دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و پنجم، مرداد و شهریور ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

# همنهشتی‌های فازی مایهیل- نرود متناظر با اتوماتای فازی عمومی

خدیجه ابول پور[۱*]، محمد مهدی زاهدی[۲]، مرضیه شمسی زاده[۳]

(۱) گروه ریاضی، واحد شیراز، دانشگاه آزاد اسلامی، شیراز، ایران
(۲) گروه ریاضی، دانشگاه تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته کرمان، کرمان، ایران
(۳) گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی خاتم الانبیاء بهبهان، بهبهان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۸/۰۴/۲۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۱۱/۱۳

**چکیده**

قضیه‌ی مایهیل- نرود یکی از قضایای اساسی در نظریه‌ی زبان‌ها و اتوماتا است و برای اثبات هم‌ارزی اتوماتاها و زبان‌های آنها استفاده می‌شود. اهمیت این قضیه موجب شده تا پژوهشگران تلاش نمایند آن را روی اتوماتاهای مختلف گسترش دهند و به نوعی در زمینه‌ی بهینه سازی مدل‌های محاسباتی گام بردارند. در این مقاله، به توسعه‌ی مفهوم همنهشتی در اتوماتای فازی عمومی بر پایه‌ی این قضیه می‌پردازیم. بدین منظور، ابتدا با استفاده از مفهوم همنهشتی راست فازی روی یک تکواره‌ی آزاد، اتوماتای فازی عمومی القا شده توسط همنهشتی راست فازی را تعریف می‌کنیم. در ادامه، با استفاده از مفهوم زبان شناسایی شده توسط یک اتوماتا، نشان می‌دهیم که در این اتوماتای القا شده یک زبان قابل شناسایی است، اگر و تنها اگر توسیعی از همنهشتی راست فازی روی تکواره‌ی آزاد باشد. در نتیجه، این زبان شناسایی شده با زبان بخش صریح اتوماتای فوق یکسان است. همچنین، همنهشتی راست فازی نرود و همنهشتی فازی مایهیل متناظر با یک اتوماتای فازی عمومی ماگزیمال-مینیمال را تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم زبان شناسایی شده بوسیله‌ی اتوماتای فازی عمومی ماگزیمال-مینیمال با زبان شناسایی شده بوسیله‌ی اتوماتای فازی عمومی ماگزیمال-مینیمال القا شده توسط همنهشتی راست فازی نرود یکسان است. در پایان، با ارائه‌ی مثال‌هایی مفاهیم فوق را روشن می‌سازیم.

**واژه‌های کلیدی:** اتوماتای فازی عمومی، صریح، همنهشتی (مایهیل- نرود)، مشبکه، تکواره.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: Abolopor_kh@yahoo.com

## ۱- مقدمه

نظریه‌ی مجموعه‌های فازی در سال ۱۹۶۵، توسط لطفی زاده ارائه شد [۱۶]؛ که علاوه بر توسعه‌ی منطق دو ارزشی یک نظریه‌ی جدید بوجود آمد. همچنین، وی [۱۵] ایده‌ی اتوماتای فازی را ارائه کرد. منطق فازی یک روش بسیار کارآمد برای برطرف کردن ابهام در بسیاری از سیستم‌ها است. اتوماتا، تاریخچه‌ای طولانی در نظریه و کاربرد دارد. اتوماتا، یک مثال اولیه‌ی سیستم‌های محاسبه‌ای عمومی روی فضاهای گسسته است. در میان طیف متعارف اتوماتا (یعنی، اتوماتای حالت متناهی قطعی ($DFA$)، اتوماتای حالت متناهی غیرقطعی ($NFA$)، اتوماتای احتمالی ($PA$) و اتوماتای حالت متناهی فازی ($FFA$))، $DFA$ بیشتر از اتوماتاهای دیگر در سطوح مختلف بکار برده شده است [۷، ۸]. همه‌ی انتقالها در اتوماتای حالت متناهی قطعی و اتوماتای حالت متناهی غیرقطعی ارزش ضمنی یک دارند جایی که، ارزش انتقالها در اتوماتای احتمالی و اتوماتای حالت متناهی فازی متعلق به بازه‌ی $[0,1]$ می‌باشد. بنابراین، در انواع متعارف اتوماتا، یک انتقال با ارزش صفر به این معنی است، که انتقالی وجود ندارد. در صورتی که، در تعریف جدید برای اتوماتای حالت متناهی فازی ممکن است یک انتقال با ارزش صفر موجود باشد. این دلیلی است که از بازه‌ی $[0,1]$ به عنوان بازه‌ی فازی استفاده شده است. در سال ۲۰۰۵، دوست فاطمه و کرمر مفهوم اتوماتای فازی را توسعه دادند و همچنین مفهوم اتوماتای فازی عمومی را ارائه کردند [۴]. پس از آن ابول پور، زاهدی، حری و شمسی زاده تحقیقات علمی و متنوعی را در این زمینه انجام دادند، به عنوان مثال [۱، ۲، ۳، ۱۲، ۱۳، ۱۷] را ملاحظه نمایید. نظریه‌ی مایهیل- نرود شاخه‌ای از نظریه‌ی جبری زبان‌ها و اتوماتا است که در آن زبان‌های معمولی و اتوماتاهای قطعی توسط همنهشتی‌های راست و همنهشتی‌های روی یک تکواره‌ی آزاد بررسی می‌شوند. اساس این نظریه بر پایه‌ی قضیه‌ی مشهور مایهیل- نرود است که توسط مایهیل [۱۲] و نرود [۱۳] ثابت شده است. این قضیه شرایط لازم و کافی برای منظم بودن یک زبان را بیان می‌کند، که این شرایط بر حسب همنهشتی‌های راست و همنهشتی‌های اندیس متناهی روی یک تکواره‌ی آزاد بیان می‌شوند. هر چند، نظریه‌ی مایهیل- نرود صرفا" به این قضیه مربوط نمی‌شود، بلکه بسیاری از موضوعات دیگر را نیز در بر می‌گیرد. مقالات بسیاری از جمله [۸، ۱۰، ۱۱] در زمینه‌ی همنهشتی‌های راست نحوی و اشتقاق‌های زبان‌های فازی، همنهشتی‌های نحوی و تکواره‌های نحوی زبان‌های فازی، شناسایی زبان‌های فازی توسط تکواره‌ها، تکواره‌های انتقالی اتوماتاهای فازی و بسیاری از موضوعات مرتبط موجود است. در بخش دوم این مقاله تمام مفاهیم مورد نیاز در بخش‌های بعدی را بیان و برخی ویژگی‌های اساسی آنها را بررسی می‌نماییم. در بخش سوم، در ادامه‌ی پژوهش‌های انجام شده، مفهوم اتوماتای فازی عمومی القا شده توسط همنهشتی راست فازی و نتایج بدست آمده را ارائه می‌کنیم. همچنین، نشان می‌دهیم که در این اتوماتای القا شده یک زبان قابل شناسایی است، اگر و تنها اگر توسیعی از همنهشتی راست فازی روی یک تکواره‌ی آزاد باشد. سپس، همنهشتی راست فازی نرود و همنهشتی فازی مایهیل متناظر با یک اتوماتای فازی عمومی ماگزیمال-مینیمال را تعریف می‌کنیم.

## ۲- تعاریف و مفاهیم اولیه

**تعریف ۲-۱[۵]:** یک مجموعه‌ی با ترتیب جزئی مانند P مشبکه نامیده می‌شود، هرگاه برای هر دو عضو $x$ و y از آن، کوچکترین کران بالا (LUB) و بزرگترین کران پایین (GLB) موجود باشد. یک مشبکه کامل است، هرگاه هر زیر مجموعه‌ی آن دارای (LUB) و (GLB) باشد. بزرگترین عضو مشبکه را با ۱ و کوچکترین عضو آن را با o نشان می‌دهیم. برای هر $x, y \in P$، کوچکترین کران بالای x و y را با نماد $x \vee y$ و بزرگترین کران پایین x و y را با نماد $x \wedge y$ نمایش می‌دهیم.

**تعریف ۲-۲[۵]:** یک مشبکه‌ی مانده، جبر

$$L = (\ell, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0,1)$$

است که در آن:

(۱) 0 به عنوان کوچکترین عضو و ۱ به عنوان بزرگترین عضو مشبکه‌ی $(\ell,\wedge,\vee,0,1)$ است.
(۲) $(\ell,\otimes,1)$ یک تکواره‌ی جابجایی است؛ یعنی، $\otimes$ شرکت پذیر و جابجایی است و ۱ عضو همانی آن است.
به عبارتی برای هر $x\in\ell$ داریم، $x\otimes 1=x$.
(۳) $\otimes$ و $\rightarrow$ یک دوتایی الحاقی تشکیل می‌دهند؛ یعنی، برای هر $x,y,z\in\ell$ داریم:
$x\le y\rightarrow z\Leftrightarrow x\otimes y\le z$.

اعمال $\otimes$ و $\rightarrow$ به ترتیب ضرب و مانده نامیده می‌شوند. همچنین، برای هر $x,y\in\ell$ منظور از $x\rightarrow y$ مانده‌ی $x$ توسط y است.
هر گاه مشبکه‌ی $(\ell,\wedge,\vee,0,1)$ کامل باشد، $L$ یک مشبکه‌ی مانده کامل نامیده می‌شود.

**مثال ۲-۳[۵]:** بازه ی همه ی اعداد حقیقی بین 0 و 1 را در نظر بگیرید.
ترتیب معمولی روی بازه‌ی $[0,1]$ مشبکه‌ی $(\ell,\wedge,\vee,0,1)$ را تشکیل می‌دهد.
در مشبکه‌ی فوق $x\wedge y=\min(x,y)$ و $x\vee y=\max(x,y)$.
همچنین، این مشبکه کامل است و هر یک از زوج اعمال زیر مشبکه‌ی مانده کامل $L$ را تشکیل می‌دهند،
(۱) ساختار لوکاسویچ[1]

$$x\otimes y=\max(x+y-1,0),$$
$$x\rightarrow y=\min(1-x+y,1)$$

(۲) ساختار گودل[2]

$$x\otimes y=\min(x,y),$$
$$x\rightarrow y=\begin{cases}1, & x\le y\\ y, & x>y\end{cases}$$

(۳) ساختار ضربی[3]

$$x\otimes y=x.y,$$
$$x\rightarrow y=\begin{cases}1, & x\le y\\ \dfrac{y}{x}, & x>y\end{cases}.$$

**تعریف ۲-۴[۵]:** فرض کنید $L$ یک مشبکه‌ی مانده باشد. یک دو مانده روی $\ell$ عمل دوتایی $\leftrightarrow$ است، که برای هر $x,y\in\ell$ به صورت زیر تعریف می‌شود:
$$x\leftrightarrow y=(x\rightarrow y)\wedge(y\rightarrow x).$$

**تعریف ۲-۵[۵]:** فرض کنید A یک مجموعه باشد. یک زیر مجموعه‌ی صریح از A، یک زیر مجموعه‌ی فازی از A است، که مقادیر عضویت آن متعلق به $\{0,1\}$ است.
مجموعه‌ی همه‌ی زیر مجموعه‌های فازی A با نماد $F(A)$ نشان داده می‌شود.

**تعریف ۲-۶[۵]:** فرض کنید $f$ یک زیر مجموعه‌ی فازی از مجموعه‌ی A باشد. در این صورت بخش صریح $f$، که با $\hat{f}$ نشان داده می‌شود، یک زیر مجموعه‌ی صریح از A است که به صورت زیر تعریف می‌شود:
$$\hat{f}=\{x\in A\,|\,f(x)=1\}.$$

همچنین، $\hat{f}$ را می‌توان نگاشت $\hat{f}:A\rightarrow[0,1]$ در نظر گرفت که با تابع مشخصه‌ی زیر تعریف می‌شود:
$$\hat{f}(x)=\begin{cases}1, & f(x)=1\\ 0, & f(x)<1\end{cases}.$$

**تعریف ۲-۷[۵]:** فرض کنید $f$ یک زیر مجموعه‌ی فازی از مجموعه‌ی A باشد. در این به صورت زیر تعریف می‌شود:
$$\hat{f}=\{x\in A\,|\,f(x)=1\}$$

همچنین، $\hat{f}$ را می‌توان نگاشت $\hat{f}:A\rightarrow[0,1]$ در نظر گرفت که با تابع مشخصه‌ی زیر تعریف می‌شود:

1. Lukasiewicz structure
2. Godel structure
3. Product structure

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} 1, & f(x) = 1 \\ 0, & f(x) < 1 \end{cases}.$$

**تعریف ۲-۸[۵]:** فرض کنید $f$ یک زیر مجموعه‌ی فازی از مجموعه‌ی A باشد. در این صورت، هسته‌ی $f$، و به صورت نمادی $\ker f$، زیر مجموعه‌ای از $A \times A$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Ker\, f = \{(x,y) \in A \mid f(x) = f(y)\}.$$

همچنین، تصویر $f$ و به صورت نمادی $\operatorname{Im} f$، که همان برد $f$ است، زیر مجموعه‌ای از $[0,1]$ است که با مجموعه‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$\operatorname{Im} f = \{ f(a) \mid a \in A \}.$$

عدد اصلی $\operatorname{Im} f$ را مرتبه‌ی $f$ نامیده و با $rank\, f$ نشان می‌دهیم.

**تعریف ۲-۹[۵]:** یک رابطه‌ی فازی روی مجموعه‌ی A یک زیر مجموعه‌ی فازی از $A \times A$ است.

**تعریف ۲-۱۰[۵]:** رابطه ی فازی E روی A:

(۱) بازتابی است، اگر برای هر $a \in A$، $E(a,a) = 1$،

(۲) تقارنی است، اگر برای هر $a,b \in A$، $E(a,b) = E(b,a)$،

(۳) تعدی است، اگر برای هر $a,b,c \in A$، $E(a,b) \otimes E(b,c) \le E(a,c)$.

**تعریف ۲-۱۱[۵]:** یک رابطه‌ی فازی بازتابی، تقارنی و تعدی روی مجموعه‌ی A یک رابطه‌ی هم‌ارزی فازی نامیده می‌شود. مجموعه‌ی همه‌ی روابط هم‌ارزی روی مجموعه‌ی A با $\varepsilon(A)$ نشان داده می‌شود.

**تعریف ۲-۱۲[۵]:** فرض کنید E رابطه‌ی هم‌ارزی فازی روی مجموعه‌ی A و $a \in A$. برای هر $x \in A$، زیر مجموعه‌ی فازی $E_a$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E_a(x) = E(a,x)$$

$E_a$، کلاس هم‌ارزی فازی E تعیین شده توسط a نامیده می‌شود.

**تعریف ۲-۱۳[۵]:** مجموعه‌ی

$$\frac{A}{E} = \{ E_a \mid a \in A \}$$

مجموعه‌ی عاملی A نسبت به E نامیده می‌شود. عدد اصلی مجموعه‌ی عاملی $\frac{A}{E}$ که با $ind(E)$ نشان داده می‌شود، اندیس E نامیده می‌شود.

**تعریف ۲-۱۴[۵]:** رابطه‌ی هم‌ارزی فازی E روی نیم‌گروه S همنهشتی چپ فازی نامیده می‌شود، هر گاه برای هر $a,b,x \in S$، $E(a,b) \le E(xa,xb)$. همچنین، E یک همنهشتی راست فازی است، هر گاه برای $a,b,x \in S$، $E(a,b) \le E(ax,bx)$. اگر E هم همنهشتی چپ فازی و هم همنهشتی راست فازی باشد، یک همنهشتی فازی روی S نامیده می‌شود.

**تعریف ۲-۱۵[۵]:** فرض کنید E یک رابطه‌ی هم‌ارزی فازی روی نیم‌گروه S باشد. برای هر $a,b \in S$ روابط فازی $E_l^o$، $E_r^o$ و $E^o$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$E_l^o(a,b) = \bigwedge_{x \in S} E(xa,xb),$$

$$E_r^o(a,b) = \bigwedge_{x \in S} E(ax,bx),$$

$$E^o(a,b) = \bigwedge_{x,y \in S} E(xay,xby),$$

و به ترتیب، $E_l^o$ همنهشتی باز چپ فازی $E$، $E_r^o$ همنهشتی باز راست فازی $E$ و $E^o$ همنهشتی باز فازی $E$ نامیده می‌شوند.

**تعریف ۲-۱۶[۵]:** فرض کنید $f$ یک زیرمجموعه‌ی فازی از مجموعه‌ی $A$ و $E$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی فازی روی $A$ باشد. $f$ توسیعی نسبت به $E$ نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $x,y\in A$ داشته باشیم:
$f(x)\otimes E(x,y)\le f(y).$

مجموعه‌ی همه‌ی زیر مجموعه‌های فازی $\mathrm{A}$ که نسبت به $\mathrm{E}$ توسیعی است با $H_E$ نشان داده می‌شود.

**تذکر ۲-۱۷[۵]:** با توجه به ویژگی الحاقی و تقارنی بودن $\mathrm{E}$؛ $f$ نسبت به $\mathrm{E}$ توسیعی است، اگر و تنها اگر برای هر $x,y\in A$ داشته باشیم:
$E(x,y)\le f(x)\leftrightarrow f(y)$.

**لم ۲-۱۸[۵]:** فرض کنید $E$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی فازی روی مجموعه‌ی $A$ باشد. آنگاه برای هر $x,y\in A$ داریم،
$E(x,y)=\left\|E_x\otimes E_y\right\|.$

**لم ۲-۱۹[۵]:** فرض کنید $E$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی فازی روی مجموعه‌ی $A$ باشد و $\hat{E}$ را به عنوان بخش صریح آن در نظر بگیرید. آنگاه $\hat{E}$ یک هم‌ارزی صریح روی $A$ است و برای هر $x,y\in A$، شرایط زیر معادل می‌باشند:
(۱) $E(x,y)=1$،
(۲) $E_x=E_y$،
(۳) $\hat{E}_x=\hat{E}_y$،

و در نتیجه $ind(E)=ind(\hat{E})$.

**تعریف ۲-۲۰[۵]:** فرض کنید $\pi$ یک هم‌ارزی روی مجموعه‌ی $A$ باشد. اگر $\pi\subseteq\ker f$، زیر مجموعه‌ی فازی $f\in F(A)$ نسبت به $\pi$ توسیعی است. همه‌ی زیر مجموعه‌های فازی $A$ که نسبت به $\pi$ توسیعی هستند با $H_\pi$ نشان داده می‌شود. از آنجا که $\ker f$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی $A$ است، به عنوان بزرگترین هم‌ارزی روی $A$ در نظر گرفته می‌شود، که $f$ نسبت به آن توسیعی است.

**تعریف ۲-۲۱[۵]:** اگر $\Sigma^*$ یک تکواره‌ی آزاد روی الفبای $\Sigma$ باشد، منظور از زبان فازی در $\Sigma^*$ هر زیر مجموعه‌ی فازی از $\Sigma^*$ است.

**تعریف ۲-۲۲[۴]:** مجموعه‌ی فازی $\mu_Q$ تعریف شده روی مجموعه‌ی $Q$ یک تابع است، که هر عضو از $Q$ را به یک عضو منحصربفرد از بازه‌ی $[0,1]$ می‌نگارد،
$\mu_Q:Q\to[0,1].$

در نتیجه، مجموعه‌ی توانی فازی $Q$ که با $\tilde{P}(Q)$ نمایش داده می‌شود مجموعه‌ای شامل همه‌ی زیر مجموعه‌های فازی $\mu_Q$ است که روی مجموعه‌ی $Q$ تعریف می‌شوند،
$\tilde{P}(Q)=\left\{\mu_Q\middle|\mu_Q:Q\to[0,1]\right\}.$

**تعریف ۲-۲۳[۴]:** اتوماتای فازی عمومی $(GFA)$، یک ماشین هشت تایی بصورت
$\tilde{F}=(Q,\Sigma,\tilde{R},Z,\tilde{\delta},\omega,F_1,F_2)$

است که در آن:
$Q=\{q_1,q_2,\dots,q_n\}$ :
مجموعه‌ی متناهی غیرفازی از حالت‌ها است.

$\Sigma=\{a_1,a_2,\dots,a_m\}$ :
مجموعه‌ی متناهی غیرفازی از الفبای ورودی است.

$\tilde{R}$: مجموعه حالت‌های فازی آغازین است و $\tilde{R}\subseteq\tilde{P}(Q)$.

$Z=\{b_1,b_2,...,b_l\}$: مجموعه‌ی متناهی غیر فازی از عناوین خروجی است.

$\omega:Q\to Z$: تابع غیر فازی خروجی است.

$F_1:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$: یک نگاشت تابعی است، که بوسیله‌ی $\tilde{\delta}$ برای تعیین مقادیر عضویت حالتهای فعال بکار برده می‌شود. بنابراین، تابع تعیین عضویت نامیده شده است.

تابع $F_1(\mu,\delta)$ توسط دو پارامتر بدست می‌آید:

۱) $\mu$: مقدار عضویت ما قبل بلافصل،

۲) $\delta$: ارزش انتقال.

در این تعریف، روندی که توسط انتقال از حالت $q_i$ به حالت $q_j$ روی ورودی $a_k$ اتفاق می‌افتد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu^{t+1}(q_j)=\tilde{\delta}((q_i,\mu^t(q_i)),a_k,q_j)=$$
$$F_1(\mu^t(q_i),\delta(q_i,a_k,q_j)).$$

این بدان معنی است، که مقدار عضویت حالت $q_j$ در زمان $t+1$، توسط تابع $F_1$ با استفاده از مقدار عضویت $q_i$ در زمان $t$ و ارزش انتقال محاسبه می‌شود.

دراین جا، انتخابهای متفاوتی برای تابع $F_1(\mu,\delta)$ وجود دارد، که مهمترین انتخاب به کاربرد مورد نظر بستگی دارد. برای مثال، می‌تواند $t-$ نرم، ماکزیمم، می‌نیمم، میانگین یا هر تابع ریاضیاتی مربوط دیگری باشد. تابع $F_1(\mu,\delta)$ باید در اصول زیر صدق کند:

(i) $0\le F_1(\mu,\delta)\le 1$،

(ii) $F_1(0,0)=0$ و $F_1(1,1)=1$.

$\tilde{\delta}:(Q\times[0,1])\times\Sigma\times Q\to[0,1]$: تابع انتقال تقویت شده است. $\tilde{\delta}$ حالت فعال بدست آمده از ما قبل بلافصل‌اش را از طریق تابع $F_1(\mu,\delta)$ به بازه‌ی فازی $[0,1]$ می‌نگارد.

$F_2:[0,1]^*\to[0,1]$: روش رفع چند عضویتی است، که چند عضویتی حالتهای فعال را برطرف می‌کند و یک مقدار عضویت برای آنها تعیین می‌کند. بنابراین، تابع رفع چند عضویتی نامیده شده است.

**تعریف ۲-۲۴[۴]:** اشتقاق رشته‌ی ورودی $X(X\in\Sigma^*)$ که با $der_i(X)$ نشان داده می‌شود (جایی که $i$ یک اندیس دلخواه است و معمولاً از یک شروع می‌شود)، یک مجموعه از حالتهایی است که بطور پیاپی بر اساس ورود هر نماد از رشته تعیین می‌شوند و از حالت آغازین شروع می‌شود. برای مثال، برای $X\in\Sigma^*$ که به صورت $X=a_1\dots a_k a_{k+1}\dots a_m$ داده شده است داریم:

$$der_i(X)=$$
$$\left\{\begin{array}{l} q_{i_0}q_{i_1}\dots q_{i_k}q_{i_{k+1}}\dots q_{i_{m-1}}q_{i_m} \\ \Big| q_{i_0}\in\tilde{R}, q_{i_0}\xrightarrow{\delta(q_{i_0},a_1,q_{i_1})}q_{i_1}\to\dots \\ \to q_{i_k}\xrightarrow{\delta(q_{i_k},a_{k+1},q_{i_{k+1}})}q_{i_{k+1}}\to\dots \\ \to q_{i_{m-1}}\xrightarrow{\delta(q_{i_{m-1}},a_m,q_{i_m})}q_{i_m} \\ 0\le k\le m \end{array}\right\}.$$

یک رشته ممکن است چندین اشتقاق داشته باشد.

**تعریف ۲-۲۵[۴]:** مقدار عضویت رشته ورودی $X$ که با $\mu(X)$ نمایش داده می‌شود، ماکزیمم مقدار عضویت اشتقاق‌های آن است جایی که، مقدار عضویت یک اشتقاق، می‌نیمم ارزش انتقالهای مواجه شده در آن اشتقاق است. برای مثال، فرض کنید $X=a_1a_2\dots a_ka_{k+1}\dots a_m$، $n$ اشتقاق داشته باشد و $i$ امین اشتقاق $X$ بصورت زیر باشد،

$$der_i(X)=q_{i_0}q_{i_1}\dots q_{i_k}q_{i_{k+1}}\dots q_{i_m}$$

که $q_{i_0}\in\tilde{R}$ و مقدار عضویت $der_i(X)$ بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mu(der_i(X))=\bigwedge_{k=1}^{m}\left\{\delta(q_{i_{k-1}},a_k,q_{i_k})\right\}.$$

در این صورت با توجه به تعریف فوق داریم:

$$\mu(X)=\bigvee_{i=1}^{n}\{\mu(der_i(X))\}$$
$$=\bigvee_{i=1}^{n}\left\{\bigwedge_{k=1}^{m}\{\delta(q_{i_{k-1}},a_k,q_{i_k})\}\right\}.$$

**تعریف ۲-۲۶[۴]:** فرض کنید $\tilde{F}$ اتوماتای فازی عمومی باشد. همچنین، فرض کنید به ازای هر $1\le i\le n$، $u_i\in\Sigma$ و ورودی در زمان $t_i$، $u_i$ باشد، نگاشت $\tilde{\delta}^*:Q_{act}\times\Sigma^*\times Q\to[0,1]$ را که در آن، $Q_{act}=Q_{act}(t_0)\cup Q_{act}(t_1)\cup Q_{act}(t_2)\cup\ldots$ برای هر $i\ge 0$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{\delta}^*((q,\mu^{t_0}(q)),\Lambda,p)=\begin{cases}1 & if\;\; q=p\\ 0 & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$
$$\tilde{\delta}^*((q,\mu^{t_{i-1}}(q)),u_i,p)$$
$$=\tilde{\delta}((q,\mu^{t_{i-1}}(q)),u_i,p),$$
$$\tilde{\delta}^*((q,\mu^{t_{i-1}}(q)),u_iu_{i+1},p)$$
$$=\bigvee_{q'\in Q_{act}(t_i)}(\tilde{\delta}((q,\mu^{t_{i-1}}(q)),u_i,q')$$
$$\otimes\tilde{\delta}((q',\mu^{t_i}(q')),u_{i+1},p))$$

و بطور متناوب،

$$\tilde{\delta}^*((q,\mu^{t_0}(q)),u_1u_2\ldots u_n,p)$$
$$=\vee\{\tilde{\delta}((q,\mu^{t_0}(q)),u_1,p_1)\otimes$$
$$\tilde{\delta}((p_1,\mu^{t_1}(p_1)),u_2,p_2)\otimes\ldots\otimes$$
$$\tilde{\delta}((p_{n-1},\mu^{t_{n-1}}(p_{n-1})),u_n,p),p_1\in Q_{act}(t_1),$$
$$p_2\in Q_{act}(t_2),\ldots,p_{n-1}\in Q_{act}(t_{n-1})\;\}.$$

در این صورت،

$$\tilde{F}^*=(Q,\Sigma,\tilde{R},Z,\omega,\tilde{\delta}^*,F_1,F_2)$$

اتوماتای فازی عمومی ماگزیمال-مینیمال نامیده می‌شود.

**تعریف ۲-۲۷[۱۷]:** فرض کنید $\tilde{F}^*$ و $\tilde{F}'^*$ دو اتوماتای فازی عمومی ماگزیمال-مینیمال با مجموعه الفبای ورودی و خروجی یکسان باشند.

نگاشت $\varphi:Q\to Q'$، یک همریختی با آستانه‌ی $c\in[0,1]$ نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $p,q\in Q$ و $u\in\Sigma^*$ داشته باشیم:

$$\tilde{\delta}^*((q,\mu^t(q)),u,p)<c\Leftrightarrow \quad (۱)$$
$$\tilde{\delta}'^*((\varphi(q),\mu^t(\varphi(q)),u,\varphi(p))<c,$$

(۲) $\omega(p)=z\Leftrightarrow\omega'(\varphi(p))=z$،

(۳) $\varphi(q_0)=q'_0$.

اگر $\varphi$ پوشا باشد، آنگاه یک بروریختی نامیده می‌شود و $\tilde{F}'^*$ تصویر همریخت $\tilde{F}^*$ خواهد بود؛ اگر $\varphi$ دوسویی باشد، آنگاه یکریختی
نامیده می‌شود و $\tilde{F}'^*$ و $\tilde{F}^*$ دو اتوماتای فازی عمومی max-min یکریخت خواهند بود.

**مثال ۲-۲۸:** اتوماتای فازی عمومی $\tilde{F}$ را که به صورت زیر تعریف می‌شود در نظر بگیرید:

$\Sigma=\{0,1\}$ مجموعه الفبای ورودی،

$Q=\{q_0,q_1,q_2\}$ مجموعه حالت‌ها، $\tilde{R}=\{(q_0,1)\}$ مجموعه حالت آغازین و $Z=\phi$.

با توجه به جدول انتقال (۱) فعالیت اتوماتای فازی عمومی فوق را براساس رشته‌ی ورودی "$ba^2b$" بررسی می‌کنیم. فرض کنید،

$$F_1(\mu,\delta)=\delta,F_2()=\mu^{t+1}(q_m)$$
$$=\bigwedge_{i=1}^{n}\left[F_1(\mu^t(q_i),\delta(q_i,a_k,q_m))\right]$$

در این صورت داریم:

$$\mu^{t_0}(q_0)=1,$$
$$\mu^{t_1}(q_1)=F_1(\mu^{t_0}(q_0),\delta(q_0,b,q_1))$$
$$=\delta(q_0,b,q_1)=0.4,$$
$$\mu^{t_2}(q_2)=F_1(\mu^{t_1}(q_1),\delta(q_1,a,q_2))$$
$$=\delta(q_1,a,q_2)=0.3,$$
$$\mu^{t_3}(q_1)=F_1(\mu^{t_2}(q_2),\delta(q_2,a,q_1))$$
$$=\delta(q_2,a,q_1)=0.8,$$
$$\mu^{t_3}(q_2)=F_1(\mu^{t_2}(q_2),\delta(q_2,a,q_2))$$
$$=\delta(q_2,a,q_2)=0.1,$$
$$\mu^{t_4}(q_2)=F_1(\mu^{t_3}(q_2),\delta(q_2,b,q_2))$$
$$=\delta(q_2,b,q_2)=0.35.$$

**مثال ۲-۲۹: در مثال (۲-۲۸) برای رشته‌ی ورودی** «$baab$» داریم،

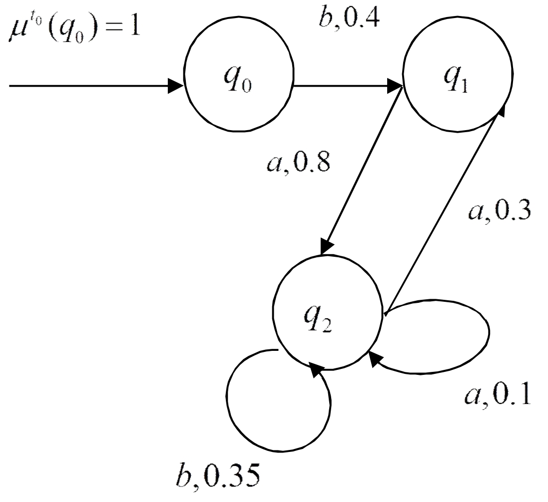
$$q_0\xrightarrow{b}q_1\xrightarrow{a}q_2\xrightarrow{a}\begin{cases}q_2\xrightarrow{b}q_2\\ q_1\end{cases}$$

لذا، $der_1(baab)=q_0q_1q_2q_2q_2$ و در نتیجه، $\mu("baab")=0.1$.

**جدول (۱): حالت‌های فعال و مقادیر عضویت آنها در زمان‌های مختلف مثال (۲-۲۸)**

| time | $t_0$ | $t_1$ | $t_2$ | $t_3$ | | $t_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| input | $\Lambda$ | $b$ | $a$ | $a$ | | $b$ |
| $Q_{act}(t_i)$ | $q_0$ | $q_1$ | $q_2$ | $q_2$ | $q_1$ | $q_2$ |
| mv | 1 | 0.4 | 0.3 | 0.1 | 0.8 | 0.35 |

**نمودار (۱): اتوماتای فازی عمومی مثال (۲-۲۸)**



## ۳- دست آوردهای پژوهش

در این بخش مجموعه‌ها، روابط، زبان‌ها و اتوماتاهای فازی را با توجه به ساختار گودل در نظر می‌گیریم. ابتدا، نشان می‌دهیم چگونه می‌توان با شروع از یک همنهشتی راست فازی روی تکواره‌ی آزاد $\Sigma^*$ یک اتوماتای فازی عموی تشکیل داد. سپس، عکس مسأله‌ی فوق را در نظر می‌گیریم. یعنی، به بررسی این مسأله می‌پردازیم که چگونه می‌توان یک همنهشتی راست فازی روی $\Sigma^*$ را به اتوماتای فازی عمومی ماگزیمال-مینیمال داده شده‌ی $\tilde{F}^*$ اختصاص داد.

**تعریف ۳-۱:** فرض کنید $E$ یک همنهشتی راست فازی روی تکواره‌ی آزاد $\Sigma^*$،

$$\tilde{F}=(Q,\Sigma,\tilde{R},Z,\tilde{\delta},\omega,F_1,F_2)$$

اتوماتای فازی عمومی و $Q_E=\dfrac{\Sigma^*}{E}$. برای هر $u,v\in\Sigma^*$ و $x\in\Sigma$ نگاشت

$$\tilde{\delta}_E:(Q_E\times[0,1])\times\Sigma\times Q_E\to[0,1]$$

را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{\delta}_E((E_u,\mu(u)),x,E_v)=E_{ux}(v)$$
$$=E(ux,v).$$

همچنین، فرض کنید

$$q_{i_0},\ldots,q_{i_k},q_{i_{k+1}},\ldots,q_{i_m}\in der_i(u)$$

در این صورت تعریف می‌کنیم:

$$\omega_E(E_u)=\omega(q_{i_m}).$$

$\tilde{\delta}_E$ را می‌توان به عنوان درجه‌ی کلمه‌های $ux$ و $v$ نسبت به $E$، و یا درجه‌ی تساوی کلاس‌های هم‌ارزی فازی $E_{ux}$ و $E_v$ در نظر گرفت.

**قضیه ۳-۲:** فرض کنید $E$ یک همنهشتی راست فازی روی تکواره‌ی آزاد $\Sigma^*$ باشد. آنگاه

(۱) $\tilde{\delta}_E$ یک نگاشت خوش تعریف است و

$$\tilde{F}_E=(Q_E,\Sigma,(E_\Lambda,\mu(\Lambda)),Z,\omega_E,\tilde{\delta}_E,F_1,F_2)$$

یک اتوماتای فازی عمومی است.

(۲) برای هر $u,v\in\Sigma^*$ و $p\in\Sigma^*\setminus\{\Lambda\}$ داریم:

$$\tilde{\delta}_E^*((E_u,\mu(u)),p,E_v)=E_{up}(v)$$
$$=E(up,v).$$

**اثبات: (۱)** برای هر $p,q,u,v\in\Sigma^*$، فرض کنید $E_u=E_p$، $E_v=E_q$ و همچنین فرض کنید $x\in\Sigma$. در این صورت داریم:

$$E(ux,px)\geq E(u,p)=1$$
$$\Rightarrow E(ux,px)=1\Rightarrow E_{ux}=E_{px}.$$

لذا،

$$\tilde{\delta}_E((E_u,\mu(u)),x,E_v)=E_{ux}(v)$$
$$=E_{px}(v)=E(v,px)=E_v(px)$$
$$=E_q(px)=E(q,px)$$
$$=\tilde{\delta}_E((E_p,\mu(p)),x,E_q).$$

بنابراین، $\tilde{\delta}_E$ خوش تعریف است و $\tilde{F}_E$ یک اتوماتای فازی عمومی است.

**(۲)** به راحتی با استقرا روی طول $P$ ثابت می‌شود.

**تعریف ۳-۳:** اتوماتای فازی عمومی $\tilde{F}_E$ اتوماتای فازی عمومی متناظر با همنهشتی راست فازی $E$ نامیده می‌شود.

**تبصره ۳-۴:** (الف) طبق لم (۲-۱۹)، برای هر $u,v\in\Sigma^*$ و $p\in\Sigma^*\setminus\{\Lambda\}$ داریم،

$$\tilde{\delta}_E^*((E_u,\mu(u)),p,E_v)=1$$

اگر و تنها اگر $E_{up}=E_v$.

(ب) معمولاً $\tilde{F}_E$ را به عنوان اتوماتای فازی عمومی با حالت آغازین $E_\Lambda$، که همان کلاس هم‌ارزی فازی $E$ تعیین شده بوسیله‌ی کلمه‌ی تهی ($\Lambda$) است، در نظر

می‌گیریم. علاوه‌براین، هنگامی که درباره‌ی شناسایی زبان‌های فازی توسط این اتوماتا بحث می‌کنیم، همیشه فرض بر این است که $\tilde{F}_E$ از حالت آغازین $E_\Lambda$ آغاز می‌شود. به عبارتی، اتوماتای فازی عمومی $\tilde{F}_E$ زبان فازی $f \in F(\Sigma^*)$ را توسط مجموعه‌ی فازی $\tau \in F(Q_E)$ از حالت‌های نهایی شناسایی می‌کند، اگر برای هر $u \in \Sigma^*$ داشته باشیم:

$$f(u) = \bigvee_{w\in\Sigma^*}[\tilde{\delta}_E^*((E_\Lambda,\mu(\Lambda)),u,E_w)\otimes\tau(E_w)] = \bigvee_{w\in\Sigma^*}[E(u,w)\otimes\tau(E_w)].$$

**قضیه ۳-۵:** فرض کنید $E$ یک همنهشتی راست فازی روی تکواره‌ی آزاد $\Sigma^*$ باشد. زبان فازی $f \in F(\Sigma^*)$ توسط $\tilde{F}_E$ شناسایی می‌شود، اگر و تنها اگر $f$ نسبت به $E$ توسیعی باشد.

**اثبات:** فرض کنید $\tilde{F}_E$ زبان فازی $f$ را با مجموعه‌ی فازی $\tau \in F(Q_E)$ از حالت‌های نهایی شناسایی کند. با استفاده از خاصیت تعدی بودن $E$، برای هر $u,v \in \Sigma^*$ داریم:

$$f(u)\otimes E(u,v) = \bigvee_{w\in\Sigma^*}[\tilde{\delta}_E^*((E_\Lambda,\mu(\Lambda)),u,E_w)\otimes\tau(E_w)] \otimes E(u,v) = \bigvee_{w\in\Sigma^*}[\tilde{\delta}_E^*((E_\Lambda,\mu(\Lambda)),u,E_w) \otimes E(u,v)\otimes\tau(E_w)]$$
$$= \bigvee_{w\in\Sigma^*}[E(u,w)\otimes E(u,v)\otimes\tau(E_w)] = \bigvee_{w\in\Sigma^*}[E(w,u)\otimes E(u,v)\otimes\tau(E_w)]$$
$$\le \bigvee_{w\in\Sigma^*}[E(v,w)\otimes\tau(E_w)] = \bigvee_{w\in\Sigma^*}[\tilde{\delta}_E^*((E_\Lambda,\mu(\Lambda)),v,E_w)\otimes\tau(E_w)] = f(v)$$

بنابراین، $f$ نسبت به $E$ توسیعی است.

برعکس، فرض کنید $f$ نسبت به $E$ توسیعی باشد. برای هر $u \in \Sigma^*$ فرض کنید، $\tau(E_u) = f(u)$.
اگر $u,v \in \Sigma^*$ و $E_u = E_v$، آنگاه، $E(u,v) = 1$.
از این رو،

$$f(u) = f(u)\otimes E(u,v) \le f(v)$$

و به طور مشابه می‌توان ثابت کرد $f(v) \le f(u)$. بنابراین، $f(u) = f(v)$. در نتیجه، ثابت کرده ایم $\tau$ یک مجموعه‌ی خوش تعریف از $Q_E$ است.
حال برای هر $u \in \Sigma^*$، طبق خاصیت بازتابی $E$ نتیجه می‌شود،

$$f(u) = E(u,u)\otimes f(u) \le \bigvee_{w\in\Sigma^*}[E(u,w)\otimes f(w)] = \bigvee_{w\in\Sigma^*}[\tilde{\delta}_E^*((E_\Lambda,\mu(\Lambda)),u,E_w)\otimes\tau(E_w)]$$

و از توسیع پذیری $f$ نسبت به $E$ داریم:

$$\bigvee_{w\in\Sigma^*}[\tilde{\delta}_E^*((E_\Lambda,\mu(\Lambda)),u,E_w)\otimes\tau(E_w)] = \bigvee_{w\in\Sigma^*}[E(u,w)\otimes f(w)] \le f(u)$$

بنابراین،

$$f(u)=\underset{w\in\Sigma^*}{\vee}[\tilde{\delta}_E^*((E_\Lambda,\mu(\Lambda)),u,E_w)\otimes\tau(E_w)].$$

این بدان معنی است، که $\tilde{F}_E$ زبان فازی $f$ را با مجموعه‌ی فازی $\tau$ شناسایی می‌کند.

**تعریف ۳-۶:** فرض کنید $\tilde{F}$ یک اتوماتای فازی عمومی باشد. $\hat{\tilde{\delta}}$ را بخش صریح $\tilde{\delta}$ می‌نامیم و $\hat{\tilde{F}}_E$ بخش صریح اتوماتای فازی عمومی $\tilde{F}$ نامیده می‌شود.

**قضیه ۳-۷:** فرض کنید $E$ یک همنهشتی راست فازی روی تکواره‌ی آزاد $\Sigma^*$ بوده و $\hat{E}$ بخش صریح آن باشد. آنگاه

(۱) بخش صریح $\tilde{F}_E$ یک اتوماتای یکریخت با $\tilde{F}_{\hat{E}}$ است؛

(۲) هر زبان فازی $f\in F(\Sigma^*)$ که توسط $\tilde{F}_E$ شناسایی می‌شود، توسط $\tilde{F}_{\hat{E}}$ نیز شناسایی می‌شود.

**اثبات: (۱)** ابتدا فرض کنید $c=1$. طبق لم (۲-۱۹)، برای هر $u,v,p\in\Sigma^*$ دلخواه داریم،

$$\tilde{\delta}_E^*((E_u,\mu(u)),p,E_v)=1$$
$$\Leftrightarrow E(up,v)=1\Leftrightarrow \hat{E}(up,v)=1$$
$$\Leftrightarrow \hat{\tilde{\delta}}_E^*((\hat{E}_u,\mu(u)),p,\hat{E}_v)=1$$
$$\Leftrightarrow \hat{\tilde{\delta}}_E^*((\varphi(E_u),\mu(u)),p,\hat{E}_v)=1.$$

حال فرض کنید $c\in(0,1)$. در این صورت داریم،

$$\tilde{\delta}_E^*((E_u,\mu(u)),p,E_v)<c\Leftrightarrow$$
$$E(up,v)<c\Leftrightarrow \hat{E}(up,v)=0<c$$
$$\Leftrightarrow \hat{\tilde{\delta}}_E^*((\hat{E}_u,\mu(u)),p,\hat{E}_v)<c$$
$$\Leftrightarrow \hat{\tilde{\delta}}_E^*((\varphi(E_u),\mu(u)),p,\hat{E}_v)<c.$$

فرض کنید $q_{i_0}q_{i_1}...q_{i_m}\in der_i(u)$، در این صورت داریم:

$$\omega_{\hat{E}}(\varphi(E_u))=\omega_{\hat{E}}(\hat{E}_u)=\omega_{\hat{E}}(q_{i_m})=\omega_E(q_{i_m}).$$

همچنین، $\varphi(E_\Lambda)=\hat{E}_\Lambda$. بنابراین، $\varphi$ یک همریختی با آستانه‌ی $c$ از $\hat{\tilde{F}}_E$ به $\tilde{F}_{\hat{E}}$ است.

اگر $\hat{E}_u\in Q_{\hat{E}}$ را دلخواه در نظر بگیریم، آنگاه $\phi(E_u)=\hat{E}_u$. در نتیجه، $\varphi$ پوشا است.

اگر $\phi(E_u)=\phi(E_v)$، آنگاه $\hat{E}_u=\hat{E}_v$. بنابراین، طبق لم (۲-۱۹) خواهیم داشت؛ $E_u=E_v$ و در نتیجه $\varphi$ یک به یک است.

**(۲)** طبق قضیه‌ی (۳-۵)، اگر $f$ توسط $\tilde{F}_E$ شناسایی شود، آنگاه نسبت به $E$ توسیعی است، یعنی، $E\le E_f$ ($E_f$ تعریف شده توسط $(u,v)\in E_f\Leftrightarrow f(u)=f(v)$ را بزرگترین هم‌ارزی فازی که $f$ نسبت به آن توسیعی است در نظر می‌گیریم)، که ایجاب می‌کند $\hat{E}\subseteq\hat{E}_f=\ker f$. بنابراین، $f$ نسبت به $\hat{E}$ توسیعی است و طبق قضیه‌ی (۳-۵)، $f$ توسط $\tilde{F}_{\hat{E}}$ شناسایی می‌شود.

**مثال ۳-۸:** فرض کنید $\Sigma=\{x,y\}$. همنهشتی راست $\pi$ روی $\Sigma^*$ را با سه کلاس هم‌ارزی زیر در نظر بگیرید،

$$\pi_\Lambda=\{\Lambda\},\ \pi_y=\{yx^n\,|\,n\ge 0\},\pi_x=X^+/\pi_y.$$

برای هر $u,v\in\Sigma^*$، همنهشتی راست فازی $E$ روی $\Sigma^*$ را تعریف کنید:

$$E(u,v)=\begin{cases}1, & (u,v)\in\pi_x\times\pi_x\cup\pi_y\times\pi_y \\ & \cup\pi_\Lambda\times\pi_\Lambda \\ 0.5, & (u,v)\in\pi_x\times\pi_y\cup\pi_y\times\pi_x \\ 0, & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

و برای هر $u \in \Sigma^*$، زبان فازی $f \in F(\Sigma^*)$ را تعریف کنید:

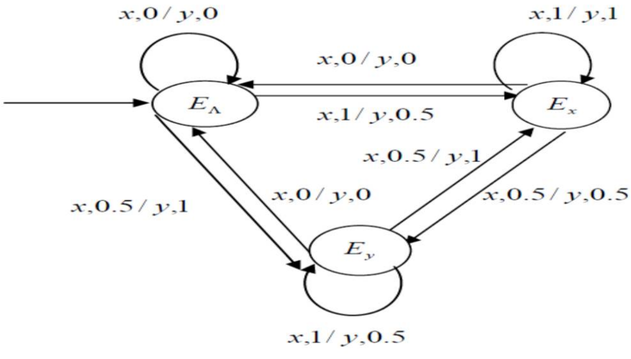
$$f(u) = \begin{cases} 1, & u \in \pi_x \\ 0, & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

با توجه به تعاریف بالا، $\pi$ بخش صریح $E$ است و از آنجا که $\pi \subseteq Ker\, f$، $f$ نسبت به $\pi$ توسیعی است؛ اما $f$ نسبت به $E$ توسیعی نیست، زیرا برای هر $u \in \pi_x$ و $v \in \pi_y$ داریم:

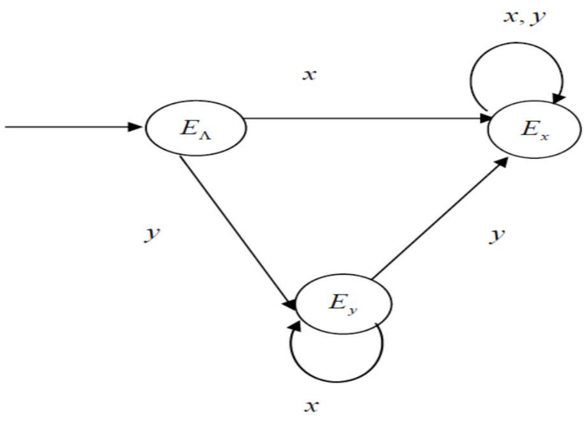
$$f(u) \otimes E(u,v) = 1 \otimes 0.5 = 0.5 > 0$$
$$= f(v).$$

بنابراین، نتیجه می‌شود که $f$ توسط $\tilde{F}_{\hat{E}}$ شناسایی می‌شود، اما توسط $\tilde{F}_E$ شناسایی نمی‌شود.
اتوماتای فازی عمومی $\tilde{F}_E$ و اتوماتای فازی عمومی $\tilde{F}_\pi(\pi = \hat{E})$ در نمودارهای (۲) و (۳) نشان داده شده‌اند.

**نمودار (۲): اتوماتای فازی عمومی $\tilde{F}_E$ مثال (۳-۸)**




**نمودار (۳): اتوماتای فازی عمومی $\tilde{F}_\pi(\pi = \hat{E})$ مثال (۳-۸)**



**مثال ۳-۹:** فرض کنید $r\in[0,0.5]$، یک عدد دلخواه باشد. مجموعه‌ی فازی $\tau$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$\tau=\begin{bmatrix} E_\Lambda & E_x & E_y \\ 0 & 1 & r \end{bmatrix}.$$

در نتیجه، اتوماتای فازی عمومی متناظر با همنهشتی راست $E$، که در نمودار (۲) نشان داده شده است، زبان فازی $f\in F(\Sigma^*)$ را توسط مجموعه‌ی فازی $\tau\in F(Q_E)$ شناسایی می‌کند و داریم:

$$f(u)=\begin{cases}1, & u\in\pi_x \\ 0.5, & u\in\pi_y \\ 0, & \pi=\Lambda\end{cases}.$$

**تعریف ۳-۱۰:** فرض کنید $\tilde{F}^*$ یک اتوماتای فازی عمومی ماگزیمال-مینیمال باشد.

برای هر $u\in\Sigma^*$ و $q\in Q$، مجموعه‌ی فازی $\tilde{R}_u\in F(Q)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{R}_u(q)= \bigvee_{q_0\in Q_{act}(t_0)}(\tilde{R}(q_0)\otimes\tilde{\delta}^*((q_0,\mu^{t_0}(q_0)),u,q)) =(\tilde{R}o\tilde{\delta}_u)(q)$$

جایی که،

$$\tilde{\delta}_u(q_0,q)=\tilde{\delta}^*((q_0,\mu^{t_0}(q_0)),u,q).$$

با توجه به تعریف اتوماتای فازی عمومی ماگزیمال-مینیمال برای هر $u,v\in\Sigma^*$ قرار می‌دهیم،

$$\tilde{\delta}^*((q,\mu^t(q)),uv,p)=\tilde{\delta}_u o\tilde{\delta}_v.$$

**تعریف ۳-۱۱:** برای هر $u,v\in\Sigma^*$، رابطه‌ی فازی $N_{\tilde{R}}$ روی تکواره‌ی آزاد $\Sigma^*$ به صورت،

$$N_{\tilde{R}}(u,v)=\bigwedge_{q\in Q}\tilde{R}_u(q)\leftrightarrow\tilde{R}_v(q)$$

تعریف می‌شود و رابطه‌ی فازی نرود $\tilde{F}^*$ نامیده می‌شود.

همچنین، برای هر $q\in Q$، $\tilde{R}^q\in F(Q)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{R}^q(p)=\begin{cases}1, & p=q \\ 0, & \text{در غیر اینصورت}.\end{cases}$$

در این حالت، رابطه‌ی فازی نرود را با $N_q$ نشان می‌دهیم. همچنین، برای هر $u\in\Sigma^*$ و $p\in Q$ داریم،

$$\tilde{R}^q_u(p)=\tilde{\delta}^*((q,\mu^t(q)),u,p)$$

و $N_q$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$N_q(u,v) =\bigwedge_{p\in Q}\tilde{\delta}^*((q,\mu^t(q)),u,p)\leftrightarrow \tilde{\delta}^*((q,\mu^t(q)),v,p).$$

**قضیه ۳-۱۲: فرض کنید** $\tilde{F}^*$ اتوماتای فازی عمومی ماگزیمال-مینیمال باشد. آنگاه رابطه‌ی فازی نرود $N_{\tilde{R}}$ یک همنهشتی راست فازی روی $\Sigma^*$ است.

**اثبات:** طبق قضیه‌ی نمایش والورد [۱۴] (این قضیه بیان می‌کند، که هر رابطه‌ی هم‌ارزی فازی توسط خانواده‌ای از مجموعه‌های فازی تولید می‌شود؛ همچنین، والورد ثابت کرده است که هر رابطه‌ی هم‌ارزی فازی توسط خانواده‌ای از کلاس‌های هم‌ارزی آن تولید می‌شود)، $N_{\tilde{R}}$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی فازی است.

حال، $u,v,w\in\Sigma^*$ را دلخواه در نظر بگیرید. در این صورت برای هر $p,q\in Q$ داریم:

$$\begin{aligned} N_{\tilde{R}}(u,v) &\le \tilde{R}_u(q)\leftrightarrow\tilde{R}_v(q) \\ &=(\tilde{R}o\tilde{\delta}_u)(q)\leftrightarrow(\tilde{R}o\tilde{\delta}_v)(q) \\ &\le(\tilde{R}o\tilde{\delta}_u)(q)\otimes\tilde{\delta}_w(q,p) \\ &\leftrightarrow(\tilde{R}o\tilde{\delta}_v)(q)\otimes\tilde{\delta}_w(q,p) \\ \Rightarrow N_{\tilde{R}}(u,v) &\le \\ \bigwedge_{q\in Q}\Big[(\tilde{R}o\tilde{\delta}_u)(q)&\otimes\tilde{\delta}_w(q,p)\end{aligned}$$

$$\leftrightarrow (\tilde{R}o\tilde{\delta}_v)(q)\otimes\tilde{\delta}_w(q,p)]$$
$$\leq [\bigvee_{q\in Q}(\tilde{R}o\tilde{\delta}_u)(q)\otimes\tilde{\delta}_w(q,p)]$$
$$\leftrightarrow [\bigvee_{q\in Q}(\tilde{R}o\tilde{\delta}_v)(q)\otimes\tilde{\delta}_w(q,p)]$$
$$=(\tilde{R}o\tilde{\delta}_u o\tilde{\delta}_w)(p)\leftrightarrow(\tilde{R}o\tilde{\delta}_v o\tilde{\delta}_w)(p)$$
$$=(\tilde{R}o\tilde{\delta}_{uw})(p)\leftrightarrow(\tilde{R}o\tilde{\delta}_{vw})(p)$$
$$=\tilde{R}_{uw}(p)\leftrightarrow\tilde{R}_{vw}(p)$$

و بنابراین،

$$N_{\tilde{R}}(u,v)\leq \bigwedge_{p\in Q}\tilde{R}_{uw}(p)\leftrightarrow\tilde{R}_{vw}(p)$$
$$=N_{\tilde{R}}(uw,vw).$$

از این‌رو، $N_{\tilde{R}}$ یک همنهشتی راست فازی روی $\Sigma^*$ است.

**تعریف ۳-۱۳:** طبق قضیه‌ی قبل، رابطه‌ی $N_{\tilde{R}}$ همنهشتی راست نرود $\tilde{F}^*$ نیز نامیده می‌شود. بخش صریح $N_{\tilde{R}}$، یک همنهشتی راست روی $\Sigma^*$ است و همنهشتی راست نرود $\tilde{F}^*$ نامیده می‌شود.

**قضیه ۳-۱۴:** فرض کنید $u,v\in\Sigma^*$ دلخواه باشند. در این صورت

$$(u,v)\in\hat{N}_{\tilde{R}}\Leftrightarrow\tilde{R}_u=\tilde{R}_v.$$

**اثبات:** برای هر $u,v\in\Sigma^*$ و $q\in Q$ داریم:

$$(u,v)\in\hat{N}_{\tilde{R}}$$
$$\Leftrightarrow\hat{N}_{\tilde{R}_u}=\hat{N}_{\tilde{R}_v}$$
$$\Leftrightarrow N_{\tilde{R}_u}=N_{\tilde{R}_v}\Leftrightarrow N_{\tilde{R}}(u,v)=1$$
$$\Leftrightarrow\bigwedge_{q\in Q}[\tilde{R}_u(q)\leftrightarrow\tilde{R}_v(q)]=1$$
$$\Leftrightarrow[\tilde{R}_u(q)\leftrightarrow\tilde{R}_v(q)]=1$$
$$\Leftrightarrow\tilde{R}_u(q)=\tilde{R}_v(q).$$

**تعریف ۳-۱۵:** فرض کنید $\tilde{F}^*$ یک اتوماتای فازی عمومی ماگزیمال-مینیمال با مجموعه‌ی غیرتهی از حالت‌های نهایی $(Q_{fin})$ باشد. یک شناساننده‌ی فازی عمومی ماگزیمال-مینیمال، $\tilde{F}^*$ نه تایی

$$(Q,\Sigma,\tilde{R},Z,\omega,\tilde{\delta}^*,F_1,F_2,\tau)$$

است، که در آن $\tau$ یک مجموعه‌ی فازی از حالت‌ها است، که مجموعه‌ی فازی از حالت‌های نهایی نامیده می‌شود.

**تعریف ۳-۱۶:** گوییم شناساننده‌ی فازی عمومی ماگزیمال-مینیمال، $\tilde{F}^*$ زبان $f$ را شناسایی می‌کند؛ هرگاه برای هر $u\in\Sigma^*$، $q_1,q_2,...,q_m\in der_i(u)$ و $q_m\in Q_{fin}$ موجود باشد، به طوری که داشته باشیم:

$$f(u)=\bigvee_{q_0\in Q_{act}(t_0),q_m\in Q_{fin}}\tilde{R}(q_0)\otimes$$
$$\tilde{\delta}^*((q_0,\mu^{t_0}(q_0)),u,q_m)\otimes\tau(q_m).$$

**تعریف ۳-۱۷:** فرض کنید $\tilde{F}^*$ یک شناساننده‌ی فازی عمومی ماگزیمال-مینیمال و $N$ همنهشتی راست نرود $\tilde{F}^*$ باشد. اتوماتای فازی عمومی ماگزیمال-مینیمال،

$$\tilde{F}_N^*=(Q_N,\Sigma,\tilde{R}_\Lambda,Z,\omega_N,\tilde{\delta}_N^*,F_1,F_2,\tau_N)$$

را متناظر با $N$ تشکیل می‌دهیم، که در آن $\tilde{R}_\Lambda$ حالت فازی آغازین یا همان کلاس هم‌ارزی تعیین شده توسط کلمه‌ی تهی ( $\Lambda$ ) است.
بعلاوه، مجموعه‌ی فازی $\tau_N:Q_N\to[0,1]$ را برای هر کلاس هم‌ارزی فازی $N_u\in Q_N$ و $u\in\Sigma^*$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tau_N(N_u)=\tilde{R}_u o\tau=L(\tilde{F}^*)(u)$$

$\tau_N$ خوش تعریف است؛ یعنی، اگر برای هر $u,v\in\Sigma^*$، $N_u=N_v$ آنگاه، $(u,v)\in\hat{N}$ و داریم، $\tilde{R}_u=\tilde{R}_v$ و بنابراین،

$$\tau_N(N_u)=\tilde{R}_u o\tau=\tilde{R}_v o\tau=\tau_N(N_v).$$

در نتیجه، $\tilde{F}_N^*$ یک شناسانده‌ی فازی عمومی ماگزیمال-مینیمال است.

**قضیه ۳-۱۸:** فرض کنید $\tilde{F}^*$ و $\tilde{F}_N^*$ شناسانده‌های فازی عمومی ماگزیمال-مینیمال و $N$ همنهشتی راست فازی نرود $\tilde{F}^*$ باشد. آنگاه $L(\tilde{F}_N^*) = L(\tilde{F}^*)$.

**اثبات:** به منظور ساده سازی نمادی قرار می‌دهیم، $L(\tilde{F}^*) = f$.

در این صورت، برای هر $u, v \in \Sigma^*$ داریم:

$$N(u,v) = \bigwedge_{q \in Q} [\tilde{R}_u(q) \leftrightarrow \tilde{R}_v(q)]$$
$$\le \bigwedge_{q \in Q} [\tilde{R}_u(q) \otimes \tau(q) \leftrightarrow \tilde{R}_v(q) \otimes \tau(q)]$$
$$\le [\bigvee_{q \in Q} \tilde{R}_u(q) \otimes \tau(q)] \leftrightarrow$$
$$[\bigvee_{q \in Q} \tilde{R}_v(q) \otimes \tau(q)]$$
$$= [\bigvee_{q \in Q} \tilde{R}(q_0) \otimes \tilde{\delta}^*((q_0, \mu^{t_0}(q_0)), u, q)$$
$$\otimes \tau(q)]$$
$$\leftrightarrow [\bigvee_{q \in Q} \tilde{R}(q_0) \otimes \tilde{\delta}^*((q_0, \mu^{t_0}(q_0)), v, q)$$
$$\otimes \tau(q)]$$
$$= f(u) \leftrightarrow f(v).$$

لذا، طبق تعریف $\tau_N$ و قضیه‌ی (۳-۵) نتیجه می‌گیریم، $f = L(\tilde{F}_N^*)$.

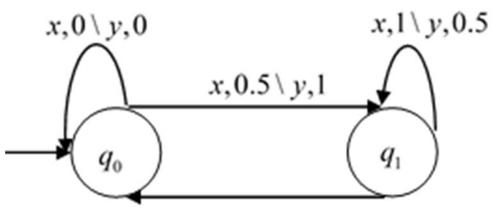
قضیه‌ی فوق نتیجه می‌دهد، که هر زبان فازی که توسط اتوماتای فازی عمومی ماگزیمال-مینیمال، $\tilde{F}^*$ با مجموعه حالت‌های نهایی
شناخته شود، توسط اتوماتای فازی عمومی ماگزیمال-مینیمال، $\tilde{F}_N^*$ نیز شناخته می‌شود، که $N$ همنهشتی راست فازی نرود $\tilde{F}^*$ است. اما، مثال زیر نشان می‌دهد که عکس این قضیه برقرار نیست.

**مثال ۳-۱۹.** فرض کنید $L$ ساختار گودل باشد. اتوماتای فازی عمومی ماگزیمال-مینیمال، $\tilde{F}^*$ را که در آن، $Q = \{q_0, q_1\}$، $\Sigma = \{x, y\}$ و نمودار انتقال آن به شکل زیر است، روی $L$ در نظر بگیرید.

در این مثال، همنهشتی راست فازی نرود $N$، از $\tilde{F}^*$ دقیقا" همنهشتی راست فازی $E$ از مثال (۳-۸) است؛ بنابراین، $\tilde{F}_N^*$ دقیقا" همان اتوماتای فازی عمومی نشان داده شده در نمودار (۲) است. حال برای هر $u \in \Sigma^*$، زبان فازی $f$ را که به صورت زیر تعریف می‌شود در نظر بگیرید:

$$f(u) = \begin{cases} 0, & u = \Lambda \\ 0.6, & u \in \pi_x \\ 0.8, & u \in \pi_y \end{cases}.$$

نمودار (۴): اتوماتای فازی عمومی $\tilde{F}$



در بالا $\pi$ همنهشتی راست تعریف شده روی $\Sigma^*$ در مثال (۳-۹) است. با تعاریف فوق $f$ نسبت به $N$ توسیعی است. از طرف دیگر، فرض کنید $\tilde{F}^*$ زبان فازی $f$ را توسط مجموعه‌ی فازی $\tau$ از حالت‌های نهایی شناسایی می‌کند. در این صورت،

$$\begin{aligned}
&f(\Lambda)= \\
&(\tilde{\delta}^*(q_0,\mu^{t_0}(q_0)),\Lambda,q_0)\wedge\tau(q_0)) \\
&\vee(\tilde{\delta}^*(q_0,\mu^{t_0}(q_0)),\Lambda,q_1)\wedge\tau(q_1)) \\
&=(1\wedge\tau(q_0))\vee(0\wedge\tau(q_1)) \\
&=\tau(q_1)
\end{aligned}$$

که $\tau(q_0)=0$ و

$$\begin{aligned}
&f(x)= \\
&(\tilde{\delta}^*(q_0,\mu^{t_0}(q_0)),x,q_0)\wedge\tau(q_0)) \\
&\vee(\tilde{\delta}^*(q_0,\mu^{t_0}(q_0)),x,q_1)\wedge\tau(q_1)) \\
&=(0\wedge 0)\vee(0.5\wedge\tau(q_1))= \\
&0.5\wedge\tau(q_1)\leq 0.5
\end{aligned}$$

که این غیر ممکن است، زیرا $f(x)=0.6$. بنابراین، $f$ قابل شناسایی توسط $\tilde{F}^*$ نیست.

**تعریف ۳-۲۰:** فرض کنید $\tilde{F}^*$ اتوماتای فازی عمومی ماگزیمال-مینیمال باشد.

برای هر $u,v\in\Sigma^*$ رابطه‌ی فازی $M_{\tilde{F}^*}$ روی تکواره‌ی آزاد $\Sigma^*$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&M_{\tilde{F}^*}(u,v)=\bigwedge_{q\in Q}N_q(u,v)= \\
&\bigwedge_{q,p\in Q}[\tilde{\delta}^*((q,\mu^t(q)),u,p)] \\
&\leftrightarrow[\tilde{\delta}^*((q,\mu^t(q)),v,p)] \\
&=\bigwedge_{q,p\in Q}[\tilde{\delta}_u(q,p)\leftrightarrow\tilde{\delta}_v(q,p)].
\end{aligned}$$

این رابطه، رابطه‌ی فازی مایهیل متناظر با اتوماتای فازی عمومی ماگزیمال-مینیمال، $\tilde{F}^*$ نامیده می‌شود. با تعریف بالا، برای هر $u,v\in\Sigma^*$، $M_{\tilde{F}^*}(u,v)$ به عنوان درجه‌ی تساوی روابط انتقال $\tilde{\delta}_u$ و $\tilde{\delta}_v$ در نظر گرفته می‌شود.

**قضیه ۳-۲۱:** فرض کنید $\tilde{F}^*$ اتوماتای فازی عمومی ماگزیمال-مینیمال باشد. آنگاه رابطه‌ی فازی مایهیل $M_{\tilde{F}^*}$ یک همنهشتی فازی روی $\Sigma^*$ است.

**اثبات:** با توجه به این که $M_{\tilde{F}^*}$ اشتراک همنهشتی‌های راست فازی $N_q$، $q\in Q$ است، نتیجه می‌گیریم یک همنهشتی راست فازی است. حال، برای اثبات این که $M_{\tilde{F}^*}$ یک همنهشتی چپ فازی است، $u,v,w\in\Sigma^*$ را دلخواه در نظر بگیرید. در این صورت برای هر $q,p\in Q$ نتیجه می‌شود،

$$\begin{aligned}
&M_{\tilde{F}^*}(u,v)\leq \\
&\bigwedge_{q'\in Q_{act}(t_{i+1})}[\tilde{\delta}^*((q,\mu^{t_i}(q)),w,q')\otimes \\
&\tilde{\delta}^*((q',\mu^{t_{i+1}}(q')),u,p)]\leftrightarrow \\
&[\tilde{\delta}^*((q,\mu^{t_i}(q)),w,q')\otimes \\
&\tilde{\delta}^*((q',\mu^{t_{i+1}}(q')),v,p)] \\
&\leq[\bigvee_{q'\in Q_{act}(t_{i+1})}\tilde{\delta}^*((q,\mu^{t_i}(q)),w,q')\otimes \\
&\tilde{\delta}^*((q',\mu^{t_{i+1}}(q')),u,p)]\leftrightarrow \\
&[\bigvee_{q'\in Q_{act}(t_{i+1})}\tilde{\delta}^*((q,\mu^{t_i}(q)),w,q')\otimes \\
&\tilde{\delta}^*((q',\mu^{t_{i+1}}(q')),v,p)] \\
&=\tilde{\delta}^*((q,\mu^{t_i}(q)),wu,p)\leftrightarrow \\
&\tilde{\delta}^*((q,\mu^{t_i}(q)),wv,p)
\end{aligned}$$

و از این رو،

$$\begin{aligned}
&M_{\tilde{F}^*}(u,v)\leq \\
&\bigwedge_{q,p\in Q}[\tilde{\delta}^*((q,\mu^{t_i}(q)),wu,p)] \\
&\leftrightarrow[\tilde{\delta}^*((q,\mu^{t_i}(q)),wv,p)] \\
&=M_{\tilde{F}^*}(wu,wv).
\end{aligned}$$

بنابراین، $M_{\tilde{F}^*}$ یک همنهشتی چپ فازی روی $\Sigma^*$ است.

**تعریف ۳-۲۲:** با توجه به قضیه‌ی قبل، رابطه‌ی $M_{\tilde{F}^*}$ همنهشتی فازی مایهیل متناظر با $\tilde{F}^*$ نامیده می‌شود. بخش صریح همنهشتی فازی مایهیل، $\hat{M}_{\tilde{F}^*}$ یک همنهشتی روی $\Sigma^*$ است و همنهشتی مایهیل $\tilde{F}^*$ نامیده می‌شود.

**قضیه ۳-۲۳:** فرض کنید $u,v \in \Sigma^*$ دلخواه باشند، در این صورت

$$(u,v) \in \hat{M}_{\tilde{F}^*} \Leftrightarrow \forall q,p \in Q$$
$$\tilde{\delta}^*((q,\mu^{t_i}(q)),u,p) =$$
$$\tilde{\delta}^*((q,\mu^{t_i}(q)),v,p) \Leftrightarrow \tilde{\delta}_u = \tilde{\delta}_v.$$

**اثبات:** روند اثبات مشابه با قضیه‌ی (۳-۱۴) است.

**قضیه ۳-۲۴:** فرض کنید $E$ یک همنهشتی راست فازی روی $\Sigma^*$ باشد. آنگاه

(۱) همنهشتی راست فازی نرود $\tilde{F}^*$ با $E$ برابر است.

(۲) همنهشتی فازی مایهیل $\tilde{F}^*$ همنهشتی باز (چپ) فازی $E$ است.

**اثبات: (۱)** همنهشتی راست فازی نرود $\tilde{F}^*$ را $N$ در نظر بگیرید. برای $u,v \in \Sigma^*$ دلخواه داریم،

$$N(u,v) = \bigwedge_{w\in\Sigma^*} [\tilde{\delta}_E^*((E_\Lambda,\mu(\Lambda)),u,E_w) \leftrightarrow$$
$$\tilde{\delta}_E^*((E_\Lambda,\mu(\Lambda)),v,E_w)]$$
$$= \bigwedge_{w\in\Sigma^*} E(u,w) \leftrightarrow E(v,w)$$
$$= \bigwedge_{w\in\Sigma^*} E_u(w) \leftrightarrow E_v(w)$$
$$= \bigvee_{w'\in\Sigma^*} E_u(w') \otimes E_v(w')$$
$$= \| E_u \otimes E_v \| = E(u,v)$$

بنابراین، $N = E$.

**(۲)** برای هر $x \in \Sigma^*$ داریم:

$$N_{E_x}(u,v) = \bigwedge_{w\in\Sigma^*} [\tilde{\delta}_E^*((E_x,\mu(x)),u,E_w)$$
$$\leftrightarrow \tilde{\delta}_E^*((E_x,\mu(x)),v,E_w)]$$
$$= \bigwedge_{w\in\Sigma^*} [E(xu,w) \leftrightarrow E(xv,w)]$$
$$= \bigvee_{w'\in\Sigma^*} E_{xu}(w') \otimes E_{xv}(w')$$
$$= \| E_{xu} \otimes E_{xv} \| = E(xu,xv)$$

در نتیجه،

$$M_{\tilde{F}^*}(u,v) = \bigwedge_{x\in\Sigma^*} N_{E_x}(u,v)$$
$$= \bigwedge_{x\in\Sigma^*} E(xu,xv) = E_l^o.$$

بنابراین، $M_{\tilde{F}^*} = E_l^o$.

## نتیجه‌گیری

قضیه‌ی مایهیل- نرود پایه‌ی نظری بهینه‌سازی مدل‌های محاسباتی بر پایه‌ی اتوماتا است و در این زمینه از اهمیت فراوانی برخوردار است. در واقع، قضیه‌ی مایهیل- نرود اساس کمینه‌سازی اتوماتا با تکنیک ادغام حالت‌های همنهشت است و در این مقاله به توسعه‌ی مفهوم همنهشتی در اتوماتای فازی عمومی بر پایه‌ی این قضیه پرداختیم. بدین منظور، نشان دادیم چگونه می‌توان با شروع از یک همنهشتی راست فازی روی تکواره‌ی آزاد $\Sigma^*$ یک اتوماتای فازی عمومی تشکیل داد (قضیه ۲-۳) و برعکس چگونه می‌توان از یک اتوماتای فازی عمومی max-min به مفاهیم همنهشتی راست فازی نرود و همنهشتی فازی مایهیل روی تکواره‌ی آزاد $\Sigma^*$ (قضیه ۳-۱۲ و ۳-۲۱) رسید. در آینده ساختار اتوماتای فازی عمومی متناظر با همنهشتی راست نرود را مورد بررسی قرار می‌دهیم که اتوماتای فازی عمومی نرود max-min نامیده می‌شود. همچنین، مفهوم اتوماتای فازی عمومی مایهیل max-min را تعریف می‌کیم و یک الگوریتم برای ساختن اتوماتای فوق ارائه می‌دهیم.

## فهرست منابع

[1] Abolpour Kh., Zahedi M. M., "Isomorphism between two BL-general fuzzy automata", Soft Computing, 16 (2012) 729-736.

[2] Abolpour Kh., Zahedi M. M., "BL-general fuzzy automata and accept behavior", Journal of Applied Mathematics and Computing, 38 (2012) 103-118.

[3] Abolpour K., Zahedi M. M., "General Fuzzy Automata Based on Complete Residuated Lattice-Valued", Iranian Journal of Fuzzy Systems, 14 (2017) 103-121.

[4] Doostfatemeh M., Kremer S.C., "New directions in fuzzy automata", International Journal of Approximate Reasoning, 38 (2005) 175-214.

[5] Ignjatovic J., Ciric M., Bogdanovic S., Petkovic T., "Myhill-Nerode type theory for fuzzy languages and automata", Fuzzy Sets and Systems, (2009) 1-37.

[6] Maletti A., "Myhill-Nerode theorem for recognizable tree series revisited", in: E. S. Laber, et al. (Eds.) LATIN 2008, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 4957, Springer, Heidelberg, 2008, pp. 106-120.

[7] Mordeson J.N., Malik D.S., "Fuzzy Automata and Languages, Theory and Applications", Chapman and Hall/CRC, London/Boca Raton, FL, 2002.

[8] Mordeson J.N., Nair P.S., "Fuzzy Mathematics, An Introduction for engineers and scientists", translated by R. Ameri, university of Mazandaran, Iran, 2003.

[9] Myhill J., "Finite automata and the representation of events", in: WADD TR-57-624, Wright Patterson AFB, Ohio, pp. 112-137.

[10] Nerode A., "Linear automata transformation", in: Proc. American Mathematical Society, Vol. 9, 1958, pp. 541-544.

[11] Santos E. S., "Fuzzy Automata and Languages, Information Sciences", 10 (1976) 193-197.

[12] Shamsizadeh M., Zahedi M. M., Abolpour Kh., "Admissible partition for Bl-general fuzzy automaton", Iranian Journal of Fuzzy Systems, In Press.

[13] Shamsizadeh M., Zahedi M. M., Abolpour Kh., "Bisimulation for BL-general fuzzy automata", Iranian Journal of Fuzzy Systems, 13 (2016) 35-50.

[14] Steinby M., "Classifying regular languages by their syntactic algebras", in: Results and Trends in Theoretical Computer Science, Graz, 1994, Lecture Notes in Computer Sciences, Vol. 812, Springer, Berlin, 1994, pp. 396-409.

[15] Wee W.G., "On generalization of adaptive algorithm and application of the fuzzy sets concept to pattern classification", Ph.D. Thesis, Purdue University, Lafayette, IN, 1967.

[16] Zadeh L .A., "Fuzzy sets", Inform. and Control, 8 (1965) 338-353.

[17] Zahedi M. M., Horry M., Abolpor Kh., "Bifuzzy (General) Topology on Max-Min General Fuzzy Automata ", Advances in Fuzz y Mathematics, Vol. 3, No. 1, (2008), 51-68.