دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
دوره ششم، شماره بیست و سوم، فروردین و اردیبهشت ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

روش تحلیل هموتوپی و کاربرد آن برای حل معادله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد تاخیری با رفتار لایه مرزی

حسین صحیحی[1]، **سعید عباس بندی**[2*]، **توفیق الهویرنلو**[1]
[1]گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات، تهران، ایران
[2]گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۶/۰۹/۲۱   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۸/۰۴/۰۲

چکیده

در این مقاله یک روش تحلیلی بر پایه‌ی روش تحلیل هموتوپی برای حل معادله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد تاخیری که دارای رفتار لایه مرزی می‌باشد، ارائه شده است. تفاوت روش تحلیل هموتوپی با روشهای تحلیلی دیگر فراهم کردن یک راه ساده برای کنترل ناحیه همگرایی سری جواب معادله با استفاده از پارامتر کمکی $\hbar$ است. در حالت کلی بدست آوردن یک جواب تقریبی برای معادله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد تاخیری بسیار سخت می‌باشد. معادله دیفرانسیل- تفاضلی اختشاشی منفرد تاخیری بسته به مقادیر پارامتر تاخیر مسئله دارای یک رفتار لایه مرزی در ابتدا یا انتهای بازه‌ی تعریف خود است و وجود این رفتار لایه مرزی سبب شده، روشهای عددی که در حل این مسائل استفاده شده نتوانند تقریب‌های خوبی از جواب مسئله را فراهم آورند، از این رو استفاده از روشهای نیمه تحلیلی قدرتمندی چون روش تحلیل هموتوپی می تواند تقریب‌های بسیار بهتری را فراهم آورد. در این مقاله صحت و درستی و همچنین دقت بالای جوابهای حاصل از حل معادله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد تاخیری با استفاده از روش تحلیل هموتوپی با آوردن دو مثال عددی نشان داده شده است، با مقایسه جوابهای به دست آمده از روش تحلیل هموتوپی با روشهای عددی دیگر متوجه می‌شویم که استفاده از روش تحلیل هموتوپی برای حل معادله مذکور علاوه بر راحتی در پیاده سازی آن روی این نوع مسائل، نتایج بسیار بهتری را نیز فراهم می‌آورد.

کلمات کلیدی: روش تحلیل هموتوپی، معادله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد، جواب تحلیلی، سری جواب.

[*]عهده‌دار مکاتبات: Email: abbasbandy@ikiu.ac.ir; abbasbandy@yahoo.com (S. Abbasbandy)

1. مقدمه

روش تحلیل هموتوپی یک روش تحلیلی قدرتمند و ساده برای حل مسائل شدیدا غیرخطی به دست آمده از علوم مختلف مهندسی است که جواب مسئله را به صورت یک سری می دهد. روش تحلیل هموتوپی اولین بار توسط لیائو معرفی شد [1]، همچنین مفاهیم پایه ای این روش به همراه مثال های مختلف غیر خطی در [2,3] آمده است. روش تحلیل هموتوپی اغلب مستقل از پارامتر های کوچک و بزرگ مربوط به مسائل ریاضی یا فیزیک است، به طور مثال استفاده از روش تحلیل هموتوپی برای حل مسائل مقدار مرزی اختشاشی منفرد [4]، نشان می‌دهد که این تکنیک مستقل از پارامتر اختشاش مسئله مقدار مرزی اختشاشی منفرد (ε) است. روش تحلیل هموتوپی یک راه مناسب برای تضمین همگرایی سری جواب با استفاده از پارامتر کمکی $\hbar$ ارائه می‌کند که در آن کنترل ناحیه همگرایی سری جواب با استفاده از این پارامتر کمکی انجام می شود. یکی از مزیت های روش تحلیل هموتوپی آزادی در انتخاب پارامتر کمکی $\hbar$ و همچنین عملگر خطی کمکی $\mathcal{L}$ و پایه‌هایی که می‌خواهیم براساس آن جواب مسئله را تقریب بزنیم، است. در این مقاله روش تحلیل هموتوپی برای حل معادله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد تاخیری که دارای رفتار لایه مرزی است، به کار گرفته شده که جواب حاصل از این تکنیک یک سری می‌باشد که کنترل همگرایی این سری با انتخاب درست پارامتر کمکی $\hbar$ انجام می شود.

در این مقاله معادله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد تاخیری که دارای رفتار لایه مرزی در همسایگی $x = 0$ و $x = 1$ است را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} \varepsilon\, y''(x) + p(x)y'(x-\delta) + q(x)y(x) = f(x), \\ x \in [0,1],\ y(x) = \varphi(x) \quad x \in [-\delta, 0], \quad y(1) = \gamma. \end{cases} \quad (1)$$

که ε و δ پارامتر های کوچکی هستند و $0 < \varepsilon \ll 1$ و $0 < \delta \ll 1$ و $p(x), q(x), f(x), \varphi(x)$ تابع هایی به قدر کافی هموار هستند و γ یک ثابت است، با استفاده از بسط سری تیلور برای جمله $y'(x-\delta)$ حول x داریم [8,13]،

$$y'(x-\delta) \approx y'(x) - \delta y''(x)$$

بنابراین مسئله (1) تبدیل می شود به،

$$\begin{cases} (\varepsilon - \delta\, p(x))\, y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x), \\ x \in [0,1], \quad y(0) = \varphi(0), \quad y(1) = \gamma. \end{cases} \quad (2)$$

اگر $\forall x \in [0,1]$، $p(x) > 0$ و $(\varepsilon - \delta\, p(x)) > 0$، آنگاه لایه مرزی مسئله (2) در سمت چپ بازه تعریف خود وجود خواهد داشت، و اگر $\forall x \in [0,1]$، $p(x) < 0$ یا $p(x) > 0$ و $(\varepsilon - \delta\, p(x)) < 0$، آنگاه لایه مرزی مسئله (2) در سمت راست بازه [0,1] وجود خواهد داشت.

ادامه مقاله به صورت زیر بخش بندی شده است، در بخش 2، روش تحلیل هموتوپی برای حل معادله (2) آورده شده و همچنین قضیه مربوط به همگرایی این تکنیک ارائه و اثبات شده است. در بخش3، دو مثال عددی با استفاده از این تکنیک حل شده و خطاهای بدست آمده با روشهای دیگر مقایسه شده است. در بخش 4، نتیجه گیری کلی از این روش را ارائه کرده و پیشنهاداتی را برای حل مسائل دیگر به کمک این روش مطرح می‌کنیم.

2. روش تحلیل هموتوپی

در این بخش مفاهیم پایه‌ای روش تحلیل هموتوپی برای حل معادله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد تاخیری که دارای رفتار لایه مرزی است، معرفی شده و همچنین قضیه همگرایی برای این تکنیک آورده شده است.

2.1 معادله دگردیسی مرتبه صفر

مسئله (2) را با شرایط مرزی $y(0) = \varphi(0)$ و $y(1) = \gamma$ را در نظر می گیریم، $y_0(x)$ را به عنوان حدس اولیه از جواب مسئله (2) در نظر گرفته که در شرایط مرزی مسئله (2) صدق می‌کند،

$$\begin{cases} y_0(0) = \varphi(0), \\ y_0(1) = \gamma. \end{cases} \quad (3)$$

بر اساس مفاهیم پایه‌ای روش تحلیل هموتوپی، قرار می‌دهیم $q \in [0,1]$ و q را پارامتر نشانده می‌نامیم. روش تحلیل هموتوپی بر پایه‌ی یک نگاشت پیوسته $y(x) \to \phi(x;q)$ است به طوری که پارامتر نشانده q از مقدار 0 به سمت مقدار 1 افزایش پیدا می‌کند و $\phi(x;q)$ از حدس اولیه جواب مسئله (2) یعنی، $y_0(x)$ به جواب دقیق مسئله که همان $y(x)$ است،

تغییر پیدا می‌کند. عملگر خطی کمکی $\mathcal{L}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\mathcal{L}[\phi(x;q)] = \left(\varepsilon - \delta\, \mathrm{p(x)}\right)\frac{\partial^2 \phi(x;q)}{\partial x^2} + p(x)\frac{\partial \phi(x;q)}{\partial x}, \quad q \in [0,1]. \qquad (4)$$

عملگر $\mathcal{N}[\phi(x;q)]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\mathcal{N}[\phi(x;q)] = \left(\varepsilon - \delta\, \mathrm{p(x)}\right)\frac{\partial^2 \phi(x;q)}{\partial x^2} + p(x)\frac{\partial \phi(x;q)}{\partial x} + q(x)\phi(x;q) - f(x), \qquad (5)$$

پارامتر کمکی $\hbar$ و تابع کمکی $\mathcal{H}(x)$ را طوری در نظر می‌گیریم که $\hbar \neq 0$ و $\mathcal{H}(x) \neq 0$ با استفاده از پارامتر نشانده q که $q \in [0,1]$، یک خانواده از معادله‌هایی به صورت زیر،

$$(1-q)\mathcal{L}[\phi(x;q) - y_0(x)] = q\,\hbar\,\mathcal{H}(x)\,\mathcal{N}[\phi(x;q)], \qquad (٦)$$

همراه با شرایط مرزی،

$$\begin{cases} y_0(0) = \phi(0;q) = \varphi(0), \\ y_0(1) = \phi(1;q) = \gamma, \end{cases} \qquad (7)$$

می‌سازیم. با توجه به ویژگیهای روش تحلیل هموتوپی، ما آزادی زیادی در انتخاب هر یک از پارامترهای کمکی $\hbar$ و تابع کمکی $\mathcal{H}(x)$ و عملگر خطی کمکی $\mathcal{L}$ و همچنین حدس اولیه $y_0(x)$ داریم. این آزادی در انتخاب هر یک از پارامترهای گفته شده نقش مهمی دارد و اساس و پایه درستی و اعتبار و انعطاف پذیری این روش است. وقتی $q = 0$، معادله (6) تبدیل می‌شود به،

$$\mathcal{L}[\phi(x;0) - y_0(x)] = ٠, \qquad x \in [0,1], \qquad (8)$$

به همراه شرایط مرزی،

$$\begin{cases} \phi(0;0) = \varphi(0), \\ \phi(1;0) = \gamma. \end{cases} \qquad (9)$$

از شرایط مرزی (3) و عملگر خطی کمکی (4) می‌توانیم جواب مسئله (8) با شرایط مرزی (9) را بدست بیاوریم یعنی،

$$\phi(x;0) = y_0(x). \qquad (10)$$

حال وقتی $q = 1$ باشد، معادله (6) تبدیل می‌شود به،

$$\hbar\,\mathcal{H}(x)\,\mathcal{N}[\phi(x;1)] = ٠, \quad x \in [0,1], \qquad (11)$$

به همراه شرایط مرزی،

$$\begin{cases} \phi(0;1) = \varphi(0), \\ \phi(1;1) = \gamma. \end{cases} \qquad (12)$$

از آنجا که در معادله (5) $\hbar \neq 0$ و $\mathcal{H}(x) \neq 0$، پس مسئله (11) به همراه شرایط مرزی (12) معادل با مسئله اصلی ما یعنی معادله (2) است و جواب آن به صورت،

$$\phi(x;1) = y(x). \qquad (13)$$

است. بنابراین با توجه به معادله (10) و (13)، با افزایش مقدار پارامتر نشانده q از 0 به 1، $\phi(x;q)$ از حدس اولیه $y_0(x)$ به جواب دقیق مسئله یعنی $y(x)$ تغییر پیدا می‌کند. معادله‌های (6) و (7) را معادله دگردیسی مرتبه صفر می‌نامیم. با آزادی در انتخاب پارامتر کمکی $\hbar$ و حدس اولیه $y_0(x)$ از جواب تقریبی مسئله و عملگر خطی کمکی $\mathcal{L}$ و قرار دادن تابع کمکی $\mathcal{H}(x) = 1$، می‌توانیم فرض کنیم جواب $\phi(x;q)$ برای معادله دگردیسی مرتبه صفر به طوری که $0 \leq q \leq 1$، وجود داشته باشد، همچنین مشتق مرتبه‌ی mام آن نسبت به پارامتر نشانده q به صورت زیر،

$$y_0^{(m)}(x) = \frac{\partial^m \phi(x;q)}{\partial q^m}\Big|_{q=0} \qquad (14)$$

باشد، که $m = 1,2,\ldots$ ، $y_0^{(m)}(x)$ را مشتق دگردیسی مرتبه mام می‌نامیم. تعریف می‌کنیم،

$$y_m(x) = \frac{y_0^{(m)}(x)}{m!} = \frac{1}{m!}\frac{\partial^m \phi(x;q)}{\partial q^m}\Big|_{q=0} \qquad (15)$$

با استفاده از قضیه تیلور، $\phi(x;q)$ را به صورت یک سری توانی با پارامتر نشانده q به صورت زیر بسط می‌دهیم،

$$\phi(x;q) = \phi(x;0) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\frac{\partial^m \phi(x;q)}{\partial q^m}\Big|_{q=0} q^m. \qquad (16)$$

از معادله (10) و (15) داریم،

$$\phi(x;q) = y_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} y_m(x)\ q^m. \quad (17)$$

فرض کنید که پارامتر کمکی $\hbar$ و حدس اولیه $y_0(x)$ به طور مناسبی انتخاب شده باشند که سری (17) با عملگر خطی $\mathcal{L}$ در رابطه (4) و تابع کمکی $\mathcal{H}(x) = 1$ در $q = 1$ همگرا باشد. با فرض $q = 1$ در سری (17) داریم،

$$\phi(x;1) = y_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} y_m(x). \quad (18)$$

بنابراین با استفاده از معادله (13) داریم،

$$y(x) = y_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} y_m(x). \quad (19)$$

2.2 معادله دگردیسی مرتبه بالا

با m بار مشتق گیری از معادله دگردیسی مرتبه صفر (٦) و (٧) نسبت به پارامتر q، و سپس قرار دادن $q = 0$ و در نهایت تقسیم کل عبارت حاصل به $m!$، معادله‌ی دگردیسی مرتبه mام به صورت زیر بدست می‌آید،

$$\mathcal{L}[y_m(x) - \chi_m y_{m-1}(x)] = \hbar\, \mathcal{H}(x)\, \mathcal{R}_m(\overrightarrow{y_{m-1}}), \quad (20)$$

همراه با شرایط مرزی،

$$y_m(0) = 0, \quad y_m(1) = 0, \quad (21)$$

که،

$$\mathcal{R}_m(\overrightarrow{y_{m-1}}) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} \mathcal{N}[\phi(x;q)]}{\partial q^{m-1}}\Big|_{q=0} =$$

$$(\varepsilon - \delta\, p(x)) y''_{m-1}(x) + p(x) y'_{m-1}(x) + q(x) y_{m-1}(x) - (1-\chi_m) f(x), \quad (22)$$

و

$$\overrightarrow{y_m} = \{y_0, y_1, \dots, y_m\}, \qquad \chi_m = \begin{cases} 0, & m \le 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases}.$$

و در نهایت با محاسبه وارون عملگر خطی کمکی $\mathcal{L}$، یعنی $\mathcal{L}^{-1}$ و با فرض $\mathcal{H}(x) = 1$ معادله (20) تبدیل می‌شود به،

$$y_m(x) = \chi_m y_{m-1}(x) + \hbar\, \mathcal{H}(x)\, \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{R}_m(\overrightarrow{y_{m-1}})),$$

$$y_m(0) = 0, \quad y_m(1) = 0. \quad (23)$$

2.3 آنالیز همگرایی

تعریف می‌کنیم $\mathcal{V}(\mathbb{R}^+)$ فضای همه توابع اندازه پذیر از F به $\mathbb{R}^+$، که F فضای متریک است.

2.1 تعریف. یک دنباله از توابع با مقدار حقیقی g_n به طور یکنواخت همگرا هست به تابع g در F اگر $\forall \varepsilon > 0$ وجود داشته باشد یک n_0 به طوری که $\forall\, n \le n.$، داشته باشیم $|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$، که $x \in F$. مراجعه شود به $[5-7]$.

2.1 قضیه. اگر سری $\sum_{m=0}^{\infty} y_m(x)$ به طور یکنواخت همگرا باشد به $y(x)$، که $y_m(x) \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^+)$ و $y_m(x)$ها از معادله دگردیسی مرتبه بالا (20) و (21) بدست آمده باشند، و همچنین سریهای $\sum_{m=0}^{\infty} y'_m(x)$ و $\sum_{m=0}^{\infty} y''_m(x)$ به طور یکنواخت همگرا باشند، آنگاه سری $\sum_{m=0}^{\infty} y_m(x)$ یک جواب دقیق برای معادله‌ی (2) است.

اثبات. اگر سریهای $\sum_{m=0}^{\infty} y_m(x)$ و $\sum_{m=0}^{\infty} y'_m(x)$ و $\sum_{m=0}^{\infty} y''_m(x)$ همگرا باشند آنگاه داریم،

$$\lim_{k\to\infty} y_k(x) = 0,$$

$$\lim_{k\to\infty} y'_k(x) = 0,$$

$$\lim_{k\to\infty} y''_k(x) = 0. \quad (24)$$

همچنین $\forall x \in [0,1]$ تعریف می‌کنیم،

$$S(x) = \sum_{m=0}^{\infty} y_m(x),$$

$$S'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} y'_m(x),$$

$$S''(x) = \sum_{m=0}^{\infty} y_m''(x),$$

و از آنجا که عملگر کمکی $\mathcal{L}$ یک عملگر خطی است داریم،

$$\sum_{m=1}^{k} \mathcal{L}[y_m(x) - \chi_m y_{m-1}(x)] = \sum_{m=1}^{k} [\mathcal{L}y_m(x) - \chi_m \mathcal{L}y_{m-1}(x)] =$$

$$\mathcal{L}y_1(x) + (\mathcal{L}y_2(x) - \mathcal{L}y_1(x)) + (\mathcal{L}y_3(x) - \mathcal{L}y_2(x)) + \cdots + (\mathcal{L}y_k(x) - \mathcal{L}y_{k-1}(x))$$

$$= \mathcal{L}y_k(x). \quad (25)$$

با استفاده از معادله (24) و (25) و معادله دگردیسی مرتبه بالا (20) داریم،

$$\hbar\,\mathcal{H}(x) \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{R}_m(\overrightarrow{y_{m-1}}) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{L}[y_m(x) - \chi_m y_{m-1}(x)] = \lim_{k\to\infty} \sum_{m=1}^{k} \mathcal{L}[y_m(x) - \chi_m y_{m-1}(x)] =$$

$$\mathcal{L}\left[\lim_{k\to\infty} \sum_{m=1}^{k} [y_m(x) - \chi_m y_{m-1}(x)]\right] = \mathcal{L}\left[\lim_{k\to\infty} y_k(x)\right] = 0$$

از آنجا که $\hbar \neq 0$ و $\mathcal{H}(x) = 1$ داریم،

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{R}_m(\overrightarrow{y_{m-1}}) = 0, \quad \forall x \in [0,1].$$

با جایگذاری معادله (22) در سری فوق و استفاده از قضیه 2.1 داریم،

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{R}_m(\overrightarrow{y_{m-1}})$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} [(\varepsilon - \delta\, p(x)) y_{m-1}''(x) + p(x) y_{m-1}'(x) + q(x) y_{m-1}(x) - (1-\chi_m) f(x)]$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} (\varepsilon - \delta\, p(x)) y_{m-1}''(x) + \sum_{m=1}^{\infty} p(x) y_{m-1}'(x) + \sum_{m=1}^{\infty} q(x) y_{m-1}(x) - \sum_{m=1}^{\infty} (1-\chi_m) f(x)$$

$$= (\varepsilon - \delta\, p(x)) \sum_{m=1}^{\infty} y_{m-1}''(x) + p(x) \sum_{m=1}^{\infty} y_{m-1}'(x) + q(x) \sum_{m=1}^{\infty} y_{m-1}(x) - \sum_{m=1}^{\infty} (1-\chi_m) f(x)$$

$$= (\varepsilon - \delta\, p(x)) S''(x) + p(x) S'(x) + q(x) S(x) - f(x) = 0,$$

همچنین از رابطه (3) و معادله (21) داریم،

$$S(0) = \varphi(0), \quad S(1) = \gamma.$$

بنابراین $S(x)$ در معادله (2) صدق می‌کند و یک جواب دقیق برای معادله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد تاخیری با رفتار لایه مرزی است.

3. مثالهای عددی

در این بخش دو مثال عددی آورده شده که با استفاده از روش تحلیل هموتوپی حل شده و همچنین نتایج حاصل از حل این دو مثال با روشهای دیگر نیز مقایسه شده تا موثر بودن روش حل هموتوپی برای این مسائل نشان داده شود. نرم دو خطا در روش تحلیل هموتوپی برای تقریب مرتبه‌ی nام به صورت زیر بدست می‌آید،

$$Res_n(\hbar) = \sqrt{\int_0^1 (y_n(x) - y(x))^2 \, dx} \approx \sqrt{\sum_{i=1}^{M} \frac{\left(y_n(x_i) - y(x_i)\right)^2}{M}}, \quad (26)$$

که $x_i \in [0,1]$ و $i = 1,2,\dots,M$ و $y_n(x)$ جواب تقریبی معادله (2) با استفاده از روش تحلیل هموتوپی با n تکرار و $y(x)$ جواب دقیق معادله (2) است. همچنین از نرم دو خطا برای محاسبه بهترین مقدار پارامتر کمکی $\hbar$ استفاده می‌شود. علاوه بر این از نمودار قدر مطلق خطا برای نشان دادن همگرایی جواب تقریبی به جواب اصلی و دقت بالای جواب تقریبی بدست آمده از این تکنیک رسم شده است.

3.1 مثال. معادله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد تاخیری زیر را در نظر بگیرید [11 − 8]،

$$\begin{cases} \varepsilon\, y''(x) + y'(x-\delta) - y(x) = f(x), & x \in [0,1], \\ y(x) = 1 \quad x \in [-\delta, 0], & y(1) = 1. \end{cases}$$

جواب دقیق برای این معادله به صورت زیر است،

$$y(x) = \frac{(e^{m_1} - 1)e^{m_2 x} + (1 - e^{m_2})e^{m_1 x}}{e^{m_1} - e^{m_2}},$$

$$m_1 = \frac{-\sqrt{4(\varepsilon - \delta) + 1} - 1}{2(\varepsilon - \delta)},$$

$$m_2 = \frac{\sqrt{4(\varepsilon - \delta) + 1} - 1}{2(\varepsilon - \delta)}.$$

3.2 مثال. معادله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد تاخیری زیر را در نظر بگیرید [11 − 8]،

$$\begin{cases} \varepsilon\, y''(x) - y'(x-\delta) - y(x) = f(x), & x \in [0,1], \\ y(x) = 1 \quad x \in [-\delta, 0], & y(1) = -1. \end{cases}$$

جواب دقیق برای این معادله به صورت زیر است،

$$y(x) = \frac{-(e^{m_1} + 1)e^{m_2 x} + (1 + e^{m_2})e^{m_1 x}}{e^{m_1} - e^{m_2}},$$

$$m_1 = \frac{-\sqrt{4(\varepsilon + \delta) + 1} + 1}{2(\varepsilon + \delta)},$$

$$m_2 = \frac{\sqrt{4(\varepsilon + \delta) + 1} + 1}{2(\varepsilon + \delta)}.$$

ماکسیمم مقدار خطای مطلق برای مثال 1 با $\varepsilon = 0.01$ و $n = 10$.

روش تحلیل هموتوپی	روش مرجع[9]	روش مرجع[10]	روش مرجع [11]	روش مرجع [11]	δ
4.0×10^{-12}	4.0×10^{-7}	4.6×10^{-4}	1.2×10^{-4}	0.090928	0.001
4.8×10^{-12}	4.2×10^{-7}	4.6×10^{-4}	1.6×10^{-4}	0.108362	0.003
5.2×10^{-11}	2.1×10^{-7}	4.6×10^{-4}	2.8×10^{-4}	0.128454	0.006
1.0×10^{-11}	2.3×10^{-7}	4.6×10^{-4}	5.7×10^{-4}	0.101499	0.008
3.5×10^{-9}	5.7×10^{-6}	1.4×10^{-5}	-	-	0.100
4.6×10^{-9}	1.7×10^{-6}	1.4×10^{-5}	-	-	0.200

ماکسیمم مقدار خطای مطلق برای مثال 1 با $\delta = 10^{-12}$ و $n = 10$.

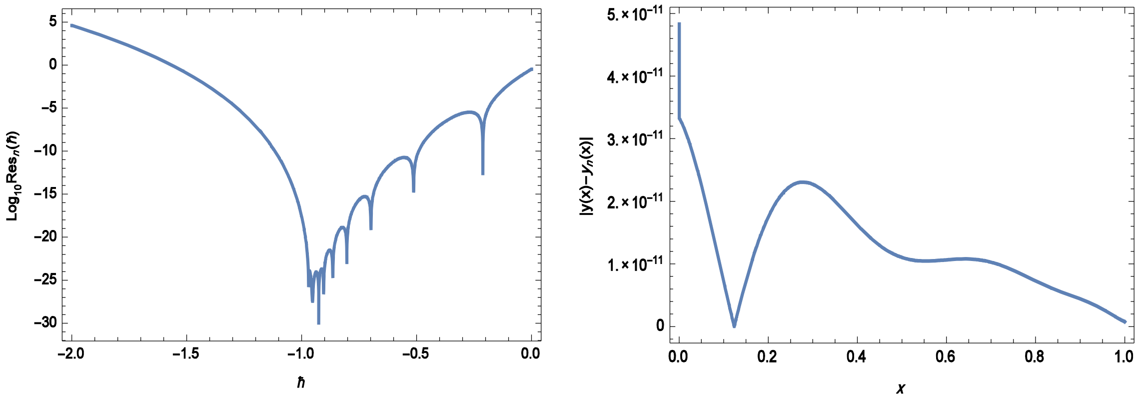
ε	روش مرجع [8]	روش مرجع [8]	روش مرجع[10]	روش مرجع[9]	روش تحلیل هموتوپی
10^{-2}	6.58×10^{-2}	1.49×10^{-2}	4.50×10^{-5}	5.27×10^{-5}	2.2×10^{-12}
10^{-3}	8.07×10^{-2}	3.88×10^{-2}	4.50×10^{-5}	4.83×10^{-5}	7.5×10^{-12}
10^{-4}	8.46×10^{-2}	5.06×10^{-2}	2.50×10^{-4}	5.04×10^{-5}	4.4×10^{-12}
10^{-5}	8.54×10^{-2}	5.21×10^{-2}	2.50×10^{-4}	5.07×10^{-5}	1.0×10^{-11}
10^{-6}	8.58×10^{-2}	5.03×10^{-2}	2.50×10^{-4}	5.12×10^{-5}	5.0×10^{-11}
10^{-7}	-	-	-	8.01×10^{-5}	5.0×10^{-9}

ماکسیمم مقدار خطای مطلق برای مثال 2 با $\varepsilon = 0.01$ و $n = 10$.

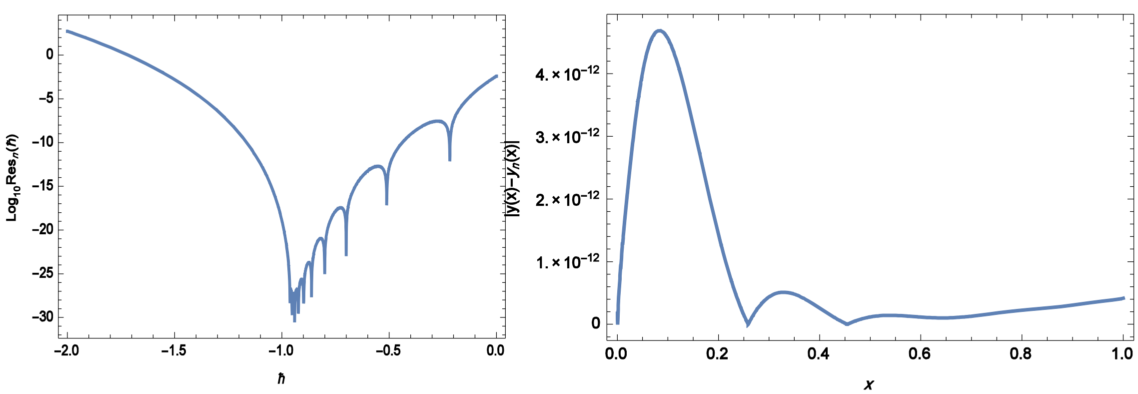
δ	روش مرجع [11]	روش مرجع [11]	روش مرجع[10]	روش مرجع[9]	روش تحلیل هموتوپی
0.007	0.117631	1.4×10^{-4}	1.0×10^{-5}	1.7×10^{-6}	2.6×10^{-12}
0.015	0.083515	9.6×10^{-5}	1.0×10^{-5}	6.3×10^{-6}	2.0×10^{-12}
0.025	0.061475	6.8×10^{-5}	1.0×10^{-5}	2.1×10^{-5}	1.5×10^{-12}

ماکسیمم مقدار خطای مطلق برای مثال 2 با $\varepsilon = 0.001$ و $n = 10$.

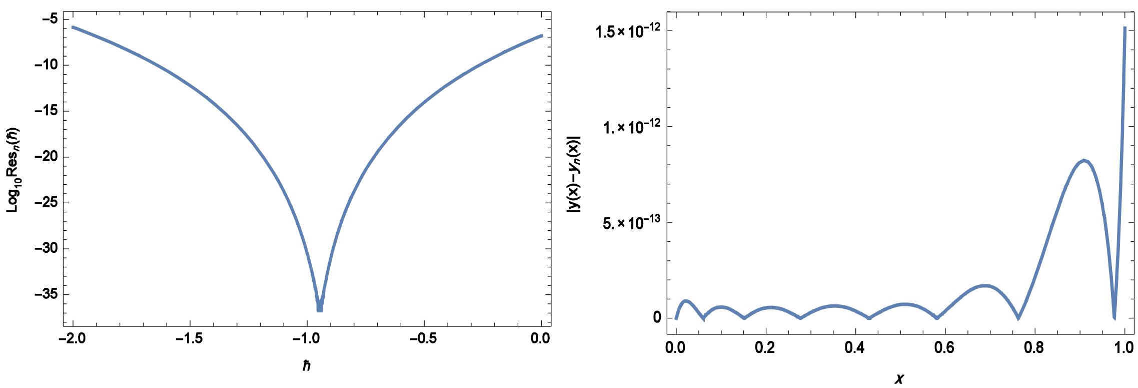
ε	روش مرجع [8]	روش مرجع [8]	روش مرجع[10]	روش مرجع[9]	روش تحلیل هموتوپی
0.0007	*0.213391*	3.0×10^{-4}	1.0×10^{-5}	1.0×10^{-5}	9.5×10^{-12}
0.0015	*0.123119*	1.4×10^{-4}	1.0×10^{-5}	8.5×10^{-7}	1.2×10^{-12}
0.0025	*0.080964*	9.2×10^{-5}	1.0×10^{-4}	8.2×10^{-7}	1.5×10^{-11}
0.0100	-	-	1.0×10^{-4}	1.4×10^{-6}	2.0×10^{-12}
0.0200	-	-	1.0×10^{-4}	3.6×10^{-6}	2.0×10^{-12}



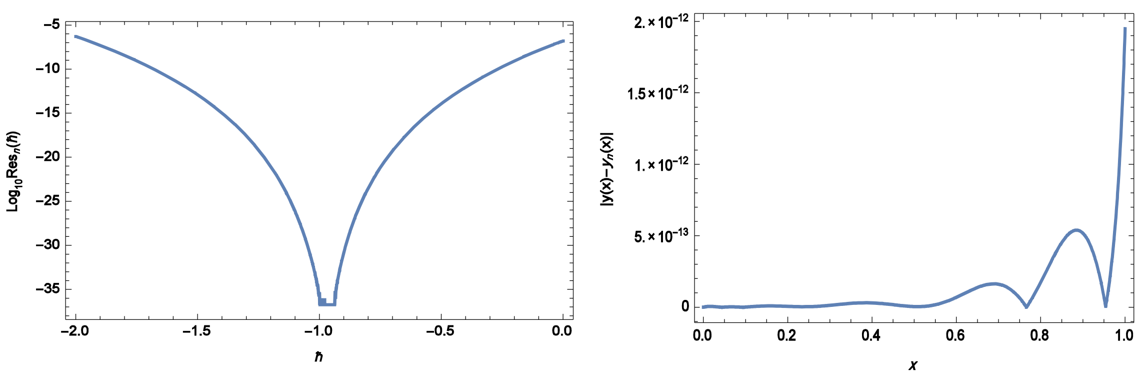
شکل 1 (راست: قدر مطلق خطا، چپ: نرم دو خطا، برای مثال 1 با $\delta = 10^{-12}$ و $\varepsilon = 10^{-6}$ و $n = 10$)



شکل 2 (راست: قدر مطلق خطا، چپ: نرم دو خطا، برای مثال 1 با $\delta = 0.003$ و $\varepsilon = 0.01$ و $n = 10$)



شکل 3 (راست: قدر مطلق خطا، چپ: نرم دو خطا، برای مثال 2 با $\delta = 0.025$ و $\varepsilon = 0.01$ و $n = 10$)



شکل 4 (راست: قدر مطلق خطا، چپ: نرم دو خطا، برای مثال 2 با $\delta = 0.02$ و $\varepsilon = 0.001$ و $n = 10$

4. نتیجه گیری

روش تحلیل هموتوپی یک روش تحلیلی قدرتمند برای حل مسائل مختلف شدیدا غیرخطی در ریاضی و علوم مختلف مهندسی است. در این مقاله از این تکنیک برای حل معادله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد تاخیری با رفتار لایه مرزی استفاده شده است. با توجه به نوع رفتار جواب این معادله که دارای یک لایه مرزی در بازه بسیار کوچکی از دامنه‌ی تعریف خود است، روش تحلیل هموتوپی در مقایسه با روشهای دیگر با سرعت و دقت بیشتری جواب تقریبی برای این معادله ارائه می‌کند.

همچنین این تکنیک با معرفی پارامتر کمکی $\hbar$، کنترل ناحیه همگرایی جواب به فرم سری حاصل از حل معادله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد تاخیری را فراهم آورده و آن را تضمین می‌کند. علاوه بر این برای محاسبه‌ی بهترین مقدار پارامتر کمکی $\hbar$ کافی است مینیمم مقدار نرم دو خطا را بدست بیاوریم. همچنین به عنوان پیشنهاد میتوان از این تکنیک برای حل مسائل دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد تاخیری با رفتار نوسانی هم استفاده کرد [12].

فهرست منابع

[۱] S.J. Liao, Proposed homotopy analysis techniques for the solution of nonlinear problem, Ph.D. Thesis, Shanghai Jiao Tong University, ۱۹۹۲.
[۲] S.J. Liao, Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method, CRC Press, Chapman and Hall, Boca Raton, ۲۰۰۳.
[۳] S.J. Liao, Homotopy Analysis Method in Nonlinear Differential Equations, Springer-Verlag, New York, ۲۰۱۲.
[٤] M. Turkyilmazoglu, Series solution of nonlinear two-point singularly perturbed boundary layer problems, Comput. Math. Appl. ٦۰ (۲۰۱۰) ۲۱۰۹-۲۱۱٤.
[۵] G.B. Folland, Real analysis: Modern techniques and their applications, ۲nd Ed. Wiley, New York, ۱۹۹۹.
[٦] L. Debnath, P. Mikusinski, Hilbert Spaces with Applications, ۳rd Ed. ۲۰۰۵, Elsevier Inc. All rights reserved.
[۷] S. Abbasbandy, M.S. Hashemi, I. Hashim, On convergence of homotopy analysis method and its application to fractional integro-differential equations, Quaes. Math. ۳٦ (۲۰۱۳), ۹۳-۱۰۵.
[۸] L.B. Liu, Y.P. Chen, Maximum norm a posteriori error estimates for a singularly perturbed differential difference equation with small delay, Appl. Math. Comput. ۲۲۷ (۲۰۱٤) ۸۰۱-۸۱۰.
[۹] H. Sahihi, S. Abbasbandy, T. Allahviranloo, Reproducing kernel method for solving singularly perturbed differential-difference equations with boundary layer behavior in Hilbert space, J. Comput. Appl. Math. ۳۲۸ (۲۰۱۸) ۳۰-٤۳.
[۱۰] F.Z. Geng, S.P. Qian, M.G. Cui, Improved reproducing kernel method for singularly perturbed differential-difference equations with boundary layer behavior, Appl. Math. Comput. ۲۵۲ (۲۰۱۵) ۵۸-٦۳.
[۱۱] M.K. Kadalbajoo, K.K. Sharma, Numerical analysis of singularly perturbed delay differential equations with layer behavior, Appl. Math. Comput. ۱۵۷ (۲۰۰٤) ۱۱-۲۸.
[۱۲] R.N. Rao, P.P. Chakravarthy, A finite difference method for singularly perturbed differential-difference equations with layer and oscillatory behavior, Appl. Math. Model. ۳۷ (۲۰۱۳) ۵۷٤۳-۵۷۵۵.
[۱۳] M.K. Kadalbajoo, D. Kumar, Fitted mesh B-spline collocation method for singularly perturbed differential-difference equations with small delay, Appl. Math. Comput. ۲۰٤ (۲۰۰۸) ۹۰-۹۸.