

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال پنجم، شماره بیست و دوم، بهمن و اسفند ۱۳۹۸

شماره شاپا: ۵۸۸۸-۲۵۸۸



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

ارائه نمودار کنترلی فراگیر برای مانیتورینگ پروفایل‌های خطی و غیرخطی با استفاده از آنالیز داده‌های تابعی

مهراب بحری^۱، عبدالله هادی وینچه^{۲*}

(^۱) گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران
(^۲) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، واحد اصفهان (خوراسگان)، دانشگاه آزاد اسلامی، اصفهان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۶/۱۲/۰۸ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۴/۱۵

چکیده

در این مقاله پروفایل‌ها به عنوان متغیرهای تابعی در نظر گرفته شده و دو نمودار کنترلی برای مانیتورینگ آن‌ها در فاز II پیشنهاد شده است. به‌کارگیری مدل تابعی به دلیل منطبق بودن بر ماهیت پروفایل‌ها در دنیای واقعی، باعث می‌شود که نمودارهای کنترلی پیشنهادی که به کمک تکنیک‌های آنالیز داده‌های تابعی بدست آمده، دارای ویژگی‌های مطلوبی باشند از جمله: سادگی محاسباتی، قابلیت بکارگیری یکسان برای پروفایل‌های گوناگون (خطی و غیرخطی در شکل‌های مختلف) و پذیرش شکل‌های پیچیده خودهمبستگی درون پروفایلی. این ویژگی‌ها متمایز کننده مدل تابعی نسبت به مدل‌های رگرسیونی است که در پروفایل مانیتورینگ متداول‌اند. شبیه‌سازی کامپیوتری انجام شده نشان می‌دهد که در حالت‌های مختلف نمودارهای کنترلی پیشنهادی نسبت به سایر روش‌ها متوسط طول دنباله کوتاه‌تری دارند که نشان دهنده عملکرد مطلوب رویکرد تابعی اتخاذ شده است؛ بعلاوه این که در تعدادی از حالات غیرخطی با خودهمبستگی پیچیده، سایر روش‌ها به کلی از کار افتاده و تنها نمودارهای کنترلی پیشنهادی این تحقیق قادر به تشخیص انحراف بوجود آمده هستند و حتی در این حالات نیز متوسط طول دنباله این نمودارهای کنترلی بسیار مطلوب می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: پروفایل مانیتورینگ، آنالیز داده‌های تابعی، نمودارهای کنترلی، کنترل فرآیند آماری، فاز II.

۱- مقدمه

در برخی از کاربردها، فرآیندهایی وجود دارند که خروجی آن‌ها بجای یک کمیت اسکالر یا برداری، یک تابع یا پروفایل است که عبارت از رابطه‌ای تابعی بین یک متغیر پاسخ، با یک یا چند متغیر توضیحی (مستقل) است [۱]. اصطلاح پروفایل مانیتورینگ به کنترل چنین فرآیندهایی اطلاق می‌شود که معمولاً طی یک پروسه دوفازی انجام می‌شود. در فاز I، هنگامی که فرآیند تحت کنترل است، پروفایل‌های خروجی را ثبت و معین می‌کنند که خروجی ایدئال - که پروفایل مرجع نامیده می‌شود - چه شکلی باید داشته باشد و در چه حدودی واقع شود. فاز II مربوط به زمانی است که سیستم مشغول کار است. در این هنگام با مشاهده خروجی فرآیند و مقایسه آن با پروفایل مرجع، درباره تحت کنترل بودن فرآیند یا خارج شدن آن از کنترل بحث می‌شود.

در مقالات متعددی می‌توان نمونه‌هایی از چنین کاربردهایی را مشاهده کرد. مثلاً وودل [۲] به کاربردهایی با خروجی پروفایل در صنایع چوب، بررسی اشکال^۱، ارزیابی بهداشت عمومی و ... می‌پردازد. همچنین تعدادی دیگر از این گونه کاربردها را می‌توان در [۳]، [۴] و [۵] یافت. در اینجا مرور فشرده‌ای بر پژوهش‌های انجام شده در این حوزه با تمرکز بر نوع مدل پایه‌ای که این تحقیقات برای پروفایل‌ها بکار برده‌اند، ارائه شده است.

۲- پیشینه تحقیق

از یک دیدگاه مدل‌های پایه‌ای که در تحقیقات حوزه پروفایل مانیتورینگ در نظر گرفته شده است را می‌توان به دو دسته پارامتری و ناپارامتری تقسیم نمود. روش‌های پارامتری مربوط به پروفایل‌هایی است که شکل آن‌ها از مدل‌هایی مشخص تبعیت می‌کند و تنها پارامترهایی از این مدل‌ها باید معین گردد (مانند مدل‌های خطی و چندجمله‌ای). اما روش‌های ناپارامتری برای پروفایل‌هایی بکار گرفته می‌شوند که تعیین الگویی که پروفایل از آن تبعیت کند دشوار است. هم روش‌های پارامتری و هم

روش‌های ناپارامتری را می‌توان در دو فاز پروفایل مانیتورینگ بکار برد [۲].

در روش‌های پارامتری در فاز I، زمانی که فرآیند تحت کنترل است، شکل پروفایل با یک مدل پارامتری خلاصه می‌شود و در فاز II هنگام مانیتورینگ فرآیند تغییرات این پارامترها برای کشف خارج شدن فرآیند از کنترل رصد می‌گردد. در این حالت پارامترهای تخمین زده شده مدل، که از پروفایل‌های متوالی مشاهده در طول زمان بدست آمده‌اند، اساس ترسیم نمودارهای کنترلی هستند [۲]. مدل پایه‌ای که در روش‌های پارامتری بکار می‌رود رابطه‌ای بین متغیر توضیحی x_i و متغیر پاسخ y_i (که می‌توانند اسکالر یا برداری باشند) با شکل کلی

$$y_i = f(x_i, \beta) + \varepsilon_i, i = 1, \dots, n \quad (1)$$

است که در آن β یک بردار از پارامترها و ε_i جمله خطاست (خطای تصادفی) که در اکثر تحقیقات آن‌ها را دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس σ^2 در نظر گرفته و علاوه بر این فرض می‌شود که این خطاها مستقل هستند [۶]. روش‌های پارامتری را می‌توان به دو دسته عمده روش‌های پارامتری خطی و غیرخطی تقسیم کرد. اغلب کارهای انجام شده در پروفایل مانیتورینگ برای حالتی بوده است که پروفایل را بتوان بصورت یک مدل رگرسیونی ساده خطی نمایش داد. فرآیندهای کالیبراسیون اغلب بوسیله توابع خطی توصیف می‌شوند. بنابراین مانیتورینگ پروفایل‌های خطی بحثی گسترده و دارای کاربردهای فراوانی است [۲]. روش‌های خطی خود به دو گروه مدل‌های خطی ساده و مدل‌های خطی چند متغیره تقسیم می‌شوند. مدل پایه برای پروفایل‌های خطی ساده، همان مدل (۱) با

$$f(x_i, \beta) = A + Bx_i \quad (2)$$

می‌باشد. از بین تحقیقاتی که پروفایل‌های خطی ساده را مدنظر قرار داده‌اند می‌توان به موارد زیر اشاره نمود. کانگ و آلباین [۷] در یک پروسه حک کاری برای تولید قطعات نیمه هادی این مدل را برای پروفایل‌های خروجی فرآیند در نظر گرفتند. آن‌ها برای نمونه‌گیری از فرآیند ابتدا n نقطه x_1, \dots, x_n در دامنه عملیاتی انتخاب نموده

مانیتورینگ پارامتر شیب خط آن‌ها ارائه نمودند. ژو و لین [۱۲] نیز در تحقیق خود نمودارهای کنترلی برای مانیتورینگ پارامتر شیب خطوط رگرسیون در فاز I و II ارائه نمودند. همچنین نورالسنا و همکاران [۱۳] روشی برای مانیتورینگ پروفایل‌های خطی ساده بر مبنای نمودارهای چند متغیره پیشنهادی توسط هیل [۱۴] ارائه نمودند.

مدل پایه برای پروفایل‌های خطی چند متغیره را می‌توان بصورت زیر در نظر گرفت:

$$Y_j = X_j\beta + \varepsilon_j \quad (4)$$

این مدل برحسب پارامترهای خود می‌تواند یک پروفایل خطی ساده چند متغیره^۲ یا یک پروفایل خطی چندگانه چند متغیره^۴ را معرفی کند. در پروفایل‌های خطی ساده چند متغیره یک متغیر توضیحی X_j و چند متغیر پاسخ وجود دارد که بردار پاسخ Y_j را تشکیل می‌دهند و هر متغیر پاسخ تابعی خطی از متغیر توضیحی است. اما در پروفایل‌های خطی چندگانه چند متغیره، چند متغیر توضیحی وجود دارد که بردار X_j و چند متغیر پاسخ وجود دارد که بردار پاسخ Y_j را تشکیل می‌دهند و هر متغیر پاسخ، تابعی خطی از متغیرهای توضیحی است. لذا در هر دو صورت متغیرهای پاسخ همبسته‌اند.

برای حالت کلی‌تر پروفایل خطی چندگانه چند متغیره، اجزاء مدل (۴) عبارتند از بردار پاسخ Y_j که برداری است $n_j \times p$ بُعدی (که $n_j > p$)، بردار پارامترهای توابع خطی β که برداری است p بُعدی و بردار خطاها ε که بردارهای تصادفی مستقل n_j بُعدی، با توزیع نرمال با میانگین ۰ و ماتریس کوواریانس $\sigma^2 I$ هستند. این مدل در حقیقت توسعه مدل (۲) می‌باشد [۱۵].

از جمله تحقیقاتی که پروفایل‌هایی با چنین مدل پایه‌ای را بکار گرفته‌اند می‌توان به مقاله ژو و همکاران [۱۵] اشاره کرد که مدل رگرسیون چندگانه را در چهارچوب یک مدل کلی خطی در نظر گرفته و به کمک آن چند نمودار کنترلی را برای این پروفایل‌ها توسعه دادند.

و در هر بار نمونه‌گیری (مثلاً در نمونه j) خروجی‌های فرآیند در این نقاط y_{1j}, \dots, y_{nj} را ثبت کرده و فرض کردند که برای هر j نقاط $(x_{1j}, y_{1j}), \dots, (x_{nj}, y_{nj})$ تقریباً بر یک استقامت واقع‌اند. آن‌ها در فاز I با استفاده از روش رگرسیون خطی، تخمینی از مقادیر A ، B و ε بدست آورده و به کمک آن در فاز II با استفاده از متوسط باقیمانده‌های هر پروفایل مشاهده شده که بصورت

$$e_{ij} = y_{ij} - a - bx_j \quad (3)$$

تعریف می‌شود، دو نمودار کنترلی $EWMA^I$ و R را تشکیل داده، تا تحت کنترل بودن فرآیند را بررسی کنند. همچنین در تحقیق دیگری که توسط کیم و همکاران [۸] انجام شد، مدل پایه را همان مدل (۲) در نظر گرفته و برای بررسی تحت کنترل بودن فرآیند در فاز II، با کدگذاری متغیرهای X ، میانگین آن‌ها را به صفر تبدیل کرده و به این وسیله تخمین کمترین مربعات عرض از مبدأ و شیب را از یکدیگر مستقل نمودند. این کار امکان ارائه دو نمودار $EWMA$ یک متغیره را برای این دو پارامتر فراهم می‌کند که در همین تحقیق و همچنین در [۹] نشان داده شده است که بکارگیری این دو نمودار بر نمودارهای $EWMA$ و R ارائه شده در [۷] برتری دارد و بخصوص عملکرد بهتری در مورد ARL^2 خواهد داشت. در پژوهشی دیگر نتر و همکاران [۱۰] در سه کاربرد فرآیندهایی که بوسیله پروفایل خطی توصیف می‌شود را ارائه نمودند. مستک و همکاران [۳] نیز به کمک پروفایل‌های خطی، پایداری منحنی‌های کالیبراسیون خطی در تعیین فتومتریک آهن با اسید سولفوسالیسیلیک را بررسی کردند. همچنین استور و بریل [۴] از دو نمودار کنترلی چند متغیره برای کنترل پارامترهای کالیبراسیون، در کالیبره کردن خطی رنگ‌نگاری یون چند سطحی، به‌منظور تعیین پایداری پاسخ ابزار و تناوب مناسب کالیبراسیون استفاده کردند. در مقاله‌ای دیگر چانگ و گانگ [۱۱] برای اطمینان از دقت رابطه بین دو (چند) فرآیند اندازه‌گیری، چند نمودار کنترلی شوهارت برای

اختلاف بین پروفایل‌های مشاهده شده و پروفایل مرجع است [۲]. برخی از روش‌های ناپارامتری در فاز I مقادیر پروفایل مرجع را تنها در نقاط جمع‌آوری متغیر توضیحی تخمین می‌زنند ولی برخی دیگر با استفاده از روش‌های هموارسازی مانند روش اسپلاین مقادیر پروفایل مرجع را در کل بازه مورد بررسی ارائه می‌نمایند. مدلی که برای پروفایل‌های ناپارامتری بکار گرفته می‌شود بصورت

$$y_{ij} = f(x_{ij}) + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, \dots, n_j \quad (5)$$

$$j = 1, \dots, n$$

است که در آن (x_1, y_{1j}) و \dots و (x_n, y_{nj}) ، n مین نمونه تصادفی را تشکیل می‌دهند. هیچ فرض پارامتری محدود کننده‌ای در مورد f در نظر گرفته نمی‌شود. فرضیات تنها در مورد جملات خطا هستند که بطور کلی فرض می‌شود مستقل و دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس σ^2 می‌باشند [۶]. در تعدادی از پژوهش‌ها حالاتی از خودهمبستگی بین جملات خطا نیز در نظر گرفته شده است که در ادامه به آن‌ها اشاره خواهد شد.

از جمله تحقیقاتی که از مدل‌های ناپارامتری برای مانیتورینگ پروفایل‌ها استفاده نموده‌اند می‌توان به موارد زیر اشاره نمود. واکر و رایت [۲۴] از مساله مطرح شده توسط یانگ و همکاران [۲۳] استفاده کرده و روشی ناپارامتری مبتنی بر مدل‌های جمع‌پذیر را برای مقایسه پروفایل‌هایی از این نوع پیشنهاد نمودند. همچنین واقفی و همکاران [۲۵]، ژانگ و آلباین [۲۶]، چیکن و همکاران [۲۷] و زو و همکاران [۲۸] از جمله محققین دیگری هستند که از مدل ناپارامتری در تحقیق خود استفاده کرده و روش‌هایی مبتنی بر رگرسیون ناپارامتری برای مانیتورینگ پروفایل‌ها در این حالت ارائه نموده‌اند.

بجز پارامتری یا ناپارامتری بودن مدل پایه، عامل دیگری که می‌تواند مبنای دسته‌بندی پروفایل‌ها واقع شود، نوع ارتباطی است که بین جملات خطا وجود دارد. در همه مدل‌هایی که تاکنون به آن‌ها اشاره شد همواره فرض بر این بود که جملات خطا از یکدیگر مستقل‌اند. این فرض که در اغلب تحقیقات مبتنی بر هر دو روش‌های پارامتری و ناپارامتری بطور وسیعی بکار گرفته می‌شود،

همچنین محمود [۱۶]، جنسن و همکاران [۱۷] و نورالسنا و همکاران [۱۸] پروفایل‌های با مدل پایه (۴) را مدنظر قرار داده و نمودارهای کنترلی متفاوتی برای آن‌ها ارائه نمودند.

در روش‌های پارامتری غیرخطی مدل پایه همان مدل (۱) است که در آن $f(x_i, \beta)$ یک تابع غیرخطی است. روش‌های برآورد پارامترهای مدل‌های غیرخطی با استفاده از رگرسیون غیرخطی می‌باشد [۶]. گروهی از این پروفایل‌ها که توجه محققان را به خود جلب کرده است، پروفایل‌های چندجمله‌ای است. مثلاً کاظم‌زاده و همکاران [۱۹] با در نظر گرفتن پروفایل‌های چندجمله‌ای و توسعه روش رگرسیون پروفایل‌های خطی ساده، روشی برای فاز I این گروه از پروفایل‌ها ارائه نمودند. پروفایل‌های غیرخطی که چندجمله‌ای نباشد نیز در تعدادی از تحقیق‌ها برای مدل کردن پروفایل‌ها بکار گرفته شده‌اند. مثلاً می‌توان به تابع غیرخطی با چهار پارامتر که ویلیامز و همکاران [۲۰] بصورت

$$f(x_{ij}, \beta_j) = A_i + \frac{D_i - A_i}{1 + \left(\frac{x_{ij}}{C_i}\right)^{B_i}} + \varepsilon_{ij}$$

در نظر گرفتند، اشاره کرد. دینگ و همکاران [۲۱] چند نوع روش کاهش مرتبه‌ها برای داده‌های این نوع پروفایل‌ها بخصوص برای آنالیز مؤلفه‌های اصلی و آنالیز مؤلفه‌های مستقل ارائه نمود. این محققان در پژوهشی دیگر [۲۲] رویکرد رگرسیون غیرخطی بکار برده شده در تحقیق فوق را برای مانیتورینگ پارامترهای مدل رگرسیونی غیرخطی بکار بردند. همچنین یونگ و همکاران [۲۳] رابطه بین چگالی عمودی تخته‌های نئوپان و عمق‌های مختلف را به صورت یک پروفایل غیرخطی مطرح می‌کنند.

در پاره‌ای موارد توصیف پروفایل‌ها توسط یک مدل پارامتری امکان‌پذیر نیست. دلیل این امر گاهی دشواری تعیین شکل صحیح پارامتری تابع f در رابطه (۱) است ولی گاهی با پروفایل‌هایی سروکار داریم که نمایش پارامتریک متناهی برای آن‌ها وجود ندارد و لذا ماهیتاً توابعی ناپارامتریک هستند [۶]. این امر منجر به ارائه روش‌های ناپارامتری در پروفایل مانیتورینگ شده است. در این روش‌ها از مقیاسی استفاده می‌شود که نشانگر

دادند. همچنین جنسن و همکاران [۱۷] یک مدل خطی ترکیبی (LMM^4) با WPA را در نظر گرفتند. در کل کارهای بسیار اندکی در مورد ساختارهای خود همبسته غیر از $AR(1)$ انجام شده است. نورالسنا و همکاران [۶] آن دسته از تحقیقات انجام شده در حوزه پروفایل مانیتورینگ که BPC و WPA را در مدل‌های خود در نظر گرفته‌اند را در جدول (۱) خلاصه نمودند. خانه‌های خالی جدول مربوط به حوزه‌هایی است که تحقیقی در آن زمینه انجام نشده است و لذا هنوز سؤال‌های بی‌پاسخ فراوانی در مورد همبستگی و خود همبستگی در پروفایل مانیتورینگ وجود دارد.

در پایان معرفی روش‌های موجود برای پروفایل مانیتورینگ روش تجربی متریک^۵ مورد بررسی قرار می‌گیرند. در این روش با انتخاب شاخصی که نشان دهنده فاصله پروفایل‌های مشاهده شده از پروفایل مرجع است و بدون در نظر گرفتن هرگونه پیش فرضی در مورد جملات خطا، حدود نمودار کنترلی به بصورت تجربی به کمک داده‌های جمع‌آوری شده در زمانی که فرآیند تحت کنترل است و یا به کمک شبیه‌سازی کامپیوتری تعیین می‌شود. در صورت در دست بودن پروفایل مرجع $f(x_{ij}, \beta)$ می‌توان از چهار متر زیر که ویلیامز و همکاران [۲۰] برای تعیین فاصله پروفایل‌های مشاهده شده از پروفایل مرجع معرفی کرده‌اند، استفاده نمود:

$$M_{i1} = \max_{1 \leq j \leq n} |y_{ij} - f(x_{ij}, \beta)| \quad (۶)$$

$$M_{i2} = \sum_{j=1}^n |y_{ij} - f(x_{ij}, \beta)| \quad (۷)$$

$$M_{i3} = \frac{\sum_{j=1}^n |y_{ij} - f(x_{ij}, \beta)|}{n} \quad (۸)$$

$$M_{i4} = \sum_{j=1}^n (y_{ij} - f(x_{ij}, \beta))^2 \quad (۹)$$

M_{i1} ماکزیمم انحراف مطلق بین مقادیر مشاهده شده و پروفایل مرجع است. به‌طور مشابه M_{i2} ، M_{i3} و M_{i4} به ترتیب از جمع مطلق انحرافات، میانگین مطلق انحرافات و جمع مربعات انحرافات حاصل می‌گردند.

در بیشتر کاربردها غیر معتبر می‌باشد [۱]. در مورد پروفایل‌ها به دو نوع همبستگی می‌توان اشاره نمود. همبستگی میان پروفایلی BPC^1 و خودهمبستگی درون پروفایلی WPA^2 . BPC مربوط به زمانی است که اندازه‌گیری‌های یک پروفایل با اندازه‌گیری‌های سایر پروفایل‌ها همبستگی دارد اما WPA مربوط به زمانی است که جملات خطای حاصل در امتداد یک پروفایل همبستگی دارند. وجود WPA در پروفایل پیچیدگی فراوانی در مدل ایجاد می‌نماید. مثلاً در مدل خطی (۴) در مورد جملات خطا فرض بر آن است که $(\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2 I))$ ؛ یعنی جملات خطا مستقل و هم توزیع انگاشته شده و توزیع آن‌ها نرمال با میانگین صفر و واریانس σ^2 در نظر گرفته شد. در صورتی که اگر به این مدل اجازه WPA داده شود باید در مورد جملات خطا فرض شود که $\varepsilon_i \sim N(0, R)$ که R ماتریس معین مثبت کوواریانس است که عناصر غیر واقع بر قطر آن دیگر الزاماً صفر نیستند. انواع حالات خودهمبستگی ممکن بین جملات خطا می‌تواند حالات بسیار متنوعی در ماتریس کوواریانس بوجود آورد که باعث پیچیدگی فراوانی در مدل می‌گردد. علاوه بر این مدل‌های غیرخطی همراه با خودهمبستگی خطاها به دلیل افزوده شدن بیش از پیش پیچیدگی و دشواری‌های محاسباتی متداول نیستند. در بررسی که نورالسنا و همکاران [۶] به عمل آوردند، دریافتند که هیچ تحقیقی که مدل‌های غیرخطی همراه با WPA را در نظر گرفته باشد وجود ندارد. از جمله پژوهش‌های انجام شده که WPA را در مدل خود وارد نموده‌اند می‌توان به موارد زیر اشاره نمود. سلیمانی و همکاران [۲۹] مدل خطی ساده برای پروفایل‌ها را به حالت WPA در حالتی که خطاها خود همبستگی درجه یک داشته باشند ($AR(1)^3$)، گسترش

1. Between-Profile Correlation

2. Within-Profile Autocorrelation

3. AutoRegressive model of order 1

گوییم دنباله $\{X_n\}$ دارای خودهمبستگی از مرتبه p است و آن را با نماد $AR(p)$ نمایش می‌دهیم هرگاه ثابتی مانند c و پارامترهایی مانند $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ وجود داشته باشد که بین عناصر دنباله رابطه صورت $X_t = c + \sum_{i=1}^p \varphi_i X_{t-i} + \varepsilon_t$ برقرار باشد. در این رابطه جملات خطا ε_t مستقل و با میانگین صفر می‌باشند.

4. Linear Mixed Model

5. Metrics Method

جدول (۱) - خلاصه تحقیقات انجام شده در زمینه پروفایل‌ها با WPA و BPC

BPC		WPA		
روش‌های فاز II	روش‌های فاز I	روش‌های فاز II	روش‌های فاز I	
نورالسنا و همکاران [۳۰]		سلیمانی و همکاران [۲۹]		۱- رگرسیون خطی ساده SLR
کاظم‌زاده و همکاران [۳۱]				۲- رگرسیون چندجمله‌ای با اثرات ثابت
			جنسن و همکاران [۱۷]	۳- مدل ترکیبی خطی LMM
				۴- مدل‌های غیرخطی
			جنسن و بریج [۳۲]	۵- مدل‌های ترکیبی غیرخطی NLMM
کیو و همکاران [۱]				۶- روش‌های ناپارامتری

همچنین متر دیگری به صورت

$$M_{i5} = \left| \int_a^b f(x_{ij}, \beta) dx - S(y_i) \right| \quad (10)$$

توسط نورالسنا و همکاران [۱۸] پیشنهاد گردیده که در آن $S(y_i)$ انتگرال تقریبی با استفاده از روش ذوزنقه‌ای می‌باشد. آن‌ها بیان می‌کنند که متر M_{i5} هنگامی که فرآیند تحت کنترل است، مقادیر کوچکی ایجاد می‌نماید و هنگامی که تغییری در بردار β بوجود آید، مقادیرش افزایش می‌یابد و به سرعت از حد بالایی کنترل تجاوز می‌نماید و عملکرد آن نسبت به سایر مترهای فوق مناسب‌تر است.

ذکر این نکته ضروریست که از بین مقالات در دسترس، موارد فهرست شده در این تحقیق به دلیل اهمیت آن‌ها از حیث مدل پایه‌ای که برای پروفایل‌ها در نظر گرفته‌اند، مورد توجه قرار گرفته‌اند. تحقیقات متعدد دیگری نیز وجود دارد که به دلیل تکراری بودن مدل پایه پیشنهادی از ذکرشان خودداری شده است. در اینجا به اختصار به برخی مفاهیم دیگر که در پروفایل مانیتورینگ توجه محققان را به خود جلب کرده است اشاره می‌شود.

پاره‌ای از محققان مفهوم نقطه تغییر^۱ را در تحقیقات خود وارد کرده‌اند که عبارتست از نقطه‌ای که تغییری در یک یا چند پارامتر نسبت به پارامترهای پروفایل مرجع به وجود می‌آید. مثلاً زو و همکاران [۳۳] نمودارهای کنترلی بر مبنای نقطه تغییر، وقتی همه پارامترهای فرآیند مجهول‌اند، ارائه نمودند. همچنین مدلی مبتنی بر تکنیک رگرسیون قطعه‌ای توسط محمود و همکاران [۳۴] با بکارگیری مفهوم نقطه تغییر، پیشنهاد شده است. از جمله

ابعاد دیگری که در بحث پروفایل مانیتورینگ توجه محققان را به خود جلب کرده است، ثابت یا متغیر بودن بازه نمونه‌گیری، حجم نمونه‌گیری و نرخ نمونه‌گیری از پروفایل‌هاست. این ابعاد در مقالات متعددی مورد ارزیابی قرار گرفته‌اند که از آن جمله می‌توان به مقاله لی و وانگ [۳۵] اشاره کرد.

همان‌گونه که مرور تحقیقات انجام شده در حوزه پروفایل مانیتورینگ نشان داد، عمدتاً رویکرد رگرسیونی برای پرداختن به پروفایل‌ها بکار گرفته می‌شود. در این رویکرد برای وارد کردن ماهیت تصادفی و عدم قطعیت در مدل، جمله خطا را متغیری تصادفی با توزیع احتمالی معین فرض می‌کنند. به عبارتی دیگر تصادفی‌سازی در تک‌تک نقاط در طول پروفایل انجام می‌شود. در برخی کاربردها ثبت پیوسته پروفایل‌ها امکان‌پذیر می‌باشد. بحری و هادی [۳۶] به نمونه‌ای از چنین فرآیندی در صنعت پتروشیمی اشاره نموده‌اند. در اینجا این سؤال مطرح می‌شود که اگر در کاربردی امکان ثبت پیوسته پروفایل‌ها وجود داشته باشد، آیا باز هم باید با بکار بردن یکی از مدل‌های رگرسیونی و با انتخاب تعدادی نقطه و بررسی باقیمانده‌ها به کنترل فرآیند اقدام نمود؟ چه تعداد نقطه مطلوب است؟ اگر با ازدیاد این نقاط نتیجه بهتری حاصل می‌شود، آیا روشی برای حالت حدی، شامل دخالت دادن همه نقاط بازه وجود دارد؟ این سؤال‌ها انگیزه‌ای است برای آنکه مدل پایه‌ای سازگارتر با ماهیت تابعی پروفایل‌ها ارائه شود. مدلی که در آن پروفایل‌ها به عنوان تابعی تصادفی - آنچه که واقعا هستند - در نظر گرفته شوند که با تبعیت از الگوی تصادفی، از ابتدا تا انتهای

تابعی پروفایل‌ها مشوق نگارندگان این مقاله برای بکارگیری FDA در پروفایل مانیتورینگ بوده است.

همان‌طور که در منابع متعدد آورده شده (مثلاً [۳۸] و [۳۹])، معمولاً FD ها را عضو فضای $L^2 = L^2([0,1])$ در نظر می‌گیرند که عبارتست از مجموعه توابع حقیقی مقدار اندازه‌پذیر x تعریف شده روی $[0,1]$ است که در شرط $\int_0^1 x^2(t)dt < \infty$ صدق کنند. فضای L^2 یک فضای هیلبرت جداپذیر با ضرب داخلی تعریف شده بصورت $\langle x, y \rangle = \int x(t)y(t)dt$ است. یک علامت انتگرال بدون حدود انتگرال‌گیری برای نشان دادن انتگرال روی بازه $[0,1]$ بکار می‌رود. اگر $x, y \in L^2$ تساوی $x=y$ همیشه این معنی را می‌دهد که $\int [x(t) - y(t)]^2 dt = 0$.

یک منحنی تصادفی $X = \{X(t), t \in [0,1]\}$ به عنوان یک عنصر تصادفی L^2 مجهز به جبر سیگمای بورل در نظر گرفته شده و یک متغیر تابعی نامیده می‌شود. یعنی هر FD یک مشاهده از یک FV می‌باشد [۳۹]. متغیر تابعی X انتگرال‌پذیر نامیده می‌شود هرگاه $E\|X\| = E[\int X^2(t)dt]^{1/2} < \infty$ اگر X انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه یک تابع منحصر بفرد $\mu \in L^2$ وجود خواهد داشت که برای هر $y \in L^2$ داشته باشیم $E\langle y, X \rangle = \langle y, \mu \rangle$. این نتیجه می‌دهد که $\mu(t) = E[X(t)]$ برای تقریباً همه $t \in [0,1]$ که یک عنصر غیر تصادفی از L^2 است (که مرکز متغیر تابعی X را نشان می‌دهد و X حول آن نوسان می‌کند)، میانگین یا امید ریاضی X نامیده می‌شود [۳۹] (اگر بیم ابهام باشد آن را با μ_X نشان می‌دهند).

همچنین تابع واریانس X بصورت $var(t) = E[(X(t) - \mu(t))^2]$ تعریف می‌شود.

انتگرال این تابع، واریانس X را تشکیل می‌دهد یعنی $\sigma_X^2 = Var(X) = \int var(t)dt = E(\|X - EX\|^2)$

دامنه مورد بررسی بلغزند، و نه تعدادی نقطه که به‌طور تصادفی در صفحه پراکنده شده‌اند. پاسخ این سؤال بکار گرفتن آنالیز داده‌های تابعی (FDA^1) و در نظر گرفتن پروفایل‌ها به عنوان متغیرهای تابعی (FV^2) می‌باشد.

وقتی مشاهدات دارای ماهیت تابعی باشند، روش‌های متداول در تحلیل چند متغیره برای تحلیل آن‌ها ممکن است به چالش کشیده شود [۳۷]. در حالت کلی مشاهداتی که ذاتاً توابع پیوسته‌ای از یک متغیر مانند دما، زمان یا فرکانس هستند، داده‌های تابعی (FD^3) نامیده می‌شوند [۳۸]. در مبحث تحلیل داده‌های تابعی هر «مشاهده تابعی»، به عنوان یک ماهیت واحد و نه بصورت دنباله‌ای از مشاهدات گسسته در نظر گرفته می‌شود. چون در عمل معمولاً مشاهدات مربوط به هر برداشت در تعدادی نقاط مجزا در طول یک بازه زمانی اندازه‌گیری و گزارش می‌شود، تحلیل چنین داده‌هایی بجای روش‌های FDA عمدتاً از روش‌های موجود در تحلیل داده‌های چند متغیره انجام می‌شود. همان‌گونه که سیلورمن و رامسی [۳۸] ذکر کرده‌اند، استفاده از تحلیل چند متغیره برای داده‌هایی با ماهیت ذاتاً تابعی، دارای ایرادهایی است از جمله:

- ۱- امکان کنکاش بیشتر در مورد تغییرات در طول زمان (مثلاً برآورد مشتق مراتب اول و دوم) از ما سلب می‌شود.
 - ۲- وابستگی مشاهدات جمع‌آوری شده از هر آزمودنی در نقاط مجزا (وابستگی‌های افقی) نادیده گرفته می‌شود. در نتیجه جابجایی ترتیب زمان‌های جمع‌آوری داده‌ها (متغیرها) که هم‌ارز تغییر مرتبه اندیس‌ها در یک بردار چند مؤلفه‌ای است، نتایج آزمایش را تغییر نمی‌دهد.
 - ۳- با افزایش تعداد متغیرها، بعد ماتریس واریانس-کوواریانس بدون دربرداشتن اطلاعات مفیدی در مورد وابستگی بین مؤلفه‌ها به سرعت افزایش می‌یابد زیرا تغییرات بین مؤلفه‌ها در این حالت بسیار کوچک است.
- بنابراین FDA صحیح‌ترین راه پیش روی تحلیل‌گر در تحلیل چنین داده‌هایی می‌باشد [۳۸] و همین ماهیت

پیوستگی، یک متغیره یا چند متغیره بودن و ...) می‌توانند دارای تنوع بسیار زیادی باشند. در این تحقیق فقط پروفایل‌های یک متغیره پیوسته مدنظر قرار گرفته‌اند. این پروفایل‌ها عضو فضای L^2 هستند.

همان‌گونه که در FDA متداول است، مدلی پایه‌ای که در این تحقیق برای پروفایل X بکار گرفته می‌شود به صورت

$$X(t) = \mu(t) - e(t) \quad (11)$$

است. در این مدل e (خطا) خود متغیر تابعی با $Ee=0$ است (به عنوان مثال [۴۲] و [۳۹] را ببینید). به دلیل اهمیت e در این تحقیق آن را **پروفایل خطا** می‌نامیم. مقدار e در هر نقطه از دامنه، میزان انحراف X نسبت به میانگین می‌باشد. پس پروفایل خطا، پروفایلی است که حول محور طول‌ها نوسان می‌کند.

در فضاهای برداری نرم‌دار فاصله بین دو عنصر x و y با $\|x - y\|$ اندازه‌گیری می‌شود [۴۱]. برای حذف رادیکال و ساده‌سازی محاسبات می‌توان از توان دوم این کمیت استفاده کرد (مثلاً [۴۳] را ببینید). لذا $\|e\|^2 = \|X - \mu\|^2$ که یک متغیر تصادفی اسکالر است، کمیتی است که فاصله پروفایل از میانگین آن (و یا به عبارتی میزان انطباق یک پروفایل بر میانگین خود) را نشان می‌دهد. به دلیل اهمیت این متغیر تصادفی در این تحقیق، از نماد \mathbb{D}_X^2 برای نمایش آن استفاده می‌کنیم یعنی $\|e\|^2 = \mathbb{D}_X^2$. به‌سادگی می‌توان دید که $\sigma_X^2 = Var(X) = E(\mathbb{D}_X^2)$.

۳-۱- مفروضات مدل

از تعریف \mathbb{D}_X^2 دیده می‌شود که میانگین $\frac{\mathbb{D}_X^2}{\sigma_X^2}$ همواره برابر یک است و واریانس آن چنانکه بحری و هادی [۳۶] نشان دادند به میزان چین‌خوردگی پروفایل در طول دامنه آن بستگی دارد. به این معنی که هر چه میزان نوسان پروفایل در طول دامنه‌اش بیشتر باشد، واریانس کوچکتری برای $\frac{\mathbb{D}_X^2}{\sigma_X^2}$ حاصل خواهد شد. با این توضیح، مفروضات زیر در نظر گرفته می‌شود:

انحراف معیار X با $\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$ تعریف می‌شود [۴۰]. اگر X_1, X_2, \dots, X_n مشاهداتی مستقل و هم‌توزیع از L^2 باشد (هر منحنی به عنوان مشاهده‌ای از متغیر تابعی X در نظر گرفته می‌شود) آن را یک نمونه تصادفی می‌نامند. همان‌گونه که رامسی و سیلورمن [۴۱] ذکر کرده‌اند، تابع میانگین بوسیله آماره **میانگین نمونه** که بصورت $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ تعریف می‌شود تخمین زده می‌شود. در [۳۹] ثابت می‌شود که \bar{X} یک برآوردگر ناریب MSE سازگار برای μ است. همچنین تابع واریانس بوسیله آماره **تابع واریانس نمونه** که بصورت

$$Var(X(t)) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i(t) - \bar{X}(t))^2$$

تعریف می‌شود تخمین زده می‌شود. با گرفتن انتگرال از آن

$$S^2 = \int Var(X(t)) dt = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \|X_i - \bar{X}\|^2$$

آماره **واریانس نمونه** بدست می‌آید که برآوردگری برای σ_X^2 واریانس FV می‌باشد. در ادامه مقاله با به کمک FDA و با رویکردی تابعی مدلی برای پروفایل‌ها پیشنهاد می‌گردد. بر مبنای این مدل دو نمودار کنترلی برای مانیتورینگ پروفایل‌ها در فاز Π ارائه شده و طی شبیه‌سازی کامپیوتری عملکرد آن‌ها با یکدیگر و سایر نمودارهای کنترلی که امکان بکارگیری آن‌ها وجود دارد، مقایسه می‌گردد.

۳- معرفی مدل

در توصیف یک پروفایل بیان شد که یک پروفایل محصول فرآیندی است که خروجی آن بجای یک کمیت اسکالر یا برداری یک تابع است. در مبحث FDA ، چنین شیئی یک متغیر تابعی نامیده می‌شود [۳۹]؛ به عبارت دیگر مفاهیم پروفایل و FV کاملاً بر هم منطبق می‌باشند. هر مشاهده از چنین فرآیندی یک FD و یا بطور معادل یک پروفایل مشاهده شده نامیده می‌شود. پروفایل‌ها از نظر خصوصیات (مانند گسستگی یا

منطبق بر x_U (به‌نحوی که $P(X \geq x_U) \leq \alpha_U$) قرار می‌دهیم به‌طوری که $\alpha = \alpha_L + \alpha_U$ [۴۴].

طبق فرضیات مدل $\frac{\mathbb{D}_{\bar{X}}^2}{\sigma_p^2/n}$ دارای توزیع کای دو با یک درجه آزادی است، پس

$$P(\mathbb{D}_{\bar{X}}^2 \geq \chi_{\alpha,1}^2 \cdot \sigma_p^2/n) = \alpha$$

یعنی تحت این فرض که میانگین پروفایل بر هدف منطبق و واریانس آن σ_p^2 باشد نمودار کنترلی جهت مانیتور این پروفایل دارای خط مرکزی σ_p^2 و حدود احتمالی بالا و پایینی α بصورت $(0, \chi_{\alpha,1}^2 \cdot \sigma_p^2/n)$ خواهد بود.

شکل ۱ نمودار $\mathbb{D}_{\bar{X}}^2$ را برای مشاهدات مستقل در نمونه‌های به حجم ۵، از پروفایلی با میانگین خطی زیر روی بازه [2,4] را نشان می‌دهد:

$$\mu(t) = 3 + 4t \quad (۱۲)$$

در صورت تحت کنترل بودن فرآیند، پروفایل به شکل $X(t) = \mu(t) + e(t)$ است که در آن $e(t)$ پروفایل خطای داده شده در (۱۵) می‌باشد. در زمان $t = 40$ انحرافی در فرآیند ایجاد شده و عرض از مبدأ به‌اندازه $\sigma_p = 0.1639$ افزایش می‌یابد. مشاهده می‌شود که نمودار کنترلی $\mathbb{D}_{\bar{X}}^2$ با افزایش شدید دامنه نوسان، به خارج از حدود کنترلی، به انحراف بوجود آمده واکنش نشان می‌دهد. با توجه به اینکه انحراف بوجود آمده تنها ۵/۵ درصد مقدار اولیه عرض از مبدأ می‌باشد، توانایی نمودار کنترلی در تشخیص سریع آن قابل توجه است.

نتایج شبیه‌سازی کامپیوتری که در ادامه آورده خواهد شد، نشان می‌دهد که این نمودار کنترلی برای مواقعی که گرفتن نمونه‌ای تصادفی به تعداد زیاد امکان‌پذیر باشد عملکرد بسیار مطلوبی در تشخیص انحراف‌های بوجود آمده از خود نشان می‌دهد.

۱- فرض می‌شود که X_1, X_2, \dots, X_n مشاهداتی مستقل و هم‌توزیع از L^2 باشد که به‌طور پیوسته ثبت شده‌اند.

۲- پروفایل‌های مفروض متعلق به خانواده‌ای از اعضای تصادفی L^2 هستند که برای آن‌ها حاصل تقسیم \mathbb{D}_X^2 به واریانس پروفایل $(\frac{\mathbb{D}_X^2}{\sigma_X^2})$ ، دارای توزیع کای دو با یک درجه آزادی است (چنین پروفایل‌هایی دارای نوسان‌هایی در حد متداول در مقاصد عملی می‌باشند).

۳- برای هر t از دامنه پروفایل، متغیرهای تصادفی اسکالر $e(t)$ دارای واریانس مشترک σ_p^2 باشند (در اینصورت با توجه به پیوست ۱، $\sigma^2 = \sigma_p^2$ ، پس $\frac{\mathbb{D}_X^2}{\sigma_p^2} \sim \chi_1^2$ از طرف دیگر با توجه به پیوست ۲ داریم:

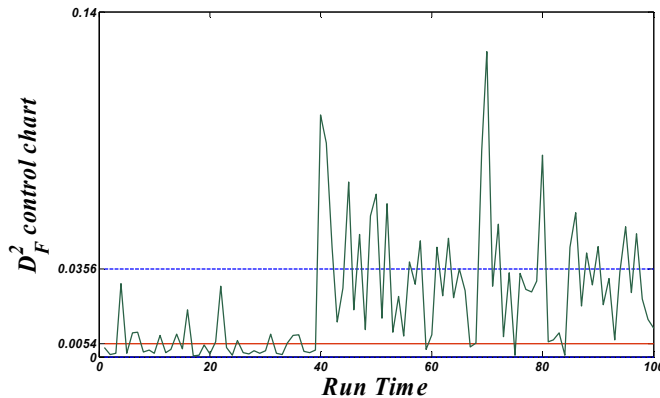
$$\frac{\mathbb{D}_X^2}{\sigma_X^2} = \frac{\mathbb{D}_{\bar{X}}^2}{\frac{1}{n}\sigma_p^2} \text{ پس } \sigma_X^2 = \frac{1}{n}\sigma_X^2 = \frac{1}{n}\sigma_p^2$$

توزیع کای دو با یک درجه آزادی است).

حال به کمک مدل (۱۱) و این مفروضات، دو نوع نمودار کنترلی $\mathbb{D}_{\bar{X}}^2$ و نمودار کنترلی واریانس متحرک موزون نمایی برای مانیتورینگ پروفایل‌ها در فاز II از فرآیندی که پروفایل مرجع آن مشخص است ارائه می‌شود.

۲-۳- نمودار کنترلی $\mathbb{D}_{\bar{X}}^2$

همان‌گونه که بیان شد، \mathbb{D}_X^2 میزان انطباق پروفایل بر میانگینش را نشان می‌دهد. لذا برای بررسی تحت کنترل بودن فرآیند می‌توان این کمیت را کنترل نمود. به این معنی که اگر اندازه \mathbb{D}_X^2 از مقداری خاص فراتر نرود، میزان انطباق پروفایل مشاهده شده با پروفایل مرجع در حد مطلوب است و لذا فرآیند تحت کنترل است. چون توزیع $\mathbb{D}_{\bar{X}}^2$ اختلاف زیادی با توزیع نرمال دارد، استفاده از روش احتمالی برای محاسبه حدود کنترلی مناسب است. در این روش ابتدا احتمال بروز خطای نوع اول به‌اندازه α تعیین می‌شود و سپس خط مرکزی (CL) را منطبق بر μ ، حد پایین کنترل (LCL) را منطبق بر x_L (به‌نحوی که $P(X \leq x_L) \leq \alpha_L$) و حد بالایی کنترل (UCL) را



شکل ۱- شناسایی انحراف ایجاد شده توسط نمودار کنترلی \mathbb{D}_X^2 هنگام مانتورینگ یک پروفایل میانگین خطی.

مقدار $\frac{S_n^2}{\sigma_p^2}$ یک مجموع وزن دار از واریانس‌های قبلی است. در پیوست ۳ نشان داده می‌شود که این کمیت بطور تقریبی دارای توزیع $\frac{\chi_h^2}{h}$ است که عدد درجات آزادی $h = \frac{2-r}{r}$ بستگی به پارامتر وزن نمایی r ساختار همبستگی \mathbb{D}_k^2 و درجات آزادی S_0^2 دارد. همچنین این پیوست نشان می‌دهد که S_n^2 یک برآوردگر ناریب برای σ_X^2 است.

تحت مفروضات مدل و با این فرض که میانگین پروفایل بر پروفایل مرجع منطبق است (فرآیند تحت کنترل است) و \mathbb{D}_k^2 دارای میانگین σ_p^2 است، حدود بالایی و پایینی کنترل برای S_n^2 با درصدی $100\% \left(\frac{\alpha}{2}\right)$ و $100\% \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ از توزیع $\frac{\sigma_p^2}{h} \chi_h^2$ با $h = \frac{2-r}{r}$ داده می‌شود. یعنی حدود کنترلی مناسب عبارتند از $(C_3^* \hat{\sigma}_p^2, C_4^* \hat{\sigma}_p^2)$ که از داده‌های جمع‌آوری شده در زمان‌هایی که فرآیند تحت کنترل بوده، حاصل شده است $C_4^* = \frac{\chi_{\alpha/2, h}^2}{h}$ و $C_3^* = \frac{\chi_{1-\alpha/2, h}^2}{h}$ و مقادیر C_3^* و C_4^* برای مقادیر مختلفی از r و برای سطوح احتمالی $\alpha = 0.05$ و $\alpha = 0.01$ در جدول (۲) داده شده است.

حدود کنترلی فوق براساس توزیع S_n^2 در n بدست آمده‌اند. مقدار ریسک α که در ساخت این حدود کنترلی

۳-۳- نمودار کنترلی واریانس متحرک موزون نمایی برای پروفایل‌ها ($PEWMV^I$)

در پروسه‌هایی که هزینه‌های نمونه‌گیری بالاست، استفاده از نمودارهای کنترلی مبتنی بر مشاهدات تکی ارجحیت پیدا می‌کند [۴۴]. لذا انگیزه منطقی وجود دارد که از مشاهدات تکی در دوره‌های زمانی کوتاه‌تر بجای مشاهدات گروهی در دوره‌های زمانی طولانی‌تر، برای بهبود کنترل کیفیت استفاده شود. اقدامی که در رسم نمودارهای میانگین متحرک موزون نمایی ($EWMA$) و واریانس متحرک موزون نمایی ($EWMV$) نیز به آن مبادرت شده است. واریانس متحرک موزون نمایی برای پروفایل‌ها بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$S_n^2 = \sum_{k=1}^n r(1-r)^{n-k} \mathbb{D}_k^2 \quad (13)$$

$$+(1-r)^n S_0^2 = (1-r)S_{n-1}^2 + r\mathbb{D}_n^2$$

در این عبارت r پارامتر وزن است ($0 < r \leq 1$) که نرخ تنزیل نمایی داده‌های گذشته را کنترل می‌کند و S_0^2 تخمینی مقدماتی از واریانس پروفایل است $(S_0^2 = \hat{\sigma}_p^2)$ که معمولاً فرض می‌شود از مقادیر تاریخی در دوره‌های تحت کنترل بدست آمده است. با توجه به اینکه جمع اوزان برابر یک خواهد بود:

$$\sum_{k=1}^n (1-r)^{n-k} + (1-r)^n = 1 \quad (14)$$

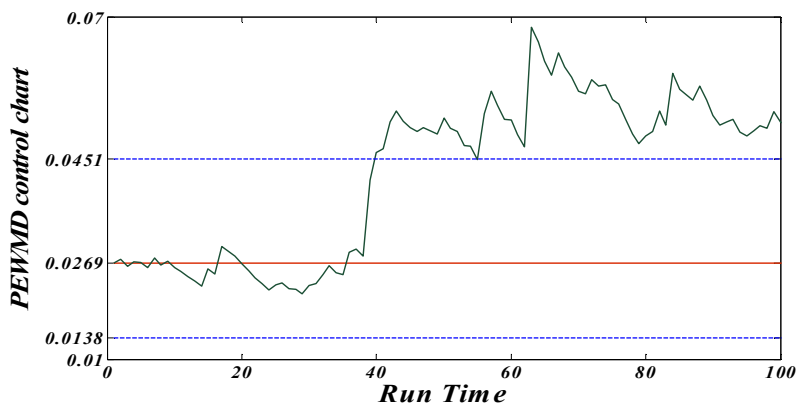
(۲) درجه آزادی $h = 39$ را ارائه می‌کند و با بکار بردن جدول (۲) برای $\alpha = 0.01$ ، حدود کنترلی در نقاط $(0.0138, 0.0451)$ واقع می‌شوند. از نمونه $t = 40$ به بعد انحرافی به اندازه σ_p در عرض از مبدأ میانگین پروفایل ایجاد گردیده است. این انحراف باعث حرکت نمودار کنترلی به سمت بالا و خارج شدن آن از حد کنترلی فوقانی گردیده است. واکنش سریع نمودار کنترلی $PEWMV$ ، توانایی این نمودار کنترلی در تشخیص انحراف ۵/۵ درصدی موجود در فرآیند را نشان می‌دهد. حال با معرفی این نمودارهای کنترلی باید به این سؤال پاسخ دهیم که عملکرد این نمودارها نسبت به یکدیگر و همچنین نسبت به سایر نمودارهای کنترلی چگونه است. در بخش بعدی و طی شبیه‌سازی کامپیوتری این مقایسه انجام خواهد شد. برای این کار ابتدا پروفایل خطا با خواص مفروض در این تحقیق معرفی می‌گردد.

بکار گرفته شده، مقدار خطای نوع یک را وقتی فقط مقدار فعلی آماره S_n^2 در نظر گرفته شود، نشان می‌دهد. اما چون آماره‌های $S_1^2, \dots, S_{n-1}^2, S_n^2$ مستقل نیستند، مقدار ریسک سراسری مربوط به n تست از $k=1$ تا $k=n$ در حالت کلی برابر با حاصل‌ضرب ریسک این آماره‌ها نمی‌باشد. به عنوان یک رویکرد عمومی مانند آنچه که در دیگر روش‌های وزن‌دهی نمایی مانند $EWMA$ متداول است، می‌توان از شبیه‌سازی مونت‌کارلو برای محاسبه ریسک سراسری α ، برای دست یافتن به میانگین طول دنباله مناسب در حالت تحت کنترل استفاده کرد [۴۵].

شکل ۲ نمودار کنترلی $PEWMV$ را که برای مانتورینگ پروفایل (۱۲) بکار گرفته شده نمایش می‌دهد. این نمودار کنترلی با مقدار اولیه $S_0^2 = \sigma_p^2 = 0.0269$ و پارامتر وزن نمایی $r = 0.05$ رسم شده است. این مقدار r طبق جدول

جدول (۲) - حدود کنترلی C_3^* و C_4^* نمودار کنترلی $PEWMV$ با پارامتر وزن نمایی (r)، درجه آزادی متناظر (h) و مشاهدات مستقل

$PEWMV$ parameter (r)	0.01	0.02	0.05	0.10	0.20	0.33	
Degrees of freedom h	199	99	39	19	9	5	
$\alpha = 0.01$	C_3^*	0.7396	0.6724	0.5184	0.4356	0.1936	0.0784
	C_4^*	1.2544	1.3924	1.6641	2.0164	2.6244	3.3489
$\alpha = 0.05$	C_3^*	0.81	0.7396	0.6084	0.4489	0.3025	0.1681
	C_4^*	1.21	1.2996	1.4884	1.7424	2.1025	2.56



شکل ۲- شناسایی انحراف ایجاد شده توسط نمودار کنترلی $PEWMV$ هنگام مانتورینگ یک پروفایل با میانگین خطی

۴- شبیه‌سازی کامپیوتری و نتایج عددی

با توجه به رابطه (۱۱) و با توجه به اینکه μ یک عنصر غیر تصادفی از L^2 است، در صورت در دست بودن X, e نیز معین خواهد بود. لذا هنگام بحث درباره یک پروفایل با میانگین معلوم، پروفایل خطای متناظر آن داده خواهد شد. در بخش قبل برای سادگی در نوشتن فرمول‌ها، FD ها را چنان‌که متداول است بر بازه $[0,1]$ در نظر گرفتیم. این امر به کلیت بحث آسیبی وارد نمی‌کند و همه مطالب بیان شده برای هر بازه‌ای مانند $[a, b]$ نیز برقرار است زیرا با تبدیل خطی ساده‌ای می‌توان دامنه FD را به $[0,1]$ تبدیل کرد. برای تأکید بر این مطلب، مقادیر متغیر تابعی زیر به عنوان پروفایل خطا بر بازه $[2,4]$ در نظر گرفته شده است.

$$e(t) = 0.2|r_1|^{0.2} e^{\cos(vt+\pi r_2)} \quad (15)$$

$$(\cos(vx.\cos(vt + 10\pi r_3) + \pi r_4)$$

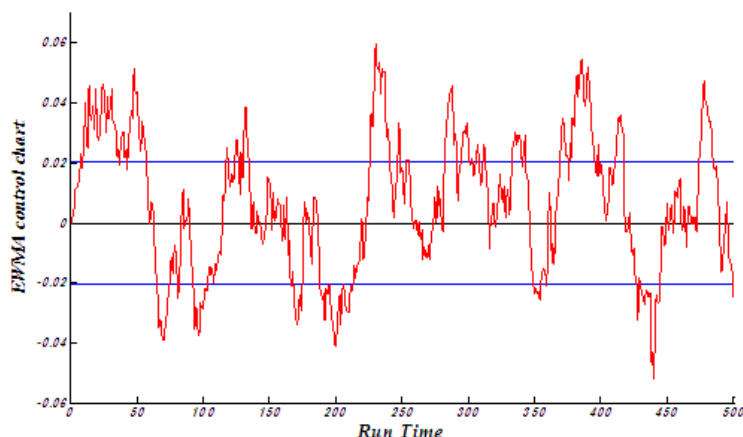
$$\cos(vt.\cos(vt + 10\pi r_5) + \pi r_6))$$

که در آن r_1 تا r_6 اعدادی تصادفی با توزیع نرمال استاندارد و v (ضریب نوسان) مقداری ثابت است که مقدار نوسان پروفایل با افزایش آن زیاد می‌شود. بحری و هادی [۳۶] نشان دادند، این پروفایل به ازاء $v = 0.4$ خواص مفروض در این تحقیق را داراست و برای آن $\sigma_p = 0.1639$ حاصل می‌گردد. همان‌گونه که مشاهده می‌شود در این پروفایل خودهمبستگی بسیار پیچیده‌ای بین خطای نقاط واقع در امتداد پروفایل وجود دارد.

در صورت برقراری مفروضات روش‌های پیشین پروفایل مانیتورینگ، امکان بکارگیری و مقایسه آن‌ها با روش‌های پیشنهادی در این مقاله میسر می‌شود. لذا پیش از آن که عملکرد نمودارهای کنترلی \mathbb{D}_X^2 و $PEWMV$ مورد بررسی و مقایسه قرار گیرد، به بررسی این مطلب می‌پردازیم که آیا مفروضات سایر روش‌ها برای مانیتورینگ چنین پروفایل‌هایی برقرار است یا خیر؟

همان‌طور که بحری و هادی [۳۶] نشان دادند، خطاهای حاصل از پروفایل خطای (۱۵) از توزیعی دو مد (و لذا غیر نرمال) تبعیت می‌کنند. محمود و وودل [۴۶] و محمود [۴۷] در تحقیقات خود نشان دادند، در کلیه روش‌های پیشین نقض فرض نرمال بودن خطاها، به طرز

چشمگیری بر عملکرد این روش‌ها تأثیر منفی گذاشته و تعداد دفعاتی که هشدار اشتباه داده می‌شود را به شدت افزایش می‌دهد. همچنین آن‌طور که پیش‌تر گفته شد، فرض مستقل بودن باقیمانده‌ها با توجه به دیدگاه تابعی برقرار نخواهد بود. پروفایل بکار گرفته شده در این شبیه‌سازی (یعنی مدل (۱۵)) یک مدل با همبستگی غیرخطی پیچیده خطاهاست و همان‌طور که نورالسنا و همکاران [۶] در مقاله خود ذکر کرده‌اند، به دلیل دشواری‌های موجود، روشی برای مانیتورینگ چنین پروفایل‌هایی ارائه نشده است. این موضوع باعث می‌شود که روش‌هایی با یک یا هر دو این مفروضات (نرمال بودن و مستقل بودن خطاها)، برای کنترل چنین پروفایل‌هایی قابل استفاده نباشند. برای پی بردن به تبعات استفاده بدون توجه به برقراری مفروضات این مدل‌ها، در اینجا نمونه‌ای ذکر می‌شود. نمودار کنترلی $EWMA/R$ ارائه شده توسط کنگ و آلباین [۷] در سطح خطای $\alpha = 0.01$ و با پارامترهای $\theta = 0.02$ و $n = 11$ برای مانیتور پروفایل (۱۲) بدون آنکه انحرافی در آن ایجاد شود، بکار گرفته می‌شود. لذا هر نقطه خارج از کنترل در این نمودار، یک هشدار اشتباه خواهد بود. چون تقریباً همه هشدارهای خطا توسط منحنی $EWMA$ داده شده، این منحنی در شکل ۳ آورده شده است. چون $\sigma_p = 0.1639$ مقدار $\frac{\sigma_p}{\sqrt{n}} = 0.0494$ به عنوان میانگین متوسط باقیمانده‌ها، \bar{e} بکار گرفته می‌شود. در صورتی که اطلاعات بدست آمده از شبیه‌سازی نشان می‌دهد که مقدار واقعی میانگین \bar{e} حدود سه برابر یعنی 0.1562 است. دلیل این امر خودهمبستگی مقادیر خطاهای واقع در امتداد یک پروفایل می‌باشد. همان‌گونه که در شکل ۳ دیده می‌شود، این موضوع علاوه نرمال نبودن توزیع خطاها، منجر به افزایش شدید تعداد هشدارهای اشتباه گردیده است. همچنین همبستگی بین خطاها غیرخطی بوده و لذا ضریب همبستگی بدست آمده در شبیه‌سازی که همبستگی خطی را نشان می‌دهد صفر است. پس روش‌هایی مانند آنچه که سلیمانی و همکاران [۲۹] (برای وضعیتی که همبستگی $AR(1)$ بین خطاها وجود دارد) پیشنهاد نموده‌اند نیز قابل استفاده نمی‌باشد.



شکل ۳ - تعداد بسیار زیاد هشدارهای اشتباه در نمودار EWMA به دلیل تخطی از مفروضات مدل

۱- انحراف در عرض از مبدأ به اندازه $\lambda\sigma_p$ (میانگین پروفایل به $\mu_0(t) = (3 + \lambda\sigma_e) + 4t$ تبدیل می‌شود).

۲- انحراف در شیب به اندازه $\beta\sigma_p$ (میانگین پروفایل به $\mu_0(t) = 3 + (4 + \beta\sigma_e)t$ تبدیل می‌شود).

۳- دوران پروفایل حول مرکز خود (میانگین پروفایل به $\mu_0(t) = (3 - 3\gamma\sigma_p) + (4 + \gamma\sigma_p)t$ تبدیل می‌شود).

شبیه‌سازی به طول 10000 اجرا شده است تا نتایج قابل اعتمادی حاصل شود. همان‌گونه که انتظار است، هر چه حجم نمونه بزرگتر باشد، نمودار کنترلی $\mathbb{D}_{\bar{x}}^2$ در تعداد گام‌های کمتری موفق به تشخیص انحراف بوجود آمده می‌گردد. عملکرد این نمودار در حجم‌های نمونه بزرگ، حتی برای انحراف‌های کوچک بسیار مطلوب است؛ اما وقتی انحراف بوجود آمده در میانگین پروفایل بزرگ باشد، کارایی نمودارهای کنترلی $\mathbb{D}_{\bar{x}}^2$ در حجم‌های نمونه مختلف تقریباً نزدیک به هم است. حدود کنترلی نمودار به‌گونه‌ای انتخاب شده‌اند که متوسط طول دنباله برای نمودار کنترلی PEWMA برابر ۱۰۰ شود. نمودار کنترلی PEWMA با پارامتر وزن نمایی $r = 0.2$ در مقایسه با سایر مقادیر بررسی شده، نسبت به تغییرات کوچک (در مورد همه تغییر شکل‌هایی که سبب خارج از کنترل شدن فرآیند شده‌اند)، عملکرد بهتری از خود نشان داده است؛ اما برای مقادیری از پارامترها که تغییر شکل بوجود آمده

لذا بجز نمودارهای کنترلی پیشنهاد شده $\mathbb{D}_{\bar{x}}^2$ و PEWMA در این تحقیق، تنها می‌توان از نمودارهای کنترلی روش متریک که کاملاً تجربی بوده و هیچ فرضی در مورد توزیع پروفایل خطا ندارند، به عنوان کاندیدهای قابل استفاده برای مانیتورینگ این پروفایل استفاده کرد که در اینجا به مقایسه عملکرد آن‌ها پرداخته خواهد شد.

برای مقایسه عملکرد نمودارهای کنترلی $\mathbb{D}_{\bar{x}}^2$ ، PEWMA و پنج نمودار کنترلی روش متریک با مترهای M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 ابتدا آن‌ها جهت مانیتورینگ پروفایل (۱۲) بکار گرفته می‌شوند. متوسط طول دنباله هر نمودار در زمانی که انحراف‌هایی مشخص و یکسان در پروفایل ایجاد شده را بدست آورده و مورد مقایسه می‌گیرد. در هر یک از این حالات، نمودار کنترلی $\mathbb{D}_{\bar{x}}^2$ به ازاء حجم‌های نمونه 2، 5، 10 و 20 و نمودار کنترلی PEWMA به ازاء مقادیر 0.05، 0.1، 0.2 و 0.33 برای پارامتر وزن نمایی r که در روش‌های وزن‌دهی نمایی متداول هستند، بکار گرفته شده‌اند تا به ازاء مقادیر مختلف پارامترهای هر یک، عملکرد آن‌ها مورد سنجش قرار گیرد و همزمان تأثیر مقادیر متفاوت این پارامترها در کارایی نمودارهای کنترلی نیز بررسی شود. جداول (۳) تا (۵) نتایج این شبیه‌سازی را بر روی پروفایل وقتی انحراف‌های زیر در میانگین آن ایجاد می‌شود، نشان می‌دهد.

دوران‌های کوچک تقریباً بوسیله منحنی $PEWMV$ غیرقابل شناسایی است و عملکرد بسیار ضعیفی از خود نشان می‌دهد. چنین انحرافی در عمل نیز تأثیر ناچیزی بر خروجی فرآیند خواهد گذاشت.

جهت مقایسه بیشتر عملکرد دو نمودار کنترلی $\mathbb{D}_{\bar{x}}^2$ و $PEWMD$ و نشان دادن توانایی آن‌ها در مانتیورینگ پروفایل‌هایی با میانگین‌های مختلف، مثال بعدی فرآیندی را در نظر می‌گیرد که خروجی آن یک پروفایل است که میانگین آن همواره یک تابع سینوسی است؛ یعنی:

$$\mu(t) = \sin(t) \quad (۱۶)$$

و وقتی عاملی باعث تغییر میانگین پروفایل به تابعی بصورت $\mu(t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\gamma\sigma_e\right)$ می‌شود نمودارهای کنترلی $\mathbb{D}_{\bar{x}}^2$ و $PEWMV$ جهت شناسایی این انحراف بکار گرفته می‌شود. در این مثال شکل پیچیده‌ای از پروفایل‌ها مطرح شده که هم میانگین پروفایل و هم انحراف آن غیرخطی بوده و خودهمبستگی غیرخطی پیچیده‌ای که در فرمول (۱۵) داده شده، بین خطاها وجود دارد. جدول (۶) نتایج شبیه‌سازی انجام شده به ازاء مقادیر مختلفی از λ را نشان می‌دهد. مجدداً شبیه‌سازی به طول ۵۰۰۰ تکرار انجام شده است.

در میانگین پروفایل بزرگ باشد، کارایی نمودارهای کنترلی $PEWMV$ به ازاء مقادیر مختلف r تقریباً نزدیک به هم است. نمودار کنترلی $\mathbb{D}_{\bar{x}}^2$ حتی به ازاء کوچک‌ترین حجم نمونه خود عملکرد بهتری نسبت به نمودار کنترلی $PEWMV$ و نمودارهای روش متریک در شناسایی انحراف ایجاد شده در عرض از مبدأ دارد و با افزایش حجم نمونه عملکرد آن به مقدار چشمگیری بهبود می‌یابد. در مقایسه عملکرد نمودار کنترلی $PEWMV$ و نمودارهای روش متریک در جدول (۳) دیده می‌شود که هیچ یک از نمودارهای روش متریک عملکرد بهتری از نمودار $PEWMV$ در شناسایی انحراف در عرض از مبدأ ندارند. تحلیل فوق در مورد عملکرد این نمودارها در شناسایی انحراف شیب میانگین پروفایل که در جدول (۴) داده شده است نیز بصورت کاملاً یکسان برقرار است؛ اما زمانی که انحرافی بصورت دوران در میانگین پروفایل ایجاد شود با وضعیت متفاوتی روبرو می‌شویم. نتایج شبیه‌سازی این وضعیت در جدول (۵) آورده شده است. همان‌طور که از جدول اخیر دیده می‌شود نمودار کنترلی روش متریک مبتنی بر متر M_1 توانایی قابل ملاحظه‌ای در شناسایی انحرافات ایجاد شده از خود نشان می‌دهد و عملکرد آن از نمودار $PEWMV$ و حتی نمودار $\mathbb{D}_{\bar{x}}^2$ با حجم نمونه ۵ نیز بهتر است.

جدول (۳) - متوسط طول دنباله نمودارهای کنترلی در شناسایی انحراف در عرض از مبدأ به اندازه $\lambda\sigma_p$

		λ (shift in the intercept)										
		0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
$\mathbb{D}_{\bar{x}}^2$	n											
	02	100	84.4	48.2	26.1	13.5	8.3	5.3	3.7	2.7	2.1	1.6
	05	100	64.5	22.3	9.4	4.8	2.6	1.8	1.4	1.2	1.1	1
	10	100	42.8	11.4	4.1	2	1.4	1.1	1	1	1	1
	20	100	22.8	4.6	1.7	1.2	1	1	1	1	1	1
PEWMV	r											
	0.05	100	95.2	67.1	35.9	21.3	13.2	8.5	6.3	5.0	4.1	3.3
	0.10	100	84.7	59.6	39.3	21.7	12.5	8.9	6.3	4.9	3.9	3.1
	0.20	100	83.7	60.8	38.5	24.3	13.9	9.3	6.2	4.7	3.7	3.1
	0.33	100	87.8	65.7	41.6	25.8	15.2	10.5	6.6	5.1	3.8	3.0
Metrics Method	M_1	100	86.0	59.9	40.6	29.4	22.3	15.7	10.9	9.0	6.8	4.9
	M_2	100	92.2	61.6	43.9	30.4	22.9	14.7	9.8	7.3	5.0	3.6
	M_3	100	90.4	61.2	43.4	30.4	22.7	14.5	9.7	7.2	4.9	3.6
	M_4	100	95.9	66.2	46.6	32.2	24.3	15.9	10.7	7.7	5.4	3.8
	M_5	100	93.3	63.4	44.7	30.9	23.4	14.9	10.2	7.5	5.2	3.8

جدول (۴) - متوسط طول دنباله نمودارهای کنترلی در شناسایی انحراف در شیب به اندازه $\beta\sigma_p$

		β (shift in the slope)										
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$\mathbb{D}_{\bar{X}}^2$	n											
	02	100	60.1	25.5	11.1	5.5	3	1.9	1.5	1.2	1.1	1
	05	100	37.2	9.1	3.2	1.7	1.2	1	1	1	1	1
	10	100	21.4	3.9	1.6	1.1	1	1	1	1	1	1
	20	100	9	1.7	1	1	1	1	1	1	1	1
PEWMV	r											
	0.05	100	89.3	36.6	18.9	9.5	6.4	4.4	3.2	2.4	2.1	1.8
	0.10	100	72.0	34.4	16.2	8.1	5.2	3.5	2.7	2.1	1.7	1.5
	0.20	100	69.8	39.7	17.3	8.4	5.2	3.7	2.6	2.0	1.7	1.5
	0.33	100	71.4	39.5	18.8	9.5	5.2	3.5	2.5	2.1	1.7	1.4
Metrics Method	M ₁	100	72.2	37.0	20.2	12.6	7.6	4.2	2.5	1.9	1.5	1.2
	M ₂	100	83.0	44.5	22.9	14.3	8.8	5.1	3.0	2.3	1.9	1.5
	M ₃	100	81.9	43.6	22.6	14.1	8.7	5.1	3.0	2.3	1.9	1.5
	M ₄	100	86.9	46.4	23.9	15.0	9.2	5.3	3.2	2.4	1.9	1.5
	M ₅	100	84.7	45.7	24.3	14.8	9.0	5.3	3.1	2.4	1.9	1.5

که یک پروفایل در حقیقت یک متغیر تابعی است. لذا مدل تابعی که در FDA برای FV ها استفاده می‌شود برای پروفایل‌ها بکار گرفته شد. این مدل از نظر عملیاتی و نزدیکی به شرایط دنیای واقعی نسبت به مدل رگرسیونی بر ماهیت پروفایل منطبق‌تر بوده و وجود خودهمبستگی بین جملات خطا در طول یک پروفایل در آن کاملاً پذیرفته شده است. اما در روش‌های پیشین، همان‌طور که در مروری که در ابتدای مقاله انجام شد دیدیم، به دلیل بکارگیری مدل‌های رگرسیونی، خود همبستگی بین جملات خطا بسیار مشکل‌ساز بوده و به‌ناچار نادیده انگاشته شده و یا حالت خاصی از آن مانند $AR(1)$ در نظر گرفته می‌شود. در این تحقیق پروفایل‌هایی که اعضای پیوسته‌ای از L^2 هستند را مدنظر قرار داده و دو نمودار کنترلی $\mathbb{D}_{\bar{X}}^2$ مبتنی بر حجم نمونه دو یا بیشتر و $PEWMV$ با نمونه‌های تکی برای مانیتورینگ پروفایل‌ها پیشنهاد شد. برای شبیه‌سازی کامپیوتری، پروفایل خطایی با شکل بسیار پیچیده‌ای از خودهمبستگی خطای نقاط واقع در امتداد یک پروفایل بکار گرفته شد. این خودهمبستگی پیچیده، آن‌چنان که در شبیه‌سازی نشان داده شد، باعث از کار افتادن روش‌های مبتنی بر رویکرد رگرسیونی می‌گردد.

در ابتدا باید به موفقیت هر دو نمودار کنترلی در کشف انحراف‌های با دلیل و اعلام خارج شدن فرآیند از کنترل توجه نمود. مانند مثال قبل در اینجا نیز مطابق انتظار، هر چه حجم نمونه بزرگتر باشد، نمودار کنترلی $\mathbb{D}_{\bar{X}}^2$ در تعداد گام‌های کمتری موفق به تشخیص انحراف بوجود آمده می‌گردد و حساسیت نمودار در حجم‌های نمونه بزرگ، بخصوص برای انحراف‌های کوچک بسیار بیشتر است. از بین پارامترهای وزن نمایی به آزمون گذاشته شده برای نمودار کنترلی $PEWMV$ در این مثال، روش به ازاء مقادیر 0.2 و 0.33 نسبت به سایر مقادیر عملکرد بهتری از خود به نمایش می‌گذارند، اما عملکرد این منحنی کنترلی به ازاء 0.2 اندکی بهتر بوده و میانگین طول دنباله کوتاه‌تری برای شناسایی خارج از کنترل بودن فرآیند از آن حاصل می‌شود. ولی در هر صورت کارایی ضعیف‌تری نسبت به نمودار $\mathbb{D}_{\bar{X}}^2$ حتی وقتی حجم نمونه کوچک باشد از خود نشان می‌دهد.

نتیجه‌گیری

در این مقاله با رویکردی تابعی دو نمودار کنترلی برای فاز دو مانیتورینگ پروفایل‌هایی که بصورت پیوسته ثبت شده‌اند پیشنهاد شد. با توجه به وجود دو عنصر «تابع بودن» و «تصادفی بودن» در ماهیت پروفایل‌ها بیان شد

جدول (۵) - متوسط طول دنباله نمودارهای کنترلی در شناسایی دوران پروفایل حول مرکز خود

		γ (rotate in profile around central point)										
		0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
$\mathbb{D}_{\bar{x}}^2$	n											
	02	100	100	100	89.5	84.6	75	56.5	48.4	35.1	26.2	18.6
	05	100	100	100	80	61.5	40.9	23.3	12.3	6	2.6	1.5
	10	100	100	83.6	53.4	30.2	12.4	3.8	1.6	1.1	1	1
	20	100	100	60.5	26.4	5.9	1.5	1	1	1	1	1
PEWMD	r											
	0.05	100	100	100	97	82.3	51.7	34.3	25.3	17.5	12.5	10.0
	0.10	100	100	100	91.0	74.8	51.9	37.6	25.2	17.6	13.1	9.5
	0.20	100	100	94.1	85.2	71.1	62.1	45.1	32.0	24.5	17.0	12.9
	0.33	100	100	94.5	85.9	71.0	66.4	51.2	40.2	32.9	22.3	19.4
Metrics Method	M_1	100	89.6	68.1	44.0	32.6	22.1	16.1	12.2	9.1	6.2	4.4
	M_2	100	100	100	100	100	100	100	100	96.9	96.0	95.4
	M_3	100	100	98.9	96.5	95.2	93.7	93.5	93.5	95.4	95.1	92.6
	M_4	100	100	99.3	98.2	96.5	85.0	80.7	65.2	55.4	47.8	44.2
	M_5	100	100	100	100	100	100	100	100	98.3	98.0	97.6

جدول (۶) - متوسط طول دنباله نمودارهای کنترلی $\mathbb{D}_{\bar{x}}^2$ و PEWMD در شناسایی انحرافی بصورت اختلاف فاز در یک پروفایل با میانگین سینوسی

		λ (phase difference in sinusoidal mean)										
		0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
$\mathbb{D}_{\bar{x}}^2$	n											
	02	100	66.4	31.3	15.3	7.3	4.2	2.7	1.9	1.5	1.2	1.1
	05	100	47.8	13	4.8	2.3	1.5	1.2	1	1	1	1
	10	100	28.3	5.8	2.1	1.3	1	1	1	1	1	1
	20	100	14.4	2.2	1.2	1	1	1	1	1	1	1
PEWMD	r											
	0.05	100	96.1	47.2	23.1	12.9	7.8	5.1	4.0	3.3	2.4	2.3
	0.10	100	82.8	46.1	22.9	11.6	7.1	4.7	3.8	2.8	2.2	1.9
	0.20	100	79.9	46.7	24.4	12.4	7.1	4.7	3.6	2.6	2.2	1.8
	0.33	100	79.6	46.9	25.7	14.5	8.0	5.2	3.6	2.6	2.1	1.9

کاربردهایی که امکان نمونه‌گیری با حجم‌های زیاد میسر است، توانایی نمودار کنترلی $\mathbb{D}_{\bar{x}}^2$ نسبت به دیگر نمودارها در تشخیص انحرافات بسیار چشمگیر است. عملکرد نمودارهای PEWMD و روش متریک با متر M_1 (که بهترین عملکرد را از بین مترهای مختلف داشت) نزدیک به یکدیگر بوده و هر یک در پاره‌ای موارد، اندکی بهتر از دیگری عمل می‌نماید. همچنین توانایی نمودارهای کنترلی پیشنهادی و روش یکسان بکارگیری آن‌ها برای مانیتورینگ پروفایل‌هایی با اشکال مختلف ویژگی برجسته دیگری است که از بکارگیری رویکرد تابعی

لذا از بین روش‌های پیشین فقط نمودارهای کنترلی روش متریک که حدود کنترلی‌شان بصورت تجربی و بدون فرضیات تئوریک بنا می‌شوند قابلیت بکارگیری برای مانیتورینگ این پروفایل را دارند. عملکرد دو نمودار کنترلی پیشنهاد شده در این تحقیق با نمودارهای کنترلی روش متریک به کمک ARL بدست آمده از شبیه‌سازی کامپیوتری مقایسه و نشان داده شد که نمودارهای کنترلی پیشنهادی از توانایی مناسبی در تشخیص انحراف‌های مختلفی که می‌تواند در میانگین یک پروفایل ایجاد شود، برخوردار هستند. به‌ویژه در

حاصل شده است. این تحقیق مربوط به فاز II پروفایل مانتیورینگ است. جهت پژوهش‌های آینده مایلیم توجه پژوهشگران را به گسترش نمودارهای کنترلی پیشنهادی در این تحقیق به فاز I یعنی حالتی که پروفایل مرجع نامعلوم باشد جلب نماییم. نگارندگان این مقاله برای این کار هم‌اکنون ایده استفاده از \bar{X} (حاصل از خروجی زمان‌هایی که فرآیند تحت کنترل است) به عنوان پروفایل مرجع را دنبال می‌کنند.

پیوست ۳

برای واریانس متحرک موزون نمایی تعریف شده در (۱۳)، که در آن n متغیر تصادفی مستقل \mathbb{D}_k^2 دارای توزیع $\sigma_p^2 \chi_1^2$ هستند، S_n^2 دارای توزیع تقریبی $\frac{\sigma_p^2}{h} \chi_h^2$ است که در آن $h = \frac{2-r}{r}$. برای اثبات این موضوع بطور موقت جمله $(1-r)^n S_0^2$ در سمت راست معادله (۱۳) نادیده گرفته شده و توزیع قسمت باقیمانده آن یعنی $S_n^2 = \sum_{k=1}^n r(1-r)^{n-k} \mathbb{D}_k^2$ بدست می‌آید. طبق تعمیم قضیه کوکران که توسط باکس [۴۹] انجام شد، برای ثابت‌های مثبت $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ و متغیرهای تصادفی مستقل $\chi_1^2, \dots, \chi_n^2$ که دارای توزیع کای دو با درجات آزادی به ترتیب ν_1, \dots, ν_n هستند، $\sum_{j=1}^n \lambda_j \chi_j^2$ دارای توزیع تقریبی $g \chi_h^2$ درجه آزادی است، که در آن $h = \frac{(\sum_{j=1}^n \nu_j \lambda_j)^2}{\sum_{j=1}^n \nu_j \lambda_j^2}$ و $g = \frac{\sum_{j=1}^n \nu_j \lambda_j^2}{\sum_{j=1}^n \nu_j \lambda_j}$ لذا با توجه به اینکه طبق فرض $\frac{\mathbb{D}_k^2}{\sigma_p^2}$ ها دارای توزیع کای دو با یک درجه آزادی هستند با قرار دادن $\lambda_j = r(1-r)^{n-j}$ و $\nu_j = 1$ با توجه به اینکه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^n r(1-r)^{n-j} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - (1-r)^n) = 1$$

پس

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^n (r(1-r)^{n-j})^2 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^2}{1-(1-r)^2} (1 - (1-r)^{2n}) = \frac{r}{2-r}$$

برای مقادیر به‌اندازه کافی بزرگ از n بطور تقریبی خواهیم داشت:

$$g = \frac{\sum_{j=1}^n \nu_j \lambda_j^2}{\sum_{j=1}^n \nu_j \lambda_j} = \frac{\sum_{j=1}^n (r(1-r)^{n-j})^2}{\sum_{j=1}^n r(1-r)^{n-j}} \approx \frac{r}{2-r}$$

در اینجا بررسی این موضوع مورد توجه قرار می‌گیرد که اگر واریانس خطای نقاط در طول پروفایل یکسان باشد، واریانس پروفایل نیز با آن برابر خواهد بود. به عبارت دقیق‌تر اگر برای هر t از دامنه پروفایل، متغیر تصادفی اسکالر $e(t)$ دارای واریانس مشترک σ_p^2 باشد، آنگاه $\sigma_X^2 = \sigma_p^2$. برای نشان دادن این موضوع، با توجه به اینکه برای هر $X \in L^2$ داریم $E(\int X(t) dt) = \int E(X(t)) dt$ می‌توان نوشت:

پیوست ۱

در اینجا بررسی این موضوع مورد توجه قرار می‌گیرد که اگر واریانس خطای نقاط در طول پروفایل یکسان باشد، واریانس پروفایل نیز با آن برابر خواهد بود. به عبارت دقیق‌تر اگر برای هر t از دامنه پروفایل، متغیر تصادفی اسکالر $e(t)$ دارای واریانس مشترک σ_p^2 باشد، آنگاه $\sigma_X^2 = \sigma_p^2$. برای نشان دادن این موضوع، با توجه به اینکه برای هر $X \in L^2$ داریم $E(\int X(t) dt) = \int E(X(t)) dt$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= E\left(\mathbb{D}_X^2\right) = E\left(\int e^2(t) dt\right) \\ &= \int E\left(e^2(t)\right) dt = \int E\left((e(t) - 0)^2\right) dt \\ &= \int E\left(\left(e(t) - E(e(t))\right)^2\right) dt = \sigma_p^2 \end{aligned}$$

و این یعنی واریانس پروفایل با واریانس مشترک نقاط یکسان است.

پیوست ۲

در بیان مفروضات مدل از این مطلب استفاده شده که اگر \bar{X} میانگین نمونه‌ای به حجم n از پروفایلی با میانگین μ و واریانس σ_X^2 باشد، آنگاه $Var(\bar{X}) = \frac{1}{n} \sigma_X^2$. اثبات این موضوع از مطلبی که شیر [۴۰] بیان می‌کند استفاده می‌بریم مبنی بر اینکه برای دو FV مستقل X و Y ، واریانس مجموع از

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$$

حاصل می‌شود. با توجه به خاصیت نرم، این مطلب را می‌توان این‌گونه تعمیم داد که برای FV های مستقل

$$h = \frac{(\sum_{j=1}^n v_j \lambda_j)^2}{\sum_{j=1}^n v_j \lambda_j^2} = \frac{(\sum_{j=1}^n r(1-r)^{n-j})^2}{\sum_{j=1}^n (r(1-r)^{n-j})^2} \approx \frac{2-r}{r}$$

لذا با توجه به اینکه جمله $(1-r)^n S_0^2$ به ازاء مقادیر بزرگ n به صفر می‌گراید، می‌توان دید که S_n^2 دارای توزیع تقریبی $\frac{r}{2-r} \sigma_p^2 \chi^2$ با درجه آزادی $\frac{2-r}{r}$ خواهد بود. همچنین با توجه به اینکه $E(\chi_h^2) = h$ خواهیم داشت $E(S_n^2) = \sigma_p^2 = \sigma_X^2$ و لذا S_n^2 یک برآوردگر نارایب برای σ_X^2 است.

two methods for online monitoring of linear calibration profiles. *International Journal of Production Research*, 2006. 44(10): p. 1927-1942.

[10] Neter, J., W. Wasserman, and M.H. Kutner, *Applied Linear Statistical Models*, 3rd edition., in Richard D. Irwin, Inc., Boston, MA.1990.

[11] Chang, T.-C. and F.-F. Gan, Monitoring linearity of measurement gauges. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 2006. 76(10): p. 889-911.

[12] Zhu, J. and D.K.J. Lin, Monitoring the slopes of linear profiles. *Quality Engineering*, 2010. 22(1): p. 1-12.

[13] Noorossana, R., et al. Monitoring Process Performance Using Linear Profiles. in *Proceedings of the 3rd International Industrial Engineering Conference*. 2004. Tehran, Iran.

[14] Healy, J.D., A Note on Multivariate CUSUM procedure. *Technometrics*, 1987. 29: p. 409-412.

[15] Zou, C., F. Tsung, and Z. Wang, Monitoring general linear profiles using multivariate exponentially weighted moving average schemes. *Technometrics*, 2007. 49(4): p. 395-408.

[16] Mahmoud, M.A., Phase I analysis of multiple linear regression profiles. *Communications in Statistics: Simulation and Computation*, 2008. 37(10): p. 2106-2130.

[17] Jensen, W.A., J.B. Birch, and W.H. Woodall, Monitoring correlation within linear profiles using mixed models. *Journal of Quality Technology*, 2008. 40(2): p. 167-183.

فهرست منابع

[1] Qiu, P., C. Zou, and Z. Wang, Nonparametric profile monitoring by mixed effects modeling. *Technometrics*, 2010. 52(3): p. 265-277.

[2] Woodall, W.H., Current research on profile monitoring. *Producao*, 2007. 17(3): p. 420-425.

[3] Mestek, O., J. Pavlik, and M. Suchánek, Multivariate control charts: Control charts for calibration curves. *Fresenius' Journal of Analytical Chemistry*, 1994. 350(6): p. 344-351.

[4] Stover, F.S. and R.V. Brill, Statistical quality control applied to ion chromatography calibrations. *Journal of Chromatography A*, 1998. 804(1-2): p. 37-43.

[5] Woodall, W.H., et al., Using control charts to monitor process and product quality profiles. *Journal of Quality Technology*, 2004. 36(3): p. 309-320.

[6] Noorossana, R., A. Saghaei, and A. Amiri, *Statistical analysis of profile monitoring*. Vol. 865. 2012: John Wiley & Sons.

[7] Kang, L. and S.L. Albin, On-line monitoring when the process yields a linear profile. *Journal of Quality Technology*, 2000. 32(4): p. 418-426.

[8] Kim, K., M.A. Mahmoud, and W.H. Woodall, On the monitoring of linear profiles. *Journal of Quality Technology*, 2003. 35(3): p. 317-328.

[9] Gupta, S., D.C. Montgomery, and W.H. Woodall, Performance evaluation of

- [26] Zhang, H. and S. Albin, Detecting outliers in complex profiles using a χ^2 control chart method. IIE Transactions (Institute of Industrial Engineers), 2009. 41(4): p. 335-345.
- [27] Chicken, E., J.J. Pignatiello Jr, and J.R. Simpson, Statistical process monitoring of nonlinear profiles using wavelets. Journal of Quality Technology, 2009. 41(2): p. 198-212.
- [28] Zou, C., P. Qiu, and D. Hawkins, Nonparametric control chart for monitoring profiles using change point formulation and adaptive smoothing. Statistica Sinica, 2009. 19(3): p. 1337.
- [29] Soleimani, P., R. Noorossana, and A. Amiri, Simple linear profiles monitoring in the presence of within profile autocorrelation. Computers & Industrial Engineering, 2009. 57(3): p. 1015-1021.
- [30] Noorossana, R., A. Amiri, and P. Soleimani, On the monitoring of autocorrelated linear profiles. Communications in Statistics - Theory and Methods, 2008. 37(3): p. 442-425.
- [31] Kazemzadeh, R.B., R. Noorossana, and A. Amiri, Phase II monitoring of autocorrelated polynomial profiles in AR(1) processes. Scientia Iranica, 2010. 17(1 E): p. 12-24.
- [32] Jensen, W.A. and J.B. Birch, Profile monitoring via nonlinear mixed models. Journal of Quality Technology, 2009. 41(1): p. 18-34.
- [33] Zou, C., Y. Zhang, and Z. Wang, A control chart based on a change-point model for monitoring linear profiles. IIE Transactions (Institute of Industrial Engineers), 2006. 38(12): p. 1093-1103.
- [18] Noorossana, R., M. Eyvazian, and A. Vaghefi, Phase II monitoring of multivariate simple linear profiles. Computers and Industrial Engineering, 2010. 58(4): p. 563-570.
- [19] Kazemzadeh, R.B., R. Noorossana, and A. Amiri, Phase I monitoring of polynomial profiles. Communications in Statistics-Theory and Methods, 2008. 37(10): p. 1671-1686.
- [20] Williams, J.D., W.H. Woodall, and J.B. Birch, Statistical monitoring of nonlinear product and process quality profiles. Quality and Reliability Engineering International, 2007. 23(8): p.941-925.
- [21] Ding, Y., L. Zeng, and S. Zhou, Phase I analysis for monitoring nonlinear profiles in manufacturing processes. Journal of Quality Technology, 2006. 38(3): p. 199-216.
- [22] Williams, J., et al., Statistical monitoring of heteroscedastic dose-response profiles from high-throughput screening. Journal of agricultural, biological, and environmental statistics, 2007. 12(2): p. 216-235.
- [23] Young, T.M., P.M. Winistorfer, and S. Wang, Multivariate Control Charts of MDF and OSB Vertical Density Profile Attributes. Forest Products Journal, 1999. 49(5): p. 79-86.
- [24] Walker, E. and S.P. Wright, Comparing curves using additive models. Journal of Quality Technology, 2002. 34(1): p. 118-129.
- [25] Vaghefi, A., S.D. Tajbakhsh, and R. Noorossana, Phase II monitoring of nonlinear profiles. Communications in Statistics - Theory and Methods, 2009. 38(11): p. 1834-1851.

- [44] Montgomery, D.C., Introduction to Statistical Quality Control 2008: Wiley.
- [45] MacGregor, J. and T. Harris, The exponentially weighted moving variance. *Journal of Quality Technology*, 1993. 25(2).
- [46] Mahmoud, M.A. and W.H. Woodall, Phase I analysis of linear profiles with calibration applications. *Technometrics*, 2004. 46(4): p. 380-391.
- [47] Mahmoud, M.A., The Monitoring of linear profiles and the inertial properties of control charts, 2004, Virginia Polytechnic Institute and State University.
- [48] Ok, E.A., Probability Theory with Economic Applications 2006: book draft.
- [49] Box, G.E.P., Some Theorems on Quadratic Forms Applied in the Study of Analysis of Variance Problems, I. Effect of Inequality of Variance in the One-Way Classification. *Annals of Mathematical Statistics*, 1954. 25(2): p. 13.
- [34] Mahmoud, M.A., et al., A change point method for linear profile data. *Quality and Reliability Engineering International*, 2007. 23(2): p. 247-268.
- [35] Li, Z. and Z. Wang, An exponentially weighted moving average scheme with variable sampling intervals for monitoring linear profiles. *Computers and Industrial Engineering*, 2010. 59(4): p. 630-637.
- [36] Bahri, M., Hadi-Vencheh, A. Designing Statistical Test for Mean of Random Profiles. *Industrial Engineering and Management Systems*, 2016, 15(4): p. 432-445.
- [37] Ramsay, J.O., When the data are functions. *Psychometrika*, 1982. 47: p. 379-396.
- [38] Silverman, B. and J. Ramsay, *Functional Data Analysis* 2005: Springer.
- [39] Horváth, L. and P. Kokoszka, *Inference for functional data with applications*. Vol. 200. 2012: Springer.
- [40] Scheer, C., *Bedingte Konvergenz stochastischer Prozesse*, 2003, University of Trier: Trier, Germany.
- [41] Ramsay, J.O. and B.W. Silverman, *Applied functional data analysis: methods and case studies*. Vol. 77. 2002: Springer.
- [42] Fan, J. and S.-K. Lin, Test of significance when data are curves. *Journal of the American Statistical Association*, 1998. 93(443): p. 1007-1021.
- [43] Ferraty, F. and P. Vieu, *Nonparametric functional data analysis: theory and practice* 2006: Springer.

