

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال ششم، شماره بیست و پنجم، مرداد و شهریور ۱۳۹۹

شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸۸

JNRM

پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

حل عددی و آنالیز خطای معادله‌ی دیفرانسیل تاخیری خطی و غیرخطی

ابراهیم امینی*، علی عبادیان

(^۱) گروه ریاضی دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران
(^۲) دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی، دانشگاه ارومیه، ارومیه، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۶/۱۰ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۱۱/۲۱

چکیده

در این مقاله، معادلات دیفرانسیل تاخیری خطی و غیرخطی را حل می‌کنیم. بدین منظور با توجه به معادلات و شرایط حاکم بر آن، یک عملگر خطی تعریف می‌کنیم و با استفاده از توابع هسته بازتولید، پایه‌ی متعامد کامل برای فضای هسته‌ی بازتولید به‌دست می‌آوریم و جواب معادلات مذکور را بر حسب این توابع پایه‌ای به‌دست می‌آوریم. در واقع جواب تحلیلی به صورت یک سری نامتناهی نمایش داده می‌شود و با استفاده از یک روش تکراری، جواب تقریبی نظیر سری مذکور به‌دست آورده می‌شود. همچنین آنالیز همگرایی و خطا را برای روش مورد نظر در حل معادلات دیفرانسیل تاخیری بررسی می‌کنیم. در پایان برخی از مثال‌های عددی برای نشان دادن درستی و کاربرد روش پیشنهادی مورد بررسی قرار گرفته است و نتایج حاصل از این روش با جواب دقیق کارهای قبلی مقایسه می‌شوند. نتایج به‌دست آمده از مثال‌های عددی نشان می‌دهد که روش پیشنهادی مفید و مناسب است.

واژه‌های کلیدی: هسته‌ی بازتولید، معادله‌ی دیفرانسیل تاخیری، آنالیز خطا، آنالیز همگرایی.

۱- مقدمه

هسته‌ی بازتولید برای اولین بار در اوایل قرن بیستم در تحقیقات روی مسائل مقدار مرزی مورد استفاده قرار گرفت. در سال ۱۹۰۷، زارمبا اولین کسی بود که هسته‌ی متناظر با برخی از توابع خاص را معرفی و خاصیت بازتولید آنها را بیان نمود. اولین مرحله‌ی پیشرفت نظریه‌ی هسته‌ی بازتولید توسط مرسر انجام گرفت. او در سال‌های بین ۱۹۰۹ و ۱۹۱۱، در نظریه‌ی معادلات انتگرال، هسته‌های معین مثبتی را ارائه نمود که در خاصیت بازتولید صدق می‌کردند. پس از وقفه‌ای طولانی، ایده‌ی هسته‌ی بازتولید در تحقیقات سه ریاضیدان آلمانی به نام‌های زیگو (۱۹۲۱)، برگمن (۱۹۲۲) و باختر (۱۹۲۲) احیا شد. دومین مرحله‌ی پیشرفت نظریه‌ی هسته‌ی بازتولید توسط برگمن انجام شد. او هسته‌های بازتولید تک متغیره و چند متغیره برای برخی از توابع را معرفی کرد، که بعد از سی سال کار بر روی آنها به هسته‌های برگمن معروف شدند. مور در سال ۱۹۳۵، ارتباط بین هسته‌ها و ماتریس‌های هرمیتی معین مثبت را معرفی و کاربرد آنها در معادلات انتگرال را بررسی نمود. در سال‌های بین ۱۹۴۴ و ۱۹۵۰، نظریه‌ی هسته‌های بازتولید توسط آرونزان توسعه داده شد، به این ترتیب که روی هسته‌های بازتولید و کاربردشان روی معادلات دیفرانسیل جزئی مطالعاتی انجام داد. آرونزان در نظریه کلی هسته‌های بازتولید را ارائه نمود [۱]. برگمن و شیفر با توسعه ایده اولیه زارمبا در حل مسائل مقدار مرزی، هسته‌های بازتولید را به عنوان ابزاری قدرتمند در حل مسائل مقدار مرزی بیضوی معرفی کردند.

از سال ۱۹۸۰ به واسطه تلاش‌های کوی و همکاران توابع هسته‌ی بازتولید به شکل بسیار ساده‌ی چندجمله‌ای معرفی شدند. آنها توانستند روی روش‌هایی مبتنی بر فضای هسته‌ی بازتولید کار کنند. در سال‌های اخیر، محققان روش‌های مذکور را برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات دیفرانسیل جزئی و معادلات انتگرالی بکار برده‌اند [۲-۱۳].

روش‌های مبتنی بر هسته‌ی بازتولید بر پایه نظریه بهترین تقریب در فضای هیلبرت و استفاده از بسط فوریه می‌باشد. در روش‌های مذکور، ابتدا فضای هسته‌ی

بازتولید با توجه به صورت کلی مسئله و شرایط حاکم بر آن تعریف می‌شود. سپس هسته‌ی بازتولید به صورت تابعی چند ضابطه‌ای به دست می‌آید. اکنون توابع پایه متعامد یکه با استفاده از فرآیند متعامدسازی گرام-شمیت تولید می‌شود و به عنوان توابع پایه در تقریب جواب مورد استفاده قرار می‌گیرد.

در این مقاله، رده‌ای از معادلات دیفرانسیل تاخیری را در نظر گرفته و نحوه‌ی یافتن جواب تقریبی را در فضای هسته‌ی بازتولید برای معادلات مذکور مورد بحث قرار می‌دهیم.

معادله‌ی دیفرانسیل تاخیری معادله‌ای است که در آن مشتق مرتبه $(r+1)$ -ام تابع مجهول در یک زمان معین، بر حسب مقادیر تابع مجهول در زمان‌های قبل بیان می‌شود. در این مقاله معادلات دیفرانسیل تاخیری زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} y^{(r+1)}(t) + \sum_{k=0}^l \sum_{i=0}^r w_{k,i}(t) y^{(i)}(p_k t + q_k) \\ = G(t, y(p_1 t + q_1), \dots, y(p_l t + q_l)), \\ y^{(i)}(0) = 0, i = 0, 1, 2, \dots, r, \end{cases} \quad (1)$$

که در آن توابع

$$w_{k,i} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}, k = 0, \dots, l, i = 0, \dots, r$$

پیوسته هستند، تابع $y : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ متعلق به فضای $\mathcal{H}_2^m[0, T]$ ، $(m > r+2)$ و عبارت غیرخطی

$$G(t, v_1, \dots, v_l) : [0, T] \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$$

با شرط $v_1, \dots, v_l \in \mathcal{H}_2^m[0, T]$ متعلق به فضای هسته‌ی بازتولید $\mathcal{H}_2^l[0, T]$ است.

برای حل معادله‌ی دیفرانسیل تاخیری، ابتدا فضای هسته‌ی بازتولید $\mathcal{H}_2^m[0, T]$ را تعریف کرده، سپس وجود جواب تقریبی معادله‌ی مذکور را در فضای هسته‌ی بازتولید هیلبرت $\mathcal{H}_2^m[0, T]$ را بررسی می‌کنیم. در پایان، آنالیز خطای روش هسته‌ی بازتولید ارائه می‌گردد.

۲- فضای هسته‌ی بازتولید

قضیه ۲: [۳] فضای ${}_c\mathcal{H}_2^m[0, T]$ ، یک فضای هسته‌ی بازتولید هیلبرت و هسته‌ی بازتولید آن به صورت زیر است:

$$K_s^m(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{2m} (c_i s) t^{i-1}, & t \leq s, \\ \sum_{i=1}^{2m} (d_i s) t^{i-1}, & t > s, \end{cases}$$

که دارای $4m$ مجهول است که با حل $4m$ معادله‌ی زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} \frac{\partial^i K_s^m(0)}{\partial t^i} - (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{2m-i-1} K_s^m(0)}{\partial t^{2m-i-1}} = 0, \\ \quad i = r+1, \dots, m-1 \\ \frac{\partial^{2m-i-1} K_s^m(T)}{\partial t^{2m-i-1}} = 0, \quad i = r+1, \dots, m-1 \\ \frac{\partial^{(i)} K_s^m(0)}{\partial t^{(i)}} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, r \\ \frac{\partial^i K_s^m(t)}{\partial t^i} \Big|_{t=s^+} = \frac{\partial^i K_s^m(t)}{\partial t^i} \Big|_{t=s^-}, \quad i = 0, 1, \dots, 2m-2, \\ (-1)^m \left(\frac{\partial^{2m-1} K_s^m(t)}{\partial t^{2m-1}} \Big|_{t=s^+} - \frac{\partial^{2m-1} K_s^m(t)}{\partial t^{2m-1}} \Big|_{t=s^-} \right) = 1. \end{cases}$$

۳- جواب در فضای هسته‌ی بازتولید

فرض کنید جواب مسئله‌ی (۱) موجود و یکتا باشد. برای یافتن جواب در فضای هسته‌ی بازتولید ${}_c\mathcal{H}_2^m[0, T]$ ، ابتدا عملگر خطی \mathcal{L} روی فضای ${}_c\mathcal{H}_2^m[0, T]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{L}y(t) = y^{(r+1)}(t) + \sum_{k=1}^l \sum_{i=0}^r w_{k,i}(t) y^{(i)}(p_k t + q_k) \quad (۳)$$

بنابراین معادله‌ی دیفرانسیل تاخیری (۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} \mathcal{L}: {}_c\mathcal{H}_2^m[0, T] \rightarrow \mathcal{H}_2^1[0, T], \\ \mathcal{L}y(t) = G(t, y(p_1 t + q_1), \dots, y(p_l t + q_l)), \quad (۴) \\ y^{(i)}(0) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, r, \end{cases}$$

تعریف ۱: [۳] فضای $\mathcal{H}_2^1[0, T]$ را فضای متشکل از توابعی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{H}_2^1[0, T] = \{y : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \mid y \in \mathcal{AC}[0, T], y' \in L^2[0, T]\} \neq \emptyset$$

ضرب داخلی و نرم فضای $\mathcal{H}_2^1[0, T]$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\langle y, z \rangle_{\mathcal{H}_2^1} = y(0)z(0) + \int_0^T y'(t)z'(t) dt, \quad \forall y, z \in \mathcal{H}_2^1,$$

$$\|y\|_{\mathcal{H}_2^1} = \sqrt{\langle y, y \rangle_{\mathcal{H}_2^1}}, \quad \forall y \in \mathcal{H}_2^1.$$

قضیه ۱: [۳] فضای $\mathcal{H}_2^1[0, T]$ ، یک فضای هسته‌ی بازتولید هیلبرت و هسته‌ی بازتولید آن به صورت زیر است:

$$R_s(t) = \begin{cases} 1+s, & s \leq t, \\ 1+t, & s > t. \end{cases}$$

تعریف ۲: [۳] فضای ${}_c\mathcal{H}_2^m[0, T]$ را فضای متشکل از توابعی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$${}_c\mathcal{H}_2^m[0, T] = \{y \in \mathcal{H}_2^m[0, T] \mid y^{(j)}(0) = 0, j = 0, 1, \dots, r\}$$

که در آن

$$\mathcal{H}_2^m[0, T] = \{y : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \mid y^{(m-1)} \in \mathcal{AC}[0, T], y^{(m)} \in L^2[0, T]\}.$$

ضرب داخلی و نرم فضای ${}_c\mathcal{H}_2^m[0, T]$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\langle y, z \rangle_{{}_c\mathcal{H}_2^m} = \sum_{j=0}^{m-1} y^{(j)}(0)z^{(j)}(0) \quad (۲)$$

$$+ \int_0^T y(t)z^{(m)}(t) dt, \quad y, z \in {}_c\mathcal{H}_2^m[0, T],$$

و

$$\|y\|_{{}_c\mathcal{H}_2^m} = \sqrt{\langle y, y \rangle_{{}_c\mathcal{H}_2^m}}, \quad y \in {}_c\mathcal{H}_2^m[0, T].$$

از آنجایی که عملگر خطی تعریف شده کران‌دار است، لذا عملگر الحاقی \mathcal{L}^* از فضای هسته‌ی باز تولید $\mathcal{H}_2^1[0, T]$ به فضای ${}_c\mathcal{H}_2^m[0, T]$ به صورت یکتا تعیین می‌شود.

اکنون قرار می‌دهیم $\theta_i(t) = \mathcal{L}^* \rho_i(t)$. در قضیه‌ی زیر نشان می‌دهیم که دنباله‌ی $\{\theta_i(\tau)\}_{i=1}^\infty$ یک دستگاه متعامد کامل تشکیل می‌دهد.

قضیه ۴: فرض کنید $\{t_i\}_{i=1}^\infty$ زیرمجموعه چگال در دامنه $[0, T]$ باشد، در این صورت $\{\theta_i(\tau)\}_{i=1}^\infty$ یک دستگاه متعامد کامل از فضای ${}_c\mathcal{H}_2^m[0, T]$ است و داریم:

$$\theta_i(t) = \mathcal{L}_s K_s^m(t) \Big|_{s=t_i},$$

که در آن زیرنویس S در عملگر خطی \mathcal{L} بیانگر این است که عملگر \mathcal{L} به عنوان تابعی از S به کار برده می‌شود.

برهان: با توجه به خاصیت‌های هسته‌ی باز تولید

$$K_s^m(t) \text{ داریم:}$$

$$\begin{aligned} \theta_i(t) &= \mathcal{L}^* \rho_i(t) = \langle \mathcal{L}^* \rho_i(s), K_s^m(t) \rangle_{{}_c\mathcal{H}_2^m} \\ &= \langle \rho_i(s), \mathcal{L}_s K_s^m(t) \rangle_{\mathcal{H}_2^1} = \mathcal{L}_s K_s^m(t) \Big|_{s=t_i}, \end{aligned}$$

که در آن زیرنویس S در عملگر خطی \mathcal{L} بیانگر این است که عملگر \mathcal{L} به عنوان تابعی از S به کار برده می‌شود. می‌دانیم:

$$\begin{aligned} \langle y, \theta_i \rangle_{{}_c\mathcal{H}_2^m} &= \langle y, \mathcal{L}^* \rho_i \rangle_{{}_c\mathcal{H}_2^m} \\ &= \langle \mathcal{L}y, \rho_i \rangle_{\mathcal{H}_2^1} = \mathcal{L}y(t_i) = 0 \quad i \in N. \end{aligned}$$

با توجه به چگال بودن $\{t_i\}_{i=1}^\infty$ در دامنه $[0, T]$ و پیوستگی عملگر خطی داریم:

$$\mathcal{L}y(t) = 0, \forall t \in [0, T].$$

با توجه به یکتایی جواب نتیجه می‌شود:

$$y(t) = 0, \forall t \in [0, T].$$

که در آن \mathcal{Y} متعلق به فضای هسته‌ی بازتولید ${}_c\mathcal{H}_2^m[0, T]$ و G متعلق به فضای هسته‌ی بازتولید $\mathcal{H}_2^1[0, T]$ است.

قضیه ۳: عملگر

$$\mathcal{L}: {}_c\mathcal{H}_2^m[0, T] \rightarrow \mathcal{H}_2^1[0, T]$$

یک عملگر خطی کران‌دار است.

برهان: کافی است ثابت کنیم که

$$\|\mathcal{L}y\|_{\mathcal{H}_2^1} \leq C \|y\|_{{}_c\mathcal{H}_2^m}.$$

با استفاده از نرم فضای \mathcal{H}_2^1 داریم:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}y\|_{\mathcal{H}_2^1}^2 &= \langle \mathcal{L}y, \mathcal{L}y \rangle_{\mathcal{H}_2^1} \\ &= (\mathcal{L}y(0))^2 + \int_0^T ((\mathcal{L}y)'(t))^2 dt, \end{aligned}$$

می‌دانیم:

$$\begin{aligned} \langle y, \mathcal{L}_s K_s^m \rangle_{{}_c\mathcal{H}_2^m} &= \mathcal{L}y(s), \\ \langle y, \frac{d}{ds} \mathcal{L}_s K_s^m \rangle_{{}_c\mathcal{H}_2^m} &= \frac{d}{ds} \mathcal{L}y(s), \end{aligned}$$

با استفاده از نامساوی کشی-شوارتز داریم:

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}y(0)|^2 &\leq c_1 \|y\|_{{}_c\mathcal{H}_2^m}^2, \\ \int_0^T \left(\frac{d}{ds} \mathcal{L}y(s)\right)^2 ds &\leq c_2 \|y\|_{{}_c\mathcal{H}_2^m}^2, \end{aligned}$$

که در آن c_i ها برای $i=1, 2$ اعداد حقیقی مثبت هستند.

با ترکیب نامساوی‌های مذکور، برهان تمام است.

فرض کنید $\{t_i\}_{i=1}^\infty$ یک مجموعه چگال در بازه $[0, T]$ باشد، در این صورت قرار می‌دهیم:

$$\rho_i(t) = R_i(t),$$

که در آن $R_s(t)$ هسته‌ی فضای بازتولید $\mathcal{H}_2^1[0, T]$ است.

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle \ell_{y_i}(t), \rho_k(t) \rangle_{H_2^1} \bar{\theta}_i(t) \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle G(t, y(p_1 t + q_1), \dots, y(p_i t + q_i)), \rho_k(t) \rangle_{H_2^1} \bar{\theta}_i(t) \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} a_k \bar{\theta}_i(t),
 \end{aligned}$$

و بنابراین برهان تمام است.

در نتیجه جواب تقریبی مرتبه n -ام را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$y_n(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \beta_{ik} a_k \bar{\theta}_i(t) \in {}_c\mathcal{H}_2^m[0, T].$$

قضیه ۶: فرض کنید:

$$G(t, y(p_1 t + q_1), \dots, y(p_i t + q_i)) = G(t)$$

در این صورت داریم:

$$\mathcal{L}y_n(t_j) = G(t_j), j \leq n.$$

برهان: با توجه به رابطه (۵) داریم:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}y_n(t_j) &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \beta_{ik} a_k \mathcal{L}\bar{\theta}_i(t_j) \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \beta_{ik} a_k \langle \mathcal{L}\bar{\theta}_i(t), K_s^m(t) |_{s=t_j} \rangle_{\mathcal{H}_2^m} \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \beta_{ik} a_k \langle \mathcal{L}\bar{\theta}_i(t), \rho_j(t) \rangle_{\mathcal{H}_2^m} \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \beta_{ik} a_k \langle \bar{\theta}_i(t), \mathcal{L}_s K_s^m(t) |_{s=t_j} \rangle_{\mathcal{H}_2^m} \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \beta_{ik} a_k \langle \bar{\theta}_i(t), \theta_j(t) \rangle_{\mathcal{H}_2^m}
 \end{aligned}$$

هرگاه $j=1$ ، در این صورت داریم:

$$\begin{aligned}
 \beta_{11} \mathcal{L}y_n(t_1) &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \beta_{ik} a_k \langle \bar{\theta}_i(t), \bar{\theta}_1(t) \rangle_{\mathcal{H}_2^m} \\
 &= \beta_{11} a_1.
 \end{aligned}$$

و این نشان می‌دهد که $\{\theta_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ یک دستگاه متعامد کامل از فضای ${}_c\mathcal{H}_2^m[0, T]$ است و بنابراین برهان تمام است.

به منظور به دست آوردن دنباله‌ی متعامد یکه $\{\bar{\theta}_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ متعلق به فضای هسته‌ی بازتولید ${}_c\mathcal{H}_2^m[0, T]$ می‌توانیم از فرایند متعامدسازی گرام-اشمیت استفاده کنیم:

$$\bar{\theta}_i(t) = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \theta_k(t), i=1, 2, 3, \dots$$

که در آن ضرایب β_{ik} به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 \beta_{11} &= \frac{1}{\|\theta_1\|_{\mathcal{H}_2^m}}, \\
 \beta_{ii} &= \frac{1}{\sqrt{\|\theta_i\|_{\mathcal{H}_2^m}^2 - \sum_{k=1}^{i-1} \langle \theta_i, \bar{\theta}_k \rangle_{\mathcal{H}_2^m}^2}}, i \neq 1, \\
 \beta_{ij} &= \frac{-\sum_{k=1}^{i-1} \langle \theta_i, \bar{\theta}_k \rangle_{\mathcal{H}_2^m} \beta_{kj}}{\sqrt{\|\theta_i\|_{\mathcal{H}_2^m}^2 - \sum_{k=1}^{i-1} \langle \theta_i, \bar{\theta}_k \rangle_{\mathcal{H}_2^m}^2}}, i > j.
 \end{aligned}$$

قضیه ۵: فرض کنید $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ زیرمجموعه چگال در دامنه‌ی $[0, T]$ و جواب مسئله‌ی (۱) یکتا باشد، در این صورت جواب مسئله (۱) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} a_k \theta_i(t), a_k \\
 &= G(t, y(p_1 t + q_1), \dots, y(p_i t + q_i)) |_{t=t_k}. \tag{۵}
 \end{aligned}$$

برهان: از آنجایی که $\{\bar{\theta}_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ دستگاه متعامد یکه کامل متعلق به فضای هسته‌ی بازتولید ${}_c\mathcal{H}_2^m[0, T]$ است، لذا داریم:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle y(t), \bar{\theta}_i(t) \rangle_{\mathcal{H}_2^m} \bar{\theta}_i(t),$$

و نتیجه می‌شود:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \left\langle y(t), \ell^*(t) \right\rangle_{\mathcal{H}_2^m} \bar{\theta}_i(t)$$

با استفاده از نامساوی کوشی - شوارتز داریم:

$$|y_n^{(i)}(s) - y^{(i)}(s)| \leq \|y_n - y\|_{\mathcal{H}_2^m} \left\| \frac{\partial^i K_s^m}{\partial s^i} \right\|_{\mathcal{H}_2^m}.$$

حال با توجه به پیوستگی $\left\| \frac{\partial^i K_s^m}{\partial s^i} \right\|_{\mathcal{H}_2^m}$ نسبت به متغیر s در بازه $[0, T]$ داریم:

$$|y_n^{(i)}(s) - y^{(i)}(s)| \leq M_i \|y_n - y\|_{\mathcal{H}_2^m}.$$

که در آن M_i ها برای $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$ اعداد حقیقی مثبت هستند. بنابراین برهان تمام است.

۴- الگوریتم کمینه‌سازی

از آنجایی که a_k شامل عبارت‌های مجهول است، لذا جواب را نمی‌توان به صورت مستقیم از رابطه‌ی (۶) به دست آورد. یکی از الگوریتم‌هایی که برای محاسبه‌ی تقریب استفاده می‌شود، الگوریتم کمینه‌سازی است که در مورد آن بحث خواهیم کرد.

به منظور به دست آوردن a_k در رابطه‌ی (۶)، مجموع زیر را تعریف می‌کنیم:

$$T_n(\bar{\mathbf{a}}_n) = \sum_{k=1}^n [a_k - G(t, y_n(p_k t + q_1; \bar{\mathbf{a}}_n), \dots, y_n(p_l t + q_l; \bar{\mathbf{a}}_n))|_{t=t_k}]^2. \quad (7)$$

اکنون $\bar{\mathbf{a}}_n$ را طوری می‌یابیم که $T_n(\bar{\mathbf{a}}_n)$ را کمینه کند، سپس با یافتن $\bar{\mathbf{a}}_n$ ، جواب تقریبی را به دست می‌آوریم. به منظور کمینه‌سازی $T_n(\bar{\mathbf{a}}_n)$ می‌توان از الگوریتم زیر استفاده نمود:

گام ۱: مقدار اولیه‌ای برای $\bar{\mathbf{a}}_n$ انتخاب نموده و آن را با $\bar{\mathbf{a}}_n^0$ نمایش می‌دهیم.

گام ۲: با قرار دادن $\bar{\mathbf{a}}_n^0$ درون عبارت (۶) و به دست آوردن $y_n(t; \bar{\mathbf{a}}_n^0)$ داریم:

$$y_n(t; \bar{\mathbf{a}}_n^0) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \beta_{ik} a_k^0 \bar{\theta}_i(t).$$

از آنجایی که $\beta_{11} \neq 0$ ، لذا داریم:

$$\mathcal{L}y_n(t_1) = a_1 = G(t_1).$$

هرگاه $j = 2$ ، آن‌گاه داریم:

$$\begin{aligned} & \beta_{22} \mathcal{L}y_n(t_2) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \beta_{ik} a_k \langle \bar{\theta}_i(t), \beta_{22} \theta_2(t) \rangle_{\mathcal{H}_2^m} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \beta_{ik} a_k \langle \bar{\theta}_i(t), (\bar{\theta}_2(t) - \beta_{21} \theta_1(t)) \rangle_{\mathcal{H}_2^m} \\ &= \beta_{22} a_2, \end{aligned}$$

و بنابراین نتیجه می‌شود:

$$\mathcal{L}y_n(t_2) = a_2 = G(t_2).$$

علاوه بر این با استقرای ریاضی اثبات می‌شود که $\mathcal{L}y_n(t_j) = G(t_j)$ و برهان تمام است.

تقریب مرتبه‌ی n -ام برای جواب $y(t)$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} y_n(t; \bar{\mathbf{a}}_n) &= P_n y(t) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \beta_{ik} a_k \bar{\theta}_i(t), \quad \bar{\mathbf{a}}_n = (a_1, a_2, \dots, a_n). \end{aligned} \quad (8)$$

قضیه ۷: اگر دنباله‌ی $\{t_i\}_{i=1}^\infty$ زیرمجموعه چگال در دامنه‌ی $[0, T]$ باشد، آن‌گاه جواب تقریبی و مشتقات آن $y_n^{(i)}$ برای $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$ به طور یکنواخت به جواب دقیق و مشتقات آن $y^{(i)}$ همگرا می‌باشند.

برهان: فرض کنید K_s^m هسته‌ی بازتولید فضای $\mathcal{H}_2^m[0, T]$ باشد، در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} y_n(s) - y(s) &= \langle y_n - y, K_s^m \rangle_{\mathcal{H}_2^m} \\ &= y_n^{(i)}(s) - y^{(i)}(s) \\ &= (y_n(s) - y(s))^{(j)} \\ &= \frac{d^i}{ds^i} (\langle y_n - y, K_s^m \rangle_{\mathcal{H}_2^m}) \\ &= \langle y_n - y, \frac{\partial^i K_s^m}{\partial s^i} \rangle_{\mathcal{H}_2^m}. \end{aligned}$$

مسئله خطی ۲:

$$\begin{cases} y''(t) + \sum_{k=0}^l \sum_{i=0}^1 w_{k,i}(t) y^{(i)}(p_k t + q_k) \\ = G(t) \quad (10) \\ y(0) = 0, y'(0) = 0, t \in [0, T]. \end{cases}$$

قضیه ۸: فرض کنید y_n جواب تقریبی مسئله‌ی (۹) در فضای هسته باز تولید $\mathcal{H}_2^3[0, T]$ و همچنین وارون عملگر \mathcal{L} کران دار باشد. اگر افزایش یکنواخت $w_{k,i}, G \in C^2[0, T]$ آن گاه داریم:

$$\|y - y_n\|_{\infty} \leq dh, \quad h = \frac{T}{n-1},$$

که در آن d یک ثابت حقیقی مثبت است.

برهان: همان طوری که می‌دانیم با قراردادن $y_n(t)$ در معادله‌ی (۹) مانده $E_n(t)$ نتیجه می‌شود:

$$E_n(t) = y_n'(t) + \sum_{k=0}^l w_k(t) y_n(p_k t + q_k) - G(t).$$

با استفاده از قضیه ۶ داریم:

$$E_n(t_i) = 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

فرض کنید $p_i(E_n; t)$ نمایش چند جمله‌ای درون‌یاب E_n در نقاط t_i و t_{i+1} باشد، در این صورت خطای درونیابی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} E_n(t) &= E_n(t) - p_i(E_n; t)|_{[t_i, t_{i+1}]} \\ &= \frac{(t-t_i)}{(t_{i+1}-t_i)} \int_{t_{i+1}}^t (t_{i+1}-s) E_n''(s) ds \\ &\quad + \frac{(t-t_{i+1})}{(t_i-t_{i+1})} \int_{t_i}^t (t_i-s) E_n''(s) ds, \quad t \in [t_i, t_{i+1}]. \end{aligned} \quad (11)$$

از آنجایی که $E_n'' \in C[0, T]$ ، لذا داریم:

$$|E_n(t)| \leq a_i h^2, \quad t_i \leq t \leq t_{i+1},$$

که در آن a_i ها برای $i = 1, 2, \dots, n-1$ مقادیر ثابت حقیقی هستند. بنابراین داریم:

گام ۳: با قرار دادن $\bar{\mathbf{a}}_n^0$ درون رابطه‌ی (۷) و محاسبه $T_n(\bar{\mathbf{a}}_n^0)$ داریم:

$$\begin{aligned} T_n(\bar{\mathbf{a}}_n^0) &= \sum_{k=1}^n [a_k^0 - G(t, y_n(p_k t + q_k; \bar{\mathbf{a}}_n^0), \\ &\quad y_n(p_k t + q_k; \bar{\mathbf{a}}_n^0))]^2. \end{aligned}$$

گام ۴: اگر $T_n(\bar{\mathbf{a}}_n^0) < \varepsilon$ ، آن گاه محاسبات را متوقف می‌کنیم. وگرنه با محاسبه مقدار تابع غیرخطی

$$G(t, y_n(p_k t + q_k; \bar{\mathbf{a}}_n^0), y_n(p_k t + q_k; \bar{\mathbf{a}}_n^0))|_{t=t_k}$$

نقطه جدید $\bar{\mathbf{a}}_n^1$ را به دست می‌آوریم.

گام ۵: با قرار دادن $\bar{\mathbf{a}}_n^1$ درون رابطه‌ی (۷) و محاسبه $T_n(\bar{\mathbf{a}}_n^1)$ داریم:

$$\begin{aligned} T_n(\bar{\mathbf{a}}_n^1) &= \sum_{k=1}^n [a_k^1 - G(t, y_n(p_k t + q_k; \bar{\mathbf{a}}_n^1), \\ &\quad y_n(p_k t + q_k; \bar{\mathbf{a}}_n^1))]^2. \end{aligned}$$

گام ۶: اگر $T_n(\bar{\mathbf{a}}_n^1) < T_n(\bar{\mathbf{a}}_n^0)$ ، آن گاه $\bar{\mathbf{a}}_n^0$ را با $\bar{\mathbf{a}}_n^1$ جانشین کرده و به گام ۲ برمی‌گردیم وگرنه از نقطه $\bar{\mathbf{a}}_n^1$ صرف نظر نموده و نقطه جدید $\bar{\mathbf{a}}_n^0$ را انتخاب نموده و به گام ۲ بر می‌گردیم.

بنابراین مقدار تقریبی $\bar{\mathbf{a}}_k^p, k=1, 2, \dots, n$ را چنان به دست می‌آوریم به طوری که $T_n(\bar{\mathbf{a}}_k^p) < \varepsilon$ و در نتیجه جواب تقریبی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$y_n(t; \bar{\mathbf{a}}_n^p) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \beta_{ik} a_k^p \bar{\theta}_i(t). \quad (8)$$

۵- آنالیز خطا

در ادامه این فصل، آنالیز خطای روش در حل مسائل خطی زیر را ارائه می‌دهیم.

مسئله خطی ۱:

$$\begin{cases} y'(t) + \sum_{k=0}^l w_{k,i}(t) y^{(i)}(p_k t + q_k) \\ = G(t) \quad (9) \\ y(0) = 0, t \in [0, T]. \end{cases}$$

عملگر \mathcal{L} کران دار باشد. اگر $0=t_1 < t_2 < \dots < t_n=T$ افراز یکنواخت و $w_{k,i}, G \in C^4[0, T]$ ، آن گاه داریم:

$$\|y - y_n\|_{\infty} \leq dh^3, \quad h = \frac{T}{n-1},$$

که در آن d یک ثابت حقیقی مثبت است.

برهان: همان طوری که می‌دانیم:

$$E_n'(t_i) = 0, \quad 1 \leq i \leq n$$

و لذا با به کارگیری قضیه‌ی رول روی $E_n(t)$ داریم:

$$E_n'(\zeta_i) = 0, \quad \zeta_i \in [t_i, t_{i+1}], \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

همچنین با به کارگیری مجدد قضیه‌ی رول روی $E_n'(t)$ داریم:

$$E_n''(\sigma_i) = 0, \quad \sigma_i \in [\zeta_i, \zeta_{i+1}], \quad i = 1, 2, \dots, n-2.$$

فرض کنید $p_i(E_n''; t)$ نمایش چندجمله‌ای درون‌یاب E_n'' باشد، در این صورت داریم: σ_i و σ_{i+1} در نقاط $p_i(E_n''; t) = 0$.

با محاسبه‌ی خطای درونیاب روی بازه $[t_1, \sigma_2]$ داریم:

$$\begin{aligned} E_n''(t) &= E_n''(t) - p_1(E_n''; t)|_{[t_1, \sigma_2]} \\ &= \frac{(t - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_1)} \int_{\sigma_2}^t (\sigma_2 - s) E_n^{(4)}(s) ds \\ &+ \frac{(t - \sigma_2)}{(\sigma_1 - \sigma_2)} \int_{\sigma_1}^t (\sigma_1 - s) E_n^{(4)}(s) ds, \\ t &\in [t_1, \sigma_2]. \end{aligned}$$

از آنجایی که $E_n^{(4)} \in C[0, T]$ ، لذا داریم:

$$\max_{t \in [t_1, \sigma_2]} |E_n''(t)| \leq a_1 h^2, \quad (14)$$

که در آن a_1 ثابت حقیقی مثبت است. همچنین داریم:

$$\begin{aligned} E_n''(t) &= E_n''(t) - p_i(E_n''; t)|_{[\sigma_i, \sigma_{i+1}]} \\ &= \frac{(t - \sigma_i)}{(\sigma_{i+1} - \sigma_i)} \int_{\sigma_{i+1}}^t (\sigma_{i+1} - s) E_n^{(4)}(s) ds \end{aligned}$$

$$\max_{t \in [0, T]} |E_n(t)| \leq ah^2, \quad a = \max_{1 \leq i \leq n-1} a_i. \quad (12)$$

اکنون با مشتق‌گیری از رابطه‌ی (۱۱) نسبت به متغیر t داریم:

$$\begin{aligned} E_n'(t) &= \frac{1}{(t_{i+1} - t_i)} \int_{t_{i+1}}^t (t_{i+1} - s) E_n''(s) ds \\ &+ \frac{(t - t_i)}{(t_{i+1} - t_i)} (t_{i+1} - t) E_n''(t) \\ &+ \frac{1}{(t_i - t_{i+1})} \int_{t_i}^t (t_i - s) E_n''(s) ds \\ &+ \frac{(t - t_{i+1})}{(t_i - t_{i+1})} (t_i - t) E_n''(t), \quad t \in [t_i, t_{i+1}]. \end{aligned}$$

در هر زیربازه $[t_i, t_{i+1}]$ داریم:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} (E_n'(s))^2 ds \leq b_i h^3,$$

که در آن b_i ها برای $i = 1, 2, \dots, n-1$ مقادیر حقیقی مثبت هستند.

لذا ثابت $b > 0$ وجود دارد، به طوری که داریم:

$$\int_0^T (E_n'(s))^2 ds \leq bh^2. \quad (13)$$

با استفاده از روابط (۱۲) و (۱۳) داریم:

$$\|E_n\|_{\mathcal{H}_2^1[0, T]}^2 \leq ch^2,$$

که در آن C ثابت حقیقی است.

بنابراین مقدار ثابت حقیقی d وجود دارد، به طوری که داریم:

$$\|y - y_n\|_{\infty} \leq dh.$$

بنابراین برهان تمام است.

قضیه ۹: فرض کنید y_n جواب تقریبی مسئله‌ی (۹) در فضای هسته‌ی بازتولید $\mathcal{H}_2^4[0, T]$ و همچنین وارون

و با استفاده از روابط (۱۹) و (۲۰) رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\|E_n\|_{\mathcal{H}_2^1[0,T]}^2 \leq lh^6,$$

که در آن l ثابت حقیقی مثبت است.

بنابراین ثابت حقیقی d وجود دارد، به طوری که داریم:

$$\|y - y_n\|_{\infty} \leq dh^3,$$

و بنابراین برهان تمام است.

قضیه ۱: فرض کنید y_n جواب تقریبی مسئله‌ی (۹) در فضای هسته‌ی بازتولید $\mathcal{H}_2^1[0,T]$ و همچنین وارون عملگر \mathcal{L} کران دار باشد. اگر $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$ افراز یکنواخت و $w_{k,i}, G \in C^6[0,T]$ ، آن گاه داریم:

$$\|y - y_n\|_{\infty} \leq dh^5, \quad h = \frac{T}{n-1},$$

که در آن d یک ثابت حقیقی مثبت است.

برهان: همان طوری که می‌دانیم

$$E_n(t_i) = 0, \quad 0 < i < n$$

و لذا با به کارگیری قضیه‌ی رول داریم:

$$E_n'(\zeta_i) = 0, \quad \zeta_i \in [t_i, t_{i+1}], \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

با استفاده مکرر از قضیه‌ی رول داریم:

$$E_n''(\sigma_i) = 0, \quad \sigma_i \in [\zeta_i, \zeta_{i+1}], \quad i = 1, 2, \dots, n-2,$$

$$E_n'''(\zeta_i) = 0, \quad \zeta_i \in [\sigma_i, \sigma_{i+1}], \quad i = 1, 2, \dots, n-3,$$

$$E_n^{(4)}(\tau_i) = 0, \quad \tau_i \in [\zeta_i, \zeta_{i+1}], \quad i = 1, 2, \dots, n-4,$$

فرض کنید $p_i(E_n^{(4)}; t)$ چندجمله‌ای درون‌یاب $E_n^{(4)}$

در نقاط τ_i و τ_{i+1} باشد، در این صورت داریم:

$$p_i(E_n^{(4)}; t) = 0.$$

با محاسبه‌ی خطای درونیاب روی بازه $[t_i, \tau_i]$ داریم:

$$E_n^{(4)}(t) = E_n^{(4)}(t) - p_1(E_n^{(4)}; t)|_{[t_1, \tau_2]}$$

$$+ \frac{(t - \sigma_{i+1})}{(\sigma_i - \sigma_{i+1})} \int_{\sigma_i}^t (\sigma_i - s) E_n^{(4)}(s) ds, \quad (15)$$

$$t \in [\sigma_i, \sigma_{i+1}], \quad i = 2, 3, \dots, n-4.$$

لذا از رابطه‌ی (۱۵) نتیجه می‌شود:

$$|E_n''(t)| \leq a_i h^2, \quad \sigma_i \leq t \leq \sigma_{i+1} \quad (16)$$

$$, \quad i = 2, 3, \dots, n-4,$$

که در آن a_i ها برای $i = 2, 3, \dots, n-4$ ثابت‌های حقیقی مثبت هستند. به طور مشابه داریم:

$$\max_{t \in [\sigma_{n-3}, t_n]} |E_n''(t)| \leq a_{n-3} h^2, \quad (17)$$

که در آن a_{n-3} ثابت حقیقی مثبت است. با استفاده از روابط (۱۴)، (۱۶) و (۱۷) داریم:

$$\max_{t \in [0, T]} |E_n''(t)| \leq ah^2, \quad a = \max_{1 \leq i \leq n-3} \{a_i\}.$$

در هر زیربازه $[t_i, t_{i+1}]$ داریم:

$$|E_n'(t)| = \left| \int_{\zeta_i}^t E_n''(s) ds \right|$$

$$\leq \|E_n''(t)\|_{\infty} |t - \zeta_i| \leq b_i h^3,$$

که در آن b_i ها برای $i = 1, 2, \dots, n-1$ مقادیر حقیقی مثبت هستند. بنابراین نتیجه می‌شود:

$$|E_n'(t)| \leq bh^3, \quad t \in [0, T], \quad (18)$$

که در آن b ثابت حقیقی مثبت است.

به طور مشابه داریم:

$$|E_n(t)| \leq ch^4, \quad t \in [0, T], \quad (19)$$

که در آن C ثابت حقیقی مثبت است.

اکنون از رابطه‌ی (۱۸) می‌توان نشان داد که ثابت حقیقی

مثبت k وجود دارد به طوری که داریم:

$$\int_0^T (E_n'(s))^2 ds \leq kh^6. \quad (20)$$

$$\left| E_n^*(t) \right| = \left| \int_{\tau_i}^t E_n^{(4)}(s) ds \right|$$

$$\leq \| E_n^{(4)}(t) \|_{\infty} |t - \tau_i| \leq b_i h^3,$$

که در آن b_i ها به ازای $i = 1, 2, \dots, n - 3$ مقادیر حقیقی مثبت هستند. بنابراین داریم:

$$\| E_n^m(t) \| \leq b h^3, \quad t \in [0, T],$$

که در آن b ثابت حقیقی مثبت است. به طور مشابه داریم:

$$\| E_n''(t) \| \leq c h^4, \quad t \in [0, T],$$

$$\| E_n'(t) \| \leq k h^5, \quad t \in [0, T], \quad (24)$$

$$\| E_n(t) \| \leq l h^6, \quad t \in [0, T], \quad (25)$$

که در آن C, k و l مقادیر حقیقی مثبت هستند. با توجه به رابطه‌ی (۲۴) می‌توان نشان داد که ثابت حقیقی مثبت e وجود دارد به طوری که داریم:

$$\int_0^T (E_n'(s))^2 ds \leq e h^{10}. \quad (26)$$

از روابط (۲۵) و (۲۶) نتیجه می‌شود:

$$\| E_n \|_{H_{\tau_i}^1[0, T]}^2 \leq r h^{10},$$

که در آن r ثابت حقیقی مثبت است. و بنابراین ثابت حقیقی d وجود دارد به طوری که داریم:

$$\| y - y_n \|_{\infty} \leq d h^5,$$

و بنابراین برهان تمام است.

قضیه ۱۱: فرض کنید y_n جواب تقریبی مسئله‌ی (۱۰)

در فضای هسته‌ی بازتولید $\mathcal{H}_{\tau}^4[0, T]$ و همچنین وارون عملگر \mathcal{L} کران دار باشد. اگر $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$ افراز یکنواخت و $w_{k,i}, G \in C^2[0, T]$ ، آن گاه داریم:

$$= \frac{(t - \tau_1)}{(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\tau_2}^t (\tau_2 - s) E_n^{(6)}(s) ds$$

$$+ \frac{(t - \tau_2)}{(\tau_1 - \tau_2)} \int_{\tau_1}^t (\tau_1 - s) E_n^{(6)}(s) ds,$$

$$t \in [t_1, \tau_2].$$

از آنجایی که $E_n^{(6)} \in C[0, T]$ ، لذا داریم:

$$\max_{t \in [t_1, \tau_2]} | E_n^{(4)}(t) | \leq a_1 h^2,$$

که در آن a_1 مقدار ثابت حقیقی مثبت است.

علاوه بر این برای $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ داریم:

$$E_n^{(4)}(t) = E_n^{(4)}(t) - p_i(E_n^{(4)}; t) |_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}$$

$$= \frac{(t - \tau_i)}{(\tau_{i+1} - \tau_i)} \int_{\tau_{i+1}}^t (\tau_{i+1} - s) E_n^{(6)}(s) ds$$

$$+ \frac{(t - \tau_{i+1})}{(\tau_i - \tau_{i+1})} \int_{\tau_i}^t (\tau_i - s) E_n^{(6)}(s) ds$$

$$, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \quad i = 2, 3, \dots, n - 6. \quad (21)$$

بنابراین با استفاده از رابطه‌ی (۲۱) رابطه‌ی زیر را به دست می‌آوریم:

$$\| E_n^{(4)}(t) \| \leq a_i h^2, \quad \tau_i \leq t \leq \tau_{i+1}, \quad (22)$$

$$i = 2, 3, \dots, n - 6,$$

که در آن a_i ها به ازای $i = 2, 3, \dots, n - 6$ مقادیر حقیقی مثبت هستند. به طور مشابه می‌توان نشان داد:

$$\max_{t \in [\tau_{n-5}, t_n]} | E_n^{(4)}(t) | \leq a_{n-5} h^2, \quad (23)$$

که در آن a_{n-5} ثابت حقیقی مثبت است. با استفاده از روابط (۲۱)، (۲۲) و (۲۳) داریم:

$$\max_{t \in [0, T]} | E_n^{(4)}(t) | \leq a h^2, \quad a = \max_{1 \leq i \leq n-5} \{ a_i \}.$$

در هر زیربازه $[t_i, t_{i+1}]$ داریم:

به‌دست‌آمده از مثال‌ها را با روش‌های موجود دیگر [۴، ۱۲، ۱۴] مقایسه می‌کنیم.

در مثال‌های عددی، برای نشان دادن دقت جواب تقریبی، خطای مطلق زیر را گزارش می‌کنیم:

$$er_n^m(t) = |y_{exact}(t) - y_n(t)|, y_n \in_c \mathcal{H}_2^m.$$

مثال ۱: معادله دیفرانسیل تأخیری غیرخطی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} y'(t) = 1 - 2y^2\left(\frac{t}{2}\right), \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

برای این مسئله $y(t) = \sin(t)$ است.

برای حل این مثال، سه فضای هسته‌ی بازتولید $\mathcal{H}_2^3[0,1]$ ، $\mathcal{H}_2^4[0,1]$ و $\mathcal{H}_2^6[0,1]$ را در نظر می‌گیریم.

با انتخاب نقاط گره $\{t_i = \frac{i}{n}\}_{i=1}^n$ و انتخاب $n=15$

جواب تقریبی معادله‌ی مذکور را به‌دست می‌آوریم. در جدول ۱ مقادیر خطای مطلق گزارش شده است که گویای این مطلب است که خطای تقریب در

$$G(t) = e^{-t}(-2\sin(2t) + 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) + \sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos(t)).$$

$\mathcal{H}_2^3[0,1]$ نسبت به فضای $\mathcal{H}_2^3[0,1]$ و $\mathcal{H}_2^4[0,1]$ در برخی نقاط گرهی کمتر است. همان‌طور که در قضایای تقریب خطا بیان شد با افزایش مرتبه‌ی فضا بایست جواب تقریبی دقیق‌تر باشد. این موضوع در این مثال واضح است زیرا در فضاهای مرتبه بالاتر جواب تقریبی به نظر دقیق‌تر است. برای مثال ۱ در جواب تقریبی دقیق‌تر $\mathcal{H}_2^5[0,1]$ از $\mathcal{H}_2^3[0,1]$ و $\mathcal{H}_2^4[0,1]$ است.

$$\|y - y_n\|_\infty \leq dh, \quad h = \frac{T}{n-1},$$

که در آن d یک ثابت حقیقی مثبت است.

برهان: مشابه برهان قضیه‌ی ۸ می‌توان این قضیه را نیز اثبات نمود.

قضیه ۱۲: فرض کنید y_n جواب تقریبی مسئله‌ی (۱۰) در فضای هسته‌ی بازتولید $\mathcal{H}_2^6[0,T]$ و همچنین وارون عملگر \mathcal{L} کران‌دار باشد. اگر $0=t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$ افزایش یکنواخت و $G \in C^4[0,T]$ ، $w_{k,i}$ ، آن‌گاه داریم:

$$\|y - y_n\|_\infty \leq dh^3, \quad h = \frac{T}{n-1},$$

که در آن d ثابت حقیقی مثبت است.

برهان: مشابه برهان قضیه‌ی ۹ می‌توان این قضیه را نیز اثبات نمود.

قضیه ۱۳: فرض کنید y_n جواب تقریبی مسئله (۱۰) در فضای $\mathcal{H}_2^6[0,T]$ و همچنین وارون عملگر \mathcal{L} کران‌دار باشد. اگر $0=t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$ افزایش یکنواخت و $G \in C^6[0,T]$ ، $w_{k,i}$ ، آن‌گاه داریم:

$$\|y - y_n\|_\infty \leq dh^5, \quad h = \frac{T}{n-1},$$

که در آن d یک ثابت حقیقی مثبت است.

برهان: مشابه برهان قضیه‌ی ۱۰ می‌توان این قضیه را نیز اثبات نمود.

۵- مثال‌ها

در این قسمت برای نشان دادن دقت روش هسته‌ی بازتولید، سه مثال عددی را در نظر می‌گیریم. نتایج

جدول ۱: خطای مطلق جواب تقریبی در دو فضای هسته‌ی باز تولید مختلف (مثال ۱)

	er_{15}^3	er_{15}^4	er_{15}^5
t_i	$m=3$	$m=4$	$m=5$
0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	3.692×10^{-4}	1.558×10^{-4}	3.545×10^{-5}
0.2	8.389×10^{-4}	5.109×10^{-4}	8.575×10^{-4}
0.3	4.939×10^{-4}	1.754×10^{-4}	1.456×10^{-4}
0.4	5.142×10^{-3}	8.812×10^{-4}	3.593×10^{-4}
0.5	3.567×10^{-3}	3.173×10^{-4}	3.967×10^{-4}
0.6	7.176×10^{-4}	2.695×10^{-4}	2.714×10^{-4}
0.7	8.178×10^{-4}	1.918×10^{-4}	2.256×10^{-4}
0.8	9.374×10^{-3}	5.367×10^{-4}	2.173×10^{-4}
0.9	7.141×10^{-5}	2.799×10^{-5}	4.532×10^{-6}
1.0	6.194×10^{-4}	5.166×10^{-4}	2.617×10^{-4}

جدول ۲: مقایسه بین خطای مطلق جواب‌های روش هسته‌ی باز تولید و روش [۱۳] (مثال ۲)

	er_{50}^3 $m=3$	er_{50}^4 $m=4$	<i>Doha & etal. li 0</i> [۱۳] $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$	<i>Doha & etal. li 0</i> [۱۳] $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$
t_i			$k = 24$	$k = 24$
0.00	0.00	0.00	1.890×10^{-1}	3.850×10^{-2}
0.5	3.961×10^{-6}	4.468×10^{-7}	1.625×10^{-5}	7.151×10^{-5}
1.0	8.318×10^{-6}	4.272×10^{-7}	1.223×10^{-4}	2.376×10^{-4}
1.5	5.227×10^{-6}	3.570×10^{-6}	4.940×10^{-5}	2.272×10^{-4}
2.0	3.102×10^{-4}	4.761×10^{-4}	2.163×10^{-5}	4.426×10^{-4}
2.5	5.917×10^{-3}	1.179×10^{-5}	1.360×10^{-4}	3.820×10^{-4}
3.0	1.826×10^{-3}	4.623×10^{-5}	1.879×10^{-4}	1.726×10^{-4}
3.5	5.603×10^{-3}	2.789×10^{-3}	1.105×10^{-3}	4.221×10^{-4}
4.0	1.876×10^{-3}	4.762×10^{-4}	1.029×10^{-3}	2.764×10^{-4}

جدول ۳: مقایسه بین خطای مطلق روش هسته‌ی باز تولید و روش‌های [۱۴، ۱۵] (مثال ۳)

	er_{40}^4 $m=4$	er_{40}^5 $m=5$	<i>Tohidi & etal. li 2</i> [15] $k = 5$	<i>Yalinbas & etal. li 1</i> [14] $k = 5$
t_i				
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.2	7.981×10^{-8}	6.515×10^{-8}	3.69×10^{-7}	4.75×10^{-6}
0.4	6.564×10^{-7}	9.341×10^{-8}	2.37×10^{-6}	6.14×10^{-5}
0.6	4.109×10^{-8}	5.050×10^{-8}	5.96×10^{-6}	2.48×10^{-4}
0.8	4.672×10^{-8}	2.721×10^{-8}	3.48×10^{-5}	6.20×10^{-4}
1.0	3.254×10^{-8}	2.412×10^{-8}	2.03×10^{-4}	1.19×10^{-3}

مثال ۲: در این مثال، معادله‌ی تأخیری خطی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t) + w_1(t)y\left(\frac{t}{2}\right) \\ + w_2(t)y\left(\frac{t}{4}\right) + G(t), \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

که در آن

$$\begin{aligned} w_1(t) &= -e^{-0.5t} \sin(0.5t), w_2(t) \\ &= -2e^{-0.75t} \cos(0.5t) \sin(0.25t), \end{aligned}$$

و برای این مسئله $y(t) = e^{-2t} \cos(2t)$ است.

برای حل این مثال دو فضای هسته‌ی بازتولید $\mathcal{H}_2^2[0,4]$ و $\mathcal{H}_2^4[0,4]$ را در نظر می‌گیریم. با انتخاب نقاط گرهی $\{t_i = \frac{4i}{n}\}_{i=1}^n$ و انتخاب $n=50$ ، جواب تقریبی معادله‌ی مذکور را به دست می‌آوریم. مقادیر خطای مطلق برای نقاط گرهی در جدول ۲ گزارش شده است. جدول ۲ نشان می‌دهد که جواب تقریبی به دست آمده در دو فضای جواب $\mathcal{H}_2^4[0,4]$ و $\mathcal{H}_2^2[0,4]$ دقیق‌تر از نتایج مراجع [۴] است.

مثال ۳: معادله‌ی دیفرانسیل تأخیری خطی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} y''(t) = -y(t) - y(t-0.3) + e^{-t+0.3}, \\ y(0) = 1, y'(0) = -1, y''(0) = 1, \end{cases}$$

برای این مسئله $y(t) = e^{-t}$ است.

برای حل این مثال دو فضای هسته‌ی بازتولید $\mathcal{H}_2^4[0,1]$ و $\mathcal{H}_2^5[0,1]$ را در نظر می‌گیریم. با انتخاب نقاط گرهی $\{t_i = \frac{i}{n}\}_{i=1}^n$ و انتخاب $n=40$ ، جواب تقریبی معادله‌ی مذکور را به دست می‌آوریم. مقادیر خطای مطلق برای نقاط گرهی در جدول ۳ گزارش شده است. نتایج جدول ۳ نشان می‌دهد تقریب‌های به دست آمده از روش در فضای هسته باز تولید $\mathcal{H}_2^5[0,1]$ و $\mathcal{H}_2^4[0,1]$ دقیق‌تر از نتایج مراجع [۱۲-۱۴] است.

۶- نتیجه‌گیری و پیشنهادات

در این مقاله، روش هسته‌ی بازتولید، معادلات دیفرانسیل تأخیری را در نظر گرفتیم. ابتدا فضای هسته‌ی بازتولید را با توجه به صورت کلی مسئله و شرایط حاکم بر آن تعریف کرده و سپس هسته‌ی بازتولید را با حل دستگاهی از معادلات جبری خطی به صورت تابعی چند ضابطه‌ای به دست آوردیم. توابع پایه متعامد یکه را با فرایند متعامدسازی گرام-اشمیت تشکیل داده و به عنوان توابع پایه در تقریب جواب، مورد استفاده قرار دادیم. همان طوری که مشاهده شد، برای حل مسائل غیرخطی، سری جواب ساخته شده شامل عبارت‌های مجهول است، لذا نمی‌توانیم جواب را به طور مستقیم به دست آوریم. بنابراین برای به دست آوردن جواب تقریبی، یک الگوریتم کمینه‌سازی پیشنهاد کردیم. همچنین چندین تقریب خطا زمانی که مسئله خطی است، ارائه نمودیم که در جدول ۴ خلاصه‌ای از آن آورده شده است.

جدول ۴: مرتبه‌ی خطا در فضای هسته‌ی باز تولی $\mathcal{H}_2^m[0,T]$.

$r=1$	$m=3$	$m=4$	$m=5$
	$O(h)$	$O(h^2)$	$O(h^3)$
$r=2$	$m=4$	$m=5$	$m=6$
	$O(h)$	$O(h^2)$	$O(h^3)$

Equations Based on Reproducing Kernel and Quasilinearization Methods, *Abstract and Applied Analysis*, 1-8.

[9] Ghasemi, M., Fardi, M. and Khoshsiar Ghaziani, R. (2015). Numerical solution of nonlinear delay differential equations of fractional order in reproducing kernel Hilbert space, *Applied Mathematics and Computation*, **268**, 815-831.

[10] Ismail, H. N., Raslan, K. and Rabboh, A. A. (2004). Adomian decomposition method for Burgers–Huxley and Burgers–Fisher equations. *Applied Mathematics and Computation*, **159**, 291-301.

[11] Jiang, W., Cui, M. and Lin, Y. (2010). Anti-periodic solutions for Rayleigh-type equations via the reproducing kernel Hilbert space method, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **15**, 1754-1758.

[12] Tohidi, E., Bhrawy, A. H. and Erfani, K. (2013). A collocation method based on Bernoulli operational matrix for numerical solution of generalized pantograph equation, *Applied Mathematical Modelling*, **37**, 4283-4294.

[13] Vahdati, S., Fardi, M. and Ghasemi, M. (2018). Option pricing using a computational method based on reproducing kernel, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **328**, 252-266.

[14] Yalinbas, S., Aynigul, M. and Sezer, M. (2011). A collocation method using Hermite polynomials for approximate solution of pantograph equations. *Journal of the Franklin Institute*, **348**, 1128-1139.

[15] Zhou, Y., Cui, M. and Lin, Y. (2009). Numerical algorithm for parabolic

فهرست منابع

[1] Aronszajn, N. (1951). *Theory of reproducing kernels*. Cambridge, MA: Harvard University.

[2] Cui, M. and Geng, F. (2007). A computational method for solving one-dimensional variable-coefficient Burgers equation. *Applied Mathematics and Computation*, **188**, 1389-1401.

[3] Cui, M. and Lin, Y. (2009). *Nonlinear numerical analysis in the reproducing Kernel space*. NY: Nova Science Publ, New York, .

[4] Doha, E.H., Bhrawy, A.H., Blaleanu, D. and Hafez, R. M. (2014). A new Jacobi rational–Gauss collocation method for numerical solution of generalized pantograph equations. *Applied Numerical Mathematics*, **77**, 43-54.

[5] Fardi, M., Ghasemi, M. (2016). Solving nonlocal initial-boundary value problems for parabolic and hyperbolic integro-differential equations in reproducing kernel Hilbert space, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **3**, 174-198.

[6] Fardi, M., Ghasemi, M. and Khoshsiar Ghaziani, R. (2016). The Reproducing Kernel Method for Some Variational Problems Depending on Indefinite Integrals, *Mathematical Modelling and Analysis*, **21**, 412-429.

[7] Geng, F. and Cui, M. (2012). A reproducing kernel method for solving nonlocal fractional boundary value problems, *Applied mathematics Letters*, **25**, 818-823.

[8] Geng, F. Z. and Li, X. M. (2012). A New Method for Riccati Differential

problems with non- Classical conditions,
Journal of Computational and Applied
Mathematics, **230**, 770–780.

