $x \in X$ اگر و تنها اگر

$$\lim_{n\to\infty}(m(x_n,x) \quad m_{x_n,x}) = 0.$$

لم ۲.۲ (**[۲]**) فرض کنید در فضای M -متری (X,m)
$x_n \to x$. در این‌صورت برای همه $y \in X$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty}(m(x_n,y) \quad m_{x_n,y}) = m(x,y) \quad m_{x,y}.$$

لم ۲.۳ (**[۲]**) فرض کنید $x_n \to x$ و $x_n \to y$ در فضای (X,m). در این‌صورت

$$m(x,y) = m_{xy}.$$

بعلاوه اگر $m(x,x) = m(y,y)$, آن‌گاه

$$x = y\ .$$

۳. نتایج اصلی

قضیه ۳.۱ توپولوژی τ_m هاسدورف نیست.
اثبات. فرض کنید $m(x,y) := x + y$ به‌طوری‌که $\alpha,\beta,\gamma \in R$

$$a := m(\alpha,\alpha) < m(\gamma,\gamma) = \frac{a+b}{2} < b = m(\beta,\beta)$$

یا

$$\frac{b}{2} < \frac{k}{2} < m(\alpha,\beta) < M_{\alpha,\beta} = b,$$
$$r := 2m(\alpha,\beta) \quad a \quad b > 0$$

و هم‌چنین

$$\max\{m(\alpha,\gamma), m(\gamma,\beta)\} \leq (2m(\alpha,\beta) \quad k)\frac{\varepsilon}{r}, .$$

بدون خلل به کلیت فرض می‌کنیم که $\varepsilon > 0$ طوری باشد که $\varepsilon < r$. اکنون نشان می‌دهیم اشتراک دو همسایه زیر ناتهی است:

$$U_\alpha = \{z \in X : m(\alpha,z) \quad m_{\alpha z} < \varepsilon\},$$
$$V_\beta = \{z \in X : m(\beta,z) \quad m_{\beta z} < \varepsilon\}.$$

برای اثبات $\gamma \in U_\alpha$ داریم:

$$m(\alpha,\gamma) < (2m(\alpha,\beta) \quad k)\frac{\varepsilon}{r}$$
$$m(\alpha,\gamma) \quad m_{\alpha\gamma} < (2m(\alpha,\beta) \quad k)\frac{\varepsilon}{r} \quad a < \left(۲m(\alpha,\beta) \quad k \quad a\right)\frac{\varepsilon}{r} < \left(۲m(\alpha,\beta) \quad a \quad b\right)\frac{\varepsilon}{r} = \varepsilon$$

$$m(\beta,\gamma) < (2m(\alpha,\beta) \quad k)\frac{\varepsilon}{r}$$
$$m(\alpha,\gamma) \quad m_{\beta\gamma} < (2m(\alpha,\beta) \quad k)\frac{\varepsilon}{r} \quad \frac{a+b}{2} < \left(۲m(\alpha,\beta) \quad k\right)\frac{\varepsilon}{r} \quad \frac{a+b}{2}\frac{\varepsilon}{r} < \left(۲m(\alpha,\beta) \quad k \quad \frac{a+b}{2}\right)\frac{\varepsilon}{r} < \left(۲m(\alpha,\beta) \quad a \quad b\right)\frac{\varepsilon}{r} = \varepsilon,$$

بدین ترتیب برای $\alpha,\beta \in X$ همسایگی U_α از α و V_β از β داشتیم: $U_\alpha \cap V_\beta \neq$.

مثال ۳.۲ فرض کنید $X = \{۱,۲,۳\}$ و قرار دهید:

$$m(1,1) = m(1,3) = m(3,1) = 1$$
$$m(1,2) = m(2,1) = 1,$$
$$m(2,2) = 3,$$
$$m(3,2) = m(3,2) = m(3,3) = 2$$

m -متری که p -متر نیست. فرض کنید

$$x_n := 1, \quad x = 1,3$$

نشان می‌دهیم در فضای M-متری $x_n \to 1$ و همین‌طور $x_n \to 3$.

$$\lim_{n\to\infty} (m(x_n,1) \quad m_{x_n,1}) = 0.$$
$$\lim_{n\to\infty} (m(x_n,3) \quad m_{x_n,3}) = 0.$$

بنا به لم ۲.۳ توجه داریم که

$$m(x,y) = m_{xy} \Rightarrow m(1,3) = m_{1,3} = 1.$$
$$0 \le M_{x_n,1} \quad m_{x_n,1} = |m(x_n,x_n) \quad m(1,1)| = 1 \quad 1 = 0$$
$$0 \le M_{x_n,3} \quad m_{x_n,3} = |m(x_n,x_n) \quad m(3,3)| = |1 \quad 2| = 1.$$

مثال ۳.۳ با $a, b \ge 0$ فرض کنید:

$$m(x,y) = ad(x,y) + b$$

باشد در این‌صورت این یک m -متر است. حال دنباله در متر d اگر $x_n \to x$ آن‌گاه در m -متر $x_n \to x$.

$$m(x_n,x) \quad m_{x_n,x} = ad(x_n,x) + b \quad \min\{m(x_n,x_n), m(x,x)\} = ad(x_n,x) + b \quad \min\{b,b\} \to 0$$

۴. توپولوژی جدید τ^m فضای M – متری

حال یک توپولوژی ضعیفتر از توپولوژی اخیر به نام τ^m تعریف می‌کنیم که توسط گوی‌های باز به‌صورت زیر تولید می‌شود:

$$\{B^m(x,\varepsilon) : x \in X, \varepsilon > 0\},$$

که در آن

$$B^m(x,\varepsilon) = \{y \in X : m(x,y) \quad m_{x,y} + k(M_{x,y} \quad m_{x,y}) < \varepsilon\}.$$

نشان می‌دهیم توپولوژی τ_m یک T_0 هست. برای $x \neq y$ اگر فرض کنید

$$\varepsilon := m(x,y) \quad m_{x,y} + M_{x,y} \quad m_{x,y}$$

آنگاه $y \not\in B(x,\varepsilon)$.

برای تشکیل یک پایه به τ^m فرض کنید $0 < k < 1$ و ثابت باشد. برای هر $x \in X$ و $\varepsilon > 0$

$$y \in B^m(x,\varepsilon) \Rightarrow m(x,y) \quad m_{x,y} + k(M_{x,y} \quad m_{x,y}) < \varepsilon$$

ادعا می‌کنیم

$$\exists \delta > 0 \quad B^m(y,\delta) \subseteq B^m(x,\varepsilon).$$

$$\delta := \varepsilon \quad (m(x,y) \quad m_{x,y} + k(M_{x,y} \quad m_{x,y})).$$

$$z \in B(y,\delta) \Rightarrow m(y,z) \quad m_{y,z} + k(M_{y,z} \quad m_{y,z}) < \delta$$

$$m(y,z) \quad m_{y,z} + k(M_{y,z} \quad m_{y,z}) < \varepsilon \quad (m(x,y) \quad m_{x,y} + k(M_{x,y} \quad m_{x,y}))$$

بنا خاصیت زیر داریم

$$M_{x,z} \quad m_{x,z} = |m(x,x) \quad m(z,z)| \le |m(x,x) \quad m(y,y)| + |m(y,y) \quad m(z,z)|$$

و یا

$$M_{x,z} \quad m_{x,z} \le M_{x,y} \quad m_{x,y} + M_{y,z} \quad m_{y,z}$$

و بنا به خاصیت (m3) و اینکه $۰ < k < 1$

$$m(z,x) \quad m_{z,x} + k(M_{x,z} \quad m_{x,z}) \le m(y,z) \quad m_{y,z} + k(M_{y,z} \quad m_{y,z}) + m(x,y) \quad m_{x,y} + k(M_{x,y} \quad m_{x,y}) < \varepsilon$$

در نتیجه

$$z \in B(x,\varepsilon).$$

قضیه ۴.۱ توپولوژی τ^m ضعیفتر از توپولوژی τ_m است.

اثبات. فرض کنید $y \in B^m(x,\varepsilon)$ باشد لذا

$$m(x,y) \quad m_{x,y} + k(M_{x,y} \quad m_{x,y}) < \varepsilon$$

پس

$$\begin{aligned} m(x,y) \quad m_{x,y} & \\ & \leq m(x,y) \quad m_{x,y} \\ & + k(M_{x,y} \quad m_{x,y}) < \varepsilon \end{aligned}$$

در نتیجه

$$m(x,y) \quad m_{x,y} < \varepsilon$$

یعنی $y \in B_m(x,\varepsilon)$.

نتیجه‌گیری

در این مقاله نشان دادیم که توپولوژی τ^m ضعیفتر از توپولوژی τ_m است. منابعی دیگری برای مطالعه کاربردها در نظریه نقطه ثابت و فضاهای متری دیگری را می‌توانید در منابع [۳و۴] و [۵] مشاهده نمایید.

فهرست منابع

[1] S. Matthews, Partial metric topology. Ann. N.Y. Acad. Sci. 728, 183-197 (۱۹۹۴)

[2] Mehdi Asadi, Erdal Karapınar and Peyman Salimi, New extension of p-metric spaces with some fixed-point results on M-metric spaces, Journal of Inequalities and Applications 2014, 2014:18

[3] لعل دولت آباد, فاطمه. قضایای نقطه انطباق و ثابتِ نگاشت‌های انقباضی به طور ضعیف تعمیم یافته بر فضای شبه مدولار. *پژوهش های نوین در ریاضی*، 1401 .doi:10.30495/jnrm.2022.59783.2068

[4] سعیدی, شهرام, باغنده, جعفر. توسیع چند قضیه ی نقطه ثابت مشترک به نگاشت های میانگینی غیرانبساطی. *پژوهش های نوین در ریاضی*،:(29)7 1399 ،73-82

[5] حسینی فرهی, معصومه, حسنی, محمود, الهیاری, رضا. حلپذیری معادلات انتگرال-دیفرانسیل تابعی در فضای سوبولوف .(R^n) (W^(k,∞ *پژوهش های نوین در ریاضی*.160-147 :(29)7 ;1400