دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال پنجم، شماره بیست و دوم، بهمن و اسفند ۱۳۹۸
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

ساکل و خاصیت (A) از f-حلقه‌ی $\mathcal{R}(L_\tau)$

علی اکبر استاجی[۱*]، علی‌اصغر استاجی[۲]، مریم طاها[۳]

[۱] استاد، گروه ریاضی محض، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران.
[۲] گروه ریاضی محض، دانشکده ریاضی وعلوم کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران.
[۳] دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران.

تاریخ ارسال مقاله: ۹۶/۱۰/۰۳ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۴/۰۳

چکیده

زوج (L,τ) که به اختصار با L_τ نشان داده می‌شود را توپوقاب نامیم، در صورتی که τ زیرقاب، قاب L باشد و هر عنصر از τ در L دارای متمم باشد. f–حلقه‌ی $\mathcal{R}(L_\tau)$ برابر با $\{f\in Frm(\mathcal{P}(\mathbb{R}),L)\ :\ f(\mathfrak{O}(\mathbb{R}))\subseteq\tau\}$ است. در این مقاله برای هر عنصر متمم‌دار $a\in L$، اگر $a,a'\in\tau$، عنصر خودتوان f_a متعلق $\mathcal{R}(L_\tau)$ را معرفی می‌کنیم و نشان می‌دهیم ایده‌آل I از f-حلقه‌ی $\mathcal{R}(L_\tau)$ ایده‌آل می‌نیمال است اگر و تنها اگر اتم a در L به قسمی وجود داشته باشد که I توسط عنصر خودتوان f_a تولید شود اگر و تنها اگر اتم a در L به قسمی وجود داشته باشد که $I=\{f\in\mathcal{R}(L_\tau) : coz(f)\leq a\}$. همچنین نشان می‌دهیم f–حلقه‌ی $\mathcal{R}(L_\tau)$ برابر تمام fهایی است که $coz(f)$ برابراتصال تعداد متناهی اتم می‌باشد و در انتها نشان می‌دهیم f-حلقه‌ی $\mathcal{R}(L_\tau)$ دارای خاصیت (A) است و اگر در f- حلقه‌ی $\mathcal{R}(L_\tau)$ تعداد اتم‌های قاب L متناهی باشند، آن‌گاه حلقه‌ی خارج قسمتی $\frac{\mathcal{R}(L_\tau)}{Soc(\mathcal{R}(L_\tau))}$ دارای خاصیت (A) می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: ایده‌آل مینیمال، f-حلقه، ساکل حلقه، حلقه با خاصیت (A).

*عهده‌دارمکاتبات: Email: aaestaji@hsu.ac.ir

۱- مقدمه

در نسخه توپولوژی بدون نقطه فضای توپولوژی X فقط زیرمجموعه‌های باز فضا، یعنی; $\mathfrak{O}(\mathrm{X})$ را مطالعه می‌کنیم، در حالی‌که هنگام مطالعه فضای توپولوژی $(\mathrm{X},\mathfrak{O}(\mathrm{X}))$ ما در واقع زوج مرتب $(\mathcal{P}(\mathrm{X}),\mathfrak{O}(\mathrm{X}))$ را بررسی کرده و هم‌چنین به عنوان مثال $int_X A$، $cl_X A$، $\partial(A)$ و غیره را برای هر $A\in\mathcal{P}(\mathrm{X})$ مورد مطالعه قرار می‌دهیم. استاجی و همکارانش در [۶]، توپوقاب L_τ را معرفی کردند و بدین گونه همتایی برای زوج مرتب $(\mathcal{P}(\mathrm{X}),\mathfrak{O}(\mathrm{X}))$ ارائه نمودند و هم‌چنین آن‌ها- fحلقه‌ی $\mathcal{R}(L_\tau)$ را نیز معرفی کردند و نشان دادند $C(\mathrm{X})$ یک‌ریخت با $\mathcal{R}(\mathcal{P}(X)_{\mathfrak{O}(\mathrm{X})})$ است.

ساکل یک حلقه برابر با جمع مستقیم تمام ایده‌آل‌های می‌نیمال حلقه می‌باشد. کرمزاده و همکارانش در [۱۳] نشان دادند برای هر فضای هاسدورف و کاملاً منظّم X، ساکل حلقه $C(\mathrm{X})$ برابر با تمام آن توابع پیوسته حقیقی مقدار روی X است که در تمام نقاط بجز تعداد متناهی نقطه برابر با صفر می‌باشند. در [۳] نشان داده شده ساکل $\mathcal{R}L$ برابر با تمام fهایی است که $coz(f)$ برابر با اتصال تعدادی متناهی اتم می‌باشد، ولی در آن مولدهای ایده‌آل‌های می‌نیمال را به وضوح معرفی نمی‌کنند. در [۱۲] f–حلقه‌ی $\mathcal{F}_{\wp}L$ معرفی شده و در [۵] ایده‌آل‌های می‌نیمال f–حلقه‌ی $\mathcal{F}_{\wp}L$ را شناسایی می‌کنند و نشان می‌دهند ایده‌آل‌های می‌نیمال f–حلقه‌ی $\mathcal{F}_{\wp}L$ اصلی و تولید شده توسط f_a می‌باشند که در این‌جا a یک اتم از قاب L است.

در این مقاله نشان می‌دهیم ایده‌آل‌های می‌نیمال f–حلقه‌ی $\mathcal{R}(L_\tau)$ اصلی و تولید شده توسط f_a می‌باشند مشروط به این‌که a یک اتم از قاب L باشد. هم‌چنین نشان می‌دهیم ساکل f–حلقه‌ی $\mathcal{R}(L_\tau)$ برابر با تمام fهایی است که $coz(f)$ اتصال تعداد متناهی اتم باشد.

کاپلانسکی در [۱۱، صفحه‌ی ۵۶] نشان می‌دهد اگر I ایده‌آلی با تولید متناهی و مشمول در مجموعه‌ی مقسوم علیه‌های صفر حلقه‌ی جابجایی و نوتری R باشد، آن‌گاه $0\neq r\in R$ به قسمی وجود دارد که $Ir=0$، به عبارتی پوچساز ایده‌آل I مخالف صفر است. هم‌چنین کاپلانسکی در [۱۱، صفحه‌ی ۶۳] نشان داده است که حلقه‌ی غیر نوتری R و ایده‌آل ناصفر و با تولید متناهی I مشمول در مجموعه‌ی مقسوم علیه‌های صفر R به قسمی وجود دارد که پوچساز I برابر با صفر است در واقع نشان می‌دهد شرط نوتری از شرایط اساسی مسئله می‌باشد. مسئله مطرح شده در [۱۱، صفحه‌ی ۵۶] را هوکابا و کِلِر در [۱۰] با اسم خاصیت (A) روی حلقه‌های جابجایی، به صورت زیر ارائه نمودند.

گوئیم حلقه‌ی R دارای خاصیت (A) است، هرگاه I ایده‌آلی با تولید متناهی و مشمول در مجموعه‌ی مقسوم علیه‌های صفر R باشد، آن‌گاه پوچساز I مخالف صفر است.

محققین زیادی روی خاصیت (A) حلقه‌های جابجایی کار کرده‌اند([۱، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۵] را ببینید).

در این مقاله نشان می‌دهیم f–حلقه‌ی $\mathcal{R}(L_\tau)$ و حلقه‌ی خارج قسمتی $\frac{\mathcal{R}(L_\tau)}{Soc(\mathcal{R}(L_\tau))}$ دارای خاصیت (A) می‌باشند.

۲- پیش نیازها

در این بخش مفاهیم اولیه را می‌آوریم و از اثبات قضایا و لم‌ها صرف نظر می‌کنیم، جهت مطالعه بیشتر و اثبات‌ها به [۴، ۱۶] مراجعه شود.

مجموعه مرتب جزئی L را که برای هر $a,b\in L$، $a\wedge b:=\inf\{a,b\}$ و $a\vee b:=\sup\{a,b\}$. در L وجود داشته باشند را مشبکه می‌نامیم. زیرمجموعه غیر تهی S از مشبکه L را یک زیرمشبکه می‌نامیم، اگر برای هر $x,y\in S$، $x\vee y\in S$ و هم‌چنین $x\wedge y\in S$. علاوه براین مشبکه‌ی L را کامل نامیم، هرگاه برای هر زیر مجموعه S از L، $\vee S$ و $\wedge S$ در L وجود داشته باشند.

مشبکه‌ی کامل L را در نظر بگیرید. عنصر a متعلق به L را اتم نامیم، در صورتی که مخالف کوچک‌ترین عضو L باشد و برای هر $x\in L$ که مخالف کوچک‌ترین عضو L است، که از $x\leq a$ نتیجه شود $x=a$.

مشبکه‌ی کامل L را قاب نامیم، هرگاه برای هر $a\in L$ و به ازای هر زیرمجموعه‌ی دلخواه S از L شرط توزیع پذیری $a\wedge\vee S=\bigvee_{s\in S}(a\wedge s)$ برقرار باشد.

همریختی مشبکه‌ای که هر اتصال دلخواه را حفظ می‌کند، همریختی قابی یا نگاشت قابی می‌گوییم.
برای هر عنصر a متعلق به قاب L شبه متمم a را به صورت $a^* = \bigvee\{x \in L : a \wedge x = \perp\}$ تعریف می‌شود و اگر عنصر a متمم‌دار باشد، آن‌گاه $a^* = a'$.
فرض می‌کنیم A یک حلقه است. حلقه‌ی A با یک رابطه‌ی مرتب جزئی، حلقه‌ی مرتب جزئی است به شرط این‌که:

(۱) برای هر $a, b, x \in A$، که $a \le b$ داشته باشیم $a + x \le b + x$.

(۲) برای هر $a, b \in A$ اگر $a, b \ge 0$، آن‌گاه $ab \ge 0$.

حلقه‌ی مرتب جزئی A را که برای هر $a, b \in A$ ، $a \vee b$ و $a \wedge b$ وجود داشته باشند، حلقه‌ی مرتب مشبکه‌ای می‌گوییم. در حلقه‌ی مرتب مشبکه‌ای A، به ازای هر $a \in A$ قرار می‌دهیم:

$$|a| = a \vee (-a)$$
$$a^- = (-a) \vee 0$$

و

$$a^+ = a \vee 0.$$

حلقه مرتب مشبکه‌ای A را که برای هر $f, g, h \in A$، اگر که $h \ge 0$، در شرط $(f \wedge g)h = fh \wedge gh$ صدق کند، f–حلقه می‌نامند.
از [۶] به یاد می‌آوریم که زوج (L, τ) که به اختصار با L_τ نشان داده می‌شود را توپوقاب می‌نامیم، در صورتی که τ زیرقاب، قاب L بوده و هر عنصر از τ در L دارای متمم باشد. می‌گوئیم τ توپوقاب روی L است، در صورتی که L_τ توپوقاب باشد. هم‌چنین $\mathcal{R}(L_\tau)$ را برابر با $\{f \in Frm(\mathcal{P}(\mathbb{R}), L) : f(\mathfrak{O}(\mathbb{R})) \subseteq \tau\}$ قرار می‌دهیم. در [۶] نشان داده‌اند:

گزاره ۲–۱: برای هر $X \subseteq \mathbb{R}$، $\circ \in \{+, \cdot, \wedge, \vee\}$ و $f, g \in \mathcal{R}(L_\tau)$، اگر

$$(f \circ g)(X) = \bigvee\{f(Y) \wedge g(Z) : Y \circ Z \subset X\}$$

که این‌جا

$$Y \circ Z = \{y \circ z : y \in Y, z \in Z\}$$

آن‌گاه $(\mathcal{R}(L_\tau) ; +, \cdot, \wedge, \vee)$ زیر f–حلقه‌ی $\mathcal{F}_{\wp}L$ می‌باشد. هم‌چنین برای هر $X \subseteq \mathbb{R}$،

$\circ \in \{+, \cdot, \wedge, \vee\}$

و

$f, g \in \mathcal{R}(L_\tau)$،

$$(f \circ g)(X) = \bigvee\{f(\{y\}) \wedge g(\{z\}) : y \circ z \in X\}$$

و $f = g$ اگر و تنها اگر برای هر $x \in \mathbb{R}$،

$$f(\{x\}) = g(\{x\}).$$

به ازای هر $c \in \mathbb{R}$، تابع ثابت حقیقی مقدار $\boldsymbol{c}$ روی قاب L که متعلق به $\mathcal{F}_{\wp}L$ است برای هر $X \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ به صورت

$$\boldsymbol{c}(X) = \begin{cases} \top & ; c \in X \text{ اگر} \\ \perp & ; c \notin X \text{ اگر} \end{cases}$$

تعریف می‌شود. یکی از ارتباط‌های مهم بین $\mathcal{R}(L_\tau)$ و قاب L، نگاشت همصفراست که به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$coz : \mathcal{R}(L_\tau) \to L$$
$$f \mapsto f(\mathbb{R}\setminus\{0\})$$

و برای هر $f, g \in \mathcal{R}(L_\tau)$، گزاره‌های زیر برقرار هستند:

(۱) برای هر $n \in \mathbb{N}$،
$coz(f^n) = coz(f) = coz(|f|)$.

(۲) اگر $\mathbf{0} \le f \le g$ در این صورت
$coz(f) \le coz(g)$.

(۳) $coz(f + g) \le coz(f) \vee coz(g)$ و $coz(f^2 + g^2) \le coz(f) \vee coz(g)$.

(۴) $coz(fg) = coz(f) \wedge coz(g)$.

(۵) $coz(f) = \perp$ اگر و تنها اگر $f = \mathbf{0}$.

(۶) f عنصر معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر $coz(f) = \top$.

واضح است برای هر $f \in \mathcal{R}(L_\tau)$، $f(\{0\})$ متمم $coz(f)$ است، آن را عنصر صفر قاب L می‌نامیم و قرار می‌دهیم:

$$z(f) := f(\{0\}).$$

۳- ایده‌آل‌های مینیمال حلقه‌ی $\mathcal{R}(L_\tau)$

در این بخش ایده‌آل‌های می‌نیمال حلقه‌ی $\mathcal{R}(L_\tau)$ را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

تعریف۳-۱: فرض کنید L قاب باشد. تابع $t : \mathbb{R} \to L$ را دم-حقیقی روی L نامیم، در صورتی که شرایط زیر برقرار باشد.

(۱) برای هر $x , y \in \mathbb{R}$، اگر $x \neq y$ آن‌گاه

(۲) $t(x) \wedge t(y) = \perp$.

(۳) $\bigvee_{x\in\mathbb{R}} t(x) = \top$.

برای ادامه کارمان به لم زیر که برهان آن را می‌توانید در [۱۸] ببینید، نیاز داریم.

لم۳-۲: برای هر دم-حقیقی $t : \mathbb{R} \to L$ روی قاب L، نگاشت

$$\varphi_t : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to L$$
$$X \mapsto \bigvee_{x\in X} t(x)$$

همریختی قابی است.

گزاره۳-۳: فرض کنید $t : \mathbb{R} \to L$ روی قاب L دم-حقیقی باشد و

$$\varphi_t : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to L$$
$$X \mapsto \bigvee_{x\in X} t(x).$$

اگر $\varphi_t\left(\mathfrak{D}(X)\right) \subseteq \tau$، آن‌گاه $\varphi_t \in \mathcal{R}(L_\tau)$.

برهان: بنا بر لم ۳-۲ واضح است.

در سرتاسر این مقاله برای هر عنصر a متعلق به قاب L، نگاشت $f_a : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to L$ را با ضابطه

$$f_a(X) = \begin{cases} \top & ;0,1 \in X \quad \text{اگر} \\ a^* & ;1 \notin X \text{ و } 0 \in X \quad \text{اگر} \\ a & ;1 \in X \text{ و } 0 \notin X \quad \text{اگر} \\ \perp & ;0,1 \notin X \quad \text{اگر} \end{cases}$$

در نظر می‌گیریم.

گزاره۳-۴: فرض کنید τ توپوقاب روی قاب L باشد و $a \in L$ دارای متمم باشد. اگر $a, a' \in \tau$، آن‌گاه f_a عنصر حلقه‌ی $\mathcal{R}(L_\tau)$ است.

برهان: تعریف می‌کنیم $t : \mathbb{R} \to L$ با ضابطه‌ی

$$t(x) = \begin{cases} a' & ;x = 0 \quad \text{اگر} \\ a & ;x = 1 \quad \text{اگر} \\ \perp & ;x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\} \quad \text{اگر} \end{cases}$$

واضح است که t دم-حقیقی روی قاب L است و همچنین برای هر $X \in P(\mathbb{R})$، $f_a(X) = \bigvee_{x\in X} t(x)$. چون برد تابع f_a زیرمجموعه‌ی τ است، پس بنابر گزاره‌ی ۳-۳، $f_a \in \mathcal{R}(L_\tau)$.

گزاره ۳-۵: فرض کنید τ توپوقاب روی قاب L باشد و $a \in L$ دارای متمم باشد. اگر $a, a' \in \tau$، آن‌گاه برای هر $f \in \mathcal{R}(L_\tau)$ و $X \in P(\mathbb{R})$ داریم:

$$ff_a(X) = \begin{cases} a' \vee f(X) & ;0 \in X \quad \text{اگر} \\ a \wedge f(X) & ;0 \notin X \quad \text{اگر} \end{cases}$$

برهان: تعریف می‌کنیم $t : \mathbb{R} \to L$ با ضابطه‌ی

$$t(x) = \begin{cases} a' \vee z(x) & ;x = 0 \quad \text{اگر} \\ a \wedge f(\{x\}) & ;x \neq 0 \quad \text{اگر} \end{cases}$$

واضح است که t دم-حقیقی روی قاب L است و همچنین برای هر $0 \neq x \in \mathbb{R}$،

$$\begin{aligned} & ff_a(\{x\}) \\ &= \bigvee\{ f(\{y\}) \wedge f_a(\{z\}) : yz = x \} \\ &= \bigvee\left\{ f(\{y\}) \wedge f_a\left(\left\{\tfrac{x}{y}\right\}\right) : 0 \neq y \in \mathbb{R}\right\} \\ &= f(\{x\}) \wedge f_a(\{1\}) \\ &= f(\{x\}) \wedge a \\ &= t(x) \end{aligned}$$

و چون

$$\begin{aligned} ff_a(\{0\}) &= z(ff_a) \\ &= z(f) \vee z(f_a) \\ &= z(f) \vee a' \\ &= t(0) \end{aligned}$$

پس برای هر $X \in P(\mathbb{R})$،

$$ff_a(X) = \bigvee_{x\in X} t(x)$$
$$= \begin{cases} a' \vee f(X) & ;0 \in X \text{ اگر} \\ a \wedge f(X) & ;0 \notin X \text{ اگر} \end{cases}$$

نتیجه۳-۶: فرض کنید τ توپوقاب روی قاب L باشد و $a \in L$ دارای متمم باشد.اگر $a, a' \in \tau$، آن‌گاه f_a عنصر خودتوان حلقه‌ی $\mathcal{R}(L_\tau)$ است.

برهان: بنابر گزاره‌های ۳-۴ و ۳-۵ واضح است.

گزاره ۳-۷: فرض کنیم e عنصر خودتوان حلقه‌ی $\mathcal{R}(L_\tau)$ باشد، در این صورت $e = f_{coz(e)}$ و $coz(e), z(e) \in \tau.$

برهان: فرض کنیم e عنصر خودتوان باشد. چون

$$e = e^2 \geq 0$$

پس $\perp = e(-\infty, 0)$ و برای هرعدد حقیقی نامنفی x،

$$\begin{aligned} e(x) &= e^2(x) \\ &= \bigvee\{e(\{y\}) \wedge e(\{z\}) : yz = x\} \\ &= \bigvee\{f(\{y\} \wedge \{z\}) : yz = x\} \\ &= e(\{\sqrt{x}\}) \vee e(\{-\sqrt{x}\}) \\ &= e(\{\sqrt{x}\}). \end{aligned}$$

از طرفی اگر $x \geq 0$ و $e(x) \neq \perp$، آن‌گاه

$$\begin{aligned} \perp &\neq e(x) \\ &= e(x) \wedge e(\{\sqrt{x}\}) \\ &= e(\{x\} \wedge \{\sqrt{x}\}) \end{aligned}$$

و در نتیجه

$$\{x\} \wedge \{\sqrt{x}\} \neq \emptyset.$$

بنابراین $x = 0$ یا $x = 1$.

پس برای هر $x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$، $e(\{x\}) = \perp$. اکنون اگر $0 \in X$ و $1 \notin X$،آن‌گاه

$$e(X) = e(\{0\}) \vee e(X - \{0\})$$
$$= e(\{0\}) = z(e).$$

هم‌چنین برای حالتی‌که $0 \notin X$ و $1 \in X$ نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} e(X) &= e(\{1\}) \vee e(X - \{1\}) \\ &= e(\{1\}) \\ &= coz(e). \end{aligned}$$

بنابراین $e = f_{coz(e)}$.

در سرتاسر این مقاله برای هر عنصر $a \in L$، قرار می‌دهیم:

$$\mathcal{R}_{L_\tau}(a) := \{f \in \mathcal{R}(L_\tau) : coz(f) \leq a\}$$

به وضوح $\mathcal{R}_{L_\tau}(a)$ ایده‌آل $\mathcal{R}(L_\tau)$ است.

گزاره۳-۸: فرض کنید τ توپوقاب روی قاب L باشد و $a \in L$ دارای متمم باشد. اگر $a, a' \in \tau$، آن‌گاه برای هر $h \in \mathcal{R}_{L_\tau}(a)$ داریم $hf_a = h$ و در نتیجه $\mathcal{R}_{L_\tau}(a)$ ایده‌آل اصلی تولید شده توسط f_a است.

برهان: فرض می‌کنیم که $h \in \mathcal{R}_{L_\tau}(a)$ و $X \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. اگر $0 \notin X$، آن‌گاه

$$h(X) \leq coz(h) \leq a$$

و در نتیجه

$$a \wedge h(X) = h(X).$$

اگر $0 \in X$، آن‌گاه

$$h(X) = h(X\backslash\{0\}) \vee h(\{0\})$$

و چون برای هر $h \in \mathcal{R}_{L_\tau}(a)$، داریم $coz(h) \leq a$، نتیجه می‌گیریم

$$a' \leq (coz(h))' = z(h).$$

پس

$$\begin{aligned} a' \vee h(X) &= (a' \vee h(X\backslash\{0\})) \vee h(\{0\}) \\ &= h(X\backslash\{0\}) \vee h(\{0\}) \\ &= h(X). \end{aligned}$$

از این رو بنابر گزاره‌ی ۳- ۵، $hf_a = h$.

گزاره۳-۹: فرض کنید τ یک توپوقاب روی قاب L باشد. در این صورت گزاره‌های زیر برقرار هستند.

(۱) $\mathcal{R}_{L_\tau}(\top)=\mathcal{R}(L_\tau)$ و $\mathcal{R}_{L_\tau}(\bot)=(0)$.

(۲) اگر $a,a',b,b'\in\tau$، آن‌گاه $f_af_b=f_{a\wedge b}$.

(۳) اگر $a,a'\in\tau$، آن‌گاه $f_a+f_{a'}=\mathbf{1}$.

(۴) اگر $a_1,\cdots,a_n$ اتم‌های دو به دو مجزا از قاب L به قسمی باشند که $a_1,a'_1,\cdots,a_n,a'_n\in\tau$، آن‌گاه $\sum_{i=1}^n f_{a_i}=f_b$ که در این‌جا $b=\bigvee_{i=1}^n a_i$.

برهان:

(۱). بدیهی است.

(۲). فرض کنیم $X\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$ و $a,a',b,b'\in\tau$. از این رو بنابر گزاره‌ی ۳-۵،

$$f_bf_a(X)=\begin{cases} a'\vee f_b(X) & ;0\in X\ \text{اگر}\\ a\wedge f_b(X) & ;0\notin X\ \text{اگر}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\top & ;0,1\in X\ \text{اگر}\\ (a\wedge b)' & ;1\notin X\ \text{و}\ 0\in X\ \text{اگر}\\ a\wedge b & ;1\in X\ \text{و}\ 0\notin X\ \text{اگر}\\ \bot & ;0,1\notin X\ \text{اگر}\end{cases}$$

$$=f_{a\wedge b}(X).$$

(۳). فرض کنیم $X\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$ و $a,a'\in\tau$. اگر $1\in X$، آن‌گاه

$$\begin{aligned}&(f_a+f_{a'})(X)\\ &=\bigvee\{f_a(x)\wedge f_{a'}(y): x+y\in X\}\\ &\geq\bigvee\{f_a(x)\wedge f_{a'}(1-x): x\in\mathbb{R}\}\\ &=(f_a(0)\wedge f_{a'}(1))\vee(f_a(1)\wedge f_{a'}(0))\\ &=(a'\wedge a')\vee(a\wedge a)\\ &=\top.\end{aligned}$$

حال فرض کنیم $1\notin X$، بنابراین

$$\begin{aligned}&(f_a+f_{a'})(X)\\ &=\bigvee\{f_a(x)\wedge f_{a'}(y): x+y\in X\}.\end{aligned}$$

از این‌که $x+y\in X$، نتیجه می‌گیریم $x+y\neq 1$ و $x\neq 1-y$ بنابراین

$$f_a(x)\wedge f_{a'}(y)$$

$$=\begin{cases} a'\wedge a'' & ;y=0\ \text{و}\ x=0\ \text{اگر}\\ a'\wedge\bot & ;y\neq 0\ \text{و}\ x=0\ \text{اگر}\\ \bot\wedge a'' & ;y=0\ \text{و}\ x\neq 0\ \text{اگر}\\ \bot & ;y\neq 0\ \text{و}\ x\neq 0\ \text{اگر}\end{cases}$$

$$=\bot.$$

از این رو $f_a+f_{a'}=\mathbf{1}$.

(۴). فرض کنیم $b=\bigvee_{i=1}^n a_i$. بنابراین برای هر $x\in\mathbb{R}$،

$$\begin{aligned}&(f_{a_1}+f_{a_2})(\{x\})\\ &=\bigvee\{f_{a_1}(\{y\})\wedge f_{a_2}(\{z\})\ : y+z=x\}\\ &=\bigvee\{f_{a_1}(\{y\})\wedge f_{a_2}(\{x-y\}): y\in\mathbb{R}\}\\ &=(a'_1\wedge f_{a_2}(\{x\}))\vee(a_1\wedge f_{a_2}(\{x-1\}))\end{aligned}$$

$$=\begin{cases}(a_1\vee a_2)' & ;x=0\ \text{اگر}\\ & ;x=1\ \text{اگر}\\ (a'_1\wedge a_2)\vee(a_1\wedge a'_2) & \\ \bot & ;\text{سایرجاها}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(a_1\vee a_2)' & ;x=0\ \text{اگر}\\ a_2\vee a_1 & ;x=1\ \text{اگر}\\ \bot & ;\text{سایر جاها}\end{cases}$$

$$=f_{a_1\vee a_2}(\{x\}).$$

از این رو به استقراء ثابت می‌شود که $\sum_{i=1}^n f_{a_i}=f_b$.

لم۳-۱۰: فرض کنید τ توپوقاب روی قاب منظّم L باشد و $a\in L$ دارای متمم باشد.اگر $a,a'\in\tau$ و a اتمی از قاب L به قسمی باشد که $g\in\mathcal{R}_{L_\tau}(a)$، آن‌گاه نگاشت $h:\mathcal{P}(\mathbb{R})\to L$ را برای هر $X\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$ با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$h(X)=\begin{cases} a'\vee\bigvee_{0\neq x\in X} g\left(\{\frac{1}{x}\}\right) & ;0\in X\ \text{اگر}\\ a\wedge\bigvee_{x\in X} g\left(\{\frac{1}{x}\}\right) & ;0\notin X\ \text{اگر}\end{cases}$$

در این صورت گزاره‌های زیر برقرار هستند.

(۱) نگاشت h عنصر حلقه‌ی $\mathcal{R}(L_\tau)$ است.

(۲) $hg = f_a$.

برهان:

(۱). فرض کنیم $O \in \mathfrak{O}(X)$. واضح است که نگاشت

$$\theta : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$$

با ضابطه

$$\theta(x) = \frac{1}{x}$$

تابع پیوسته است. می‌دانیم که

$$\theta^{-1}(O) \in \mathfrak{O}(\mathbb{R}\backslash\{0\}) \subseteq \mathfrak{O}(\mathbb{R})$$

و هم‌چنین

$$\theta^{-1}(O) = \left\{\frac{1}{x} : x \in O \text{ و } x \neq 0\right\} \in \mathfrak{O}(\mathbb{R}).$$

پس نتیجه می‌گیریم

$$\bigvee_{0\neq x\in O} g\left(\{\tfrac{1}{x}\}\right) = g(\theta^{-1}(O)) \in \tau.$$

لذا $h(O) \in \tau$. حال

$$t : \mathbb{R} \to L$$

با ضابطه‌ی

$$t(x) = \begin{cases} a' & ;x = 0 \text{ اگر} \\ a \wedge g\left(\{\tfrac{1}{x}\}\right) & ;x \neq 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. واضح است که t دم-حقیقی روی قاب L است و برای هر $X \in P(\mathbb{R})$،

$$h(X) = \bigvee_{x\in X} t(x).$$

چون برد تابع h زیرمجموعه‌ی τ است، پس بنابر گزاره‌ی ۳-۳، $h \in \mathcal{R}(L_\tau)$.

(۲). برای هر $0 \neq x \in \mathbb{R}$،

$$\begin{aligned} &hg(\{x\}) \\ &= \bigvee\{h(\{y\}) \wedge g(\{z\}) \ : yz = x\} \\ &= \bigvee\left\{h(\{y\}) \wedge g\left(\left\{\tfrac{x}{y}\right\}\right) : 0 \neq y \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \bigvee\left\{a \wedge g\left(\left\{\tfrac{1}{y}\right\}\right) \wedge g\left(\left\{\tfrac{x}{y}\right\}\right) : 0 \neq y \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} & ;x = 1 \text{ اگر} \\ a \wedge \bigvee \left\{g\left(\left\{\tfrac{1}{y}\right\}\right) : 0 \neq y \in \mathbb{R}\right\} & \\ \perp & ;x \neq 1 \text{ اگر} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} a \wedge coz(g) & ;x = 1 \text{ اگر} \\ \perp & ;x \neq 1 \text{ اگر} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} coz(g) & ;x = 1 \text{ اگر} \\ \perp & ;x \neq 1 \text{ اگر} \end{cases}$$

از طرفی دیگر، چون $coz(g) \leq a$ پس $a' \leq z(g)$ و در نتیجه

$$\begin{aligned} hg(\{0\}) &= z(hg) \\ &= z(h) \vee z(g) \\ &= a' \vee z(g) \\ &= a' \\ &= f_a(\{0\}). \end{aligned}$$

بنابراین $hg \leq f_a$. اکنون چون قاب‌های L و $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ منظم هستند، پس $hg = f_a$.

از [۱۴، صفحه‌ی ۶۳] یادآوری می‌کنیم که ایده‌آل می‌نیمال حلقه‌ی کاهشی توسط عنصر خودتوان تولید می‌شود و هم‌چنین اگر R حلقه‌ی کاهشی باشد و $e^2 = e \in R$، آن‌گاه eR ایده‌آل می‌نیمال حلقه‌ی R است اگر و تنها اگر eR با همان اعمال حلقه‌ی R میدان با عضو خنثی ضربی e باشد.

گزاره۳-۱۱: فرض کنید τ توپوقاب روی قاب منظّم L دارای متمم باشد. اگر $a, a' \in \tau$ و $a \in L$ و عنصر a از قاب L اتم باشد، آن‌گاه $\mathcal{R}_{L_\tau}(a)$ ایده‌آل می‌نیمال حلقه‌ی $\mathcal{R}(L_\tau)$ است.

برهان: با توجه به لم ۳-۱۰، $\mathcal{R}_{L_\tau}(a)$ با همان اعمال حلقه‌ی R میدان با عضو خنثی ضربی f_a است. بنابراین با توجه به گزاره‌های ۳-۵ و ۳-۹، $\mathcal{R}_{L_\tau}(a)$ ایده‌آل می‌نیمال حلقه‌ی $\mathcal{R}(L_\tau)$ است.

فرض می‌کنیم $\mathfrak{M}$ مجموعه تمام ایده‌آل‌های ماکسیمال حلقه‌ی R باشد. به ازای هر $a \in R$، قرار می‌دهیم:

$$\mathfrak{M}(a) = \{M \in \mathfrak{M} : a \in M\}.$$

ایده‌آل I از حلقه‌ی R یک z–ایده‌آل (به مفهوم ماسون) نامیده می‌شود، اگر $\mathfrak{M}(a)=\mathfrak{M}(b)$ و $a\in I$ آن‌گاه $b\in I$. چون به ازای هر $a,b\in R$، $\mathfrak{M}(ab)=\mathfrak{M}(b)$ اگروتنها اگر $\mathfrak{M}(a)\subseteq\mathfrak{M}(b)$. از این رو به طور معادل می‌توان بیان کرد که I یک z–ایده‌آل است اگروتنها اگر $\mathfrak{M}(a)\subseteq\mathfrak{M}(b)$ و $a\in I$ نتیجه دهد $b\in I$. یکی از مهم‌ترین مطالب در این‌مورد، این است که ایده‌آل‌های می‌نیمال حلقه‌ی R، z–ایده‌آل هستند (به منابع [۱۳، ۱۵] مراجعه کنید).

لم۳–۱۲: اگر I ایده‌آل می‌نیمال حلقه‌ی $\mathcal{R}(L_\tau)$ باشد، عنصر متممدار a از قاب L به قسمی وجود دارد که a و a' متعلق به τ هستند و $I=\mathcal{R}_{L_\tau}(a)$.

برهان: به وضوح هر ایده‌آل می‌نیمال حلقه‌ی $\mathcal{R}(L_\tau)$ توسط یک عنصر خودتوان تولید می‌شود. بنابراین عنصر خودتوان $e\in I$ به قسمی وجود دارد که

$$I=e\mathcal{R}(L_\tau).$$

بنابر گزاره‌ی ۷–۳، اگر $a=coz(e)$ آن‌گاه $e=f_a$. از این رو بنابر گزاره ۸–۳، $I=\mathcal{R}_{L_\tau}(a)$.

تعریف۳–۱۳: توپوقاب L_τ را کاملاً منظّم گوییم، هرگاه برای هر $a\in\tau$، $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{R}(L_\tau)$ به قسمی وجود داشته باشد که

$$a=\bigvee_{f\in\mathcal{A}}coz(f).$$

گزاره ۳–۱۴: فرض کنید L_τ توپوقاب کاملاً منظّم است. اگر I ایده‌آل می‌نیمال از حلقه‌ی $\mathcal{R}(L_\tau)$ باشد، آن‌گاه اتم a از τ به قسمی وجود دارد که $I=\mathcal{R}_{L_\tau}(a)$ و $a'\in\tau$.

برهان: با توجه به لم ۳–۱۲، عنصر متممدار a از قاب L به قسمی وجود دارد که $I=\mathcal{R}_{L_\tau}(a)$ و $a,a'\in\tau$. اکنون فرض کنیم $s\in\tau$ به قسمی وجود دارد که $\bot<s\leq a$. چون L_τ توپوقاب کاملاً منظّم است، $g\in\mathcal{R}(L_\tau)$ به قسمی وجود دارد که

$$\bot<coz(g)\leq s\leq a$$

و این نشان می‌دهد که $0\neq g\in I$.

چون I ایده‌آل می‌نیمال حلقه‌ی $\mathcal{R}(L_\tau)$ است، نتیجه می‌گیریم $I=<g>$. بنابراین $h\in\mathcal{R}(L_\tau)$ به قسمی وجود دارد که $f_a=hg$.

از این رو

$$I=coz(f_a)\leq coz(g).$$

لذا

$$coz(g)=s=a.$$

پس عنصر a اتم است و $I=\mathcal{R}_{L_\tau}(a)$.

۴- خاصیت (A) روی حلقه‌ی $\mathcal{R}(L_\tau)$

در این بخش خاصیت (A) را برای حلقه‌ی $\mathcal{R}(L_\tau)$ و حلقه‌ی خارج‌قسمتی $\frac{\mathcal{R}(L_\tau)}{Soc(\mathcal{R}(L_\tau))}$ مورد بررسی قرار می‌دهیم.

گزاره ۴–۱: f–حلقه‌ی $\mathcal{R}(L_\tau)$ دارای خاصیت (A) است.

برهان: فرض کنیم $I=\sum_{i=1}^n f_i\mathcal{R}(L_\tau)$ و عناصر آن مقسوم‌علیه صفر باشند. چون $f=\sum_{i=1}^n {f_i}^2\in I$ نتیجه می‌گیریم که $0<g\in\mathcal{R}(L_\tau)$ به قسمی وجود دارد که $fg=0$.

بنابراین $coz(fg)=\bot$. اکنون فرض می‌کنیم

$$h=\sum_{i=1}^n f_ih_i\in I.$$

لذا

$$\begin{aligned}coz(hg)&=coz(\textstyle\sum_{i=1}^n f_ih_ig)\\&\leq\textstyle\bigvee_{i=1}^n coz(|f_i|\,|h_ig|)\\&\leq\textstyle\bigvee_{i=1}^n coz({f_i}^2g)\\&=coz(\textstyle\sum_{i=1}^n {f_i}^2g)\\&\leq\textstyle\bigvee_{i=1}^n coz({f_i}^2g)\\&=coz(fg)\\&=\bot.\end{aligned}$$

بنابراین $hg=0$، از این رو $g\in Ann(I)$ است. لذا $\mathcal{R}(L_\tau)$ دارای خاصیت (A) است.

لم۴–۲: اگر $a_1,\cdots,a_n$ اتم‌های دو به دو مجزا از τ به قسمی باشند که $a'_1,\cdots,a'_n\in\tau$.

آن‌گاه برای هر $f\in\mathcal{R}(L_\tau)$ و هر $X\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$،

$\sum_{i=1}^{n} ff_{a_i}(X) =$
$$\begin{cases} (\bigwedge_{i=1}^{n} a'_i) \vee f(X) & ;0 \in X \text{ اگر} \\ (\bigvee_{i=1}^{n} a_i) \wedge f(X) & ;0 \notin X \text{ اگر} \end{cases}$$

برهان: بنابر گزاره‌های ۳–۵ و ۳–۹ واضح است.

گزاره۴–۳: اگر L_τ توپوقاب کاملاً منظّم باشد، آن‌گاه $f \in Soc(\mathcal{R}(L_\tau))$

اگر و تنها اگر اتم‌های $a_1, \cdots, a_n \in L$ به قسمی وجود داشته باشند که
$$coz(f) = \bigvee_{i=1}^{n} a_i$$

و برای هر $1 \le i \le n$، $a_i, a'_i \in \tau$.

برهان: اگر $Soc(\mathcal{R}(L_\tau)) = 0$، آن‌گاه چیزی برای اثبات وجود ندارد. اکنون فرض کنیم ساکل مخالف صفر باشد. اگر $f \in Soc(\mathcal{R}(L_\tau))$ آن‌گاه با توجّه به گزاره‌ی ۳–۱۴، اتم‌های $a_1, \cdots, a_k \in \tau$ به قسمی وجود دارند که $a'_1, \cdots, a'_k \in \tau$ و برای هر $1 \le i \le k$، $f_i \in \mathcal{R}(L_\tau)$ به قسمی وجود دارد که
$$f = f_1 f_{a_1} + f_2 f_{a_2} + \cdots + f_k f_{a_k}$$

و از خواص عناصر همصفر نتیجه می‌گیریم که
$$coz(f) \le \bigvee_{i=1}^{k} a_i.$$

بنابراین
$$coz(f) = \bigvee_{i=1}^{k} a_i \wedge coz(f).$$

چون a_iها اتم می‌باشند، پس $a_i \wedge coz(f) = \perp$ یا $a_i \wedge coz(f) = a_i$ و این نشان می‌دهد $coz(f)$ اتصال تعداد متناهی از اتم‌های τ به قسمی است که متمم آن‌ها نیز متعلق به τ می‌باشند.
برعکس. فرض کنیم برای اتم‌های $a_1, \cdots, a_k \in \tau$ که $a'_1, \cdots, a'_k \in \tau$ داشته باشیم
$$coz(f) = \bigvee_{i=1}^{k} a_i.$$

با توجه به گزاره‌های ۳–۸ و ۳–۱۱، $\mathcal{R}_{L_\tau}(a_i)$ ایده‌آل می‌نیمال تولید شده توسط f_{a_i} می‌باشد. اگر $0 \notin X \subseteq \mathbb{R}$، آن‌گاه چون $f(X) \le coz(f)$، با توجه به لم ۴–۲،
$$\sum_{i=1}^{n} ff_{a_i}(X) = (\bigvee_{i=1}^{n} a_i) \wedge f(X)$$
$$= f(X).$$

اگر $0 \in X \subseteq \mathbb{R}$، آن‌گاه
$$\sum_{i=1}^{n} ff_{a_i}(X) = \left(\sum_{i=1}^{n} ff_{a_i}(\mathbb{R}\backslash X)\right)'$$
$$= \left(f(\mathbb{R}\backslash X)\right)' = f(X).$$

بنابراین
$$f = \sum_{i=1}^{n} ff_{a_i} \in \sum_{i=1}^{n} \mathcal{R}_{L_\tau}(a_i) \subseteq Soc(\mathcal{R}(L_\tau)).$$

گزاره ۴–۴: فرض کنید L_τ توپوقاب کاملاً منظّم است. اگر τ دارای تعداد متناهی اتم باشد، آن‌گاه $\frac{\mathcal{R}(L_\tau)}{Soc(\mathcal{R}(L_\tau))}$ دارای خاصیت (A) است.
برهان: فرض کنیم $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$.
مجموعه تمام اتم‌های τ به قسمی باشد که
$$\{a'_1, \cdots, a'_n\} \subseteq \tau.$$

در این صورت، با توجّه به گزاره‌های ۳–۸ و ۳–۱۴،
$$Soc(\mathcal{R}(L_\tau)) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{R}_{L_\tau}(a_i) = \sum_{i=1}^{n} f_{a_i}\mathcal{R}(L_\tau).$$
به ازای هر $f \in \mathcal{R}(L_\tau)$، قرار می‌دهیم:
$$\bar{f} = f + Soc(\mathcal{R}(L_\tau)).$$

ایده‌آل
$$I = \sum_{i=1}^{n} \bar{f}_i \frac{\mathcal{R}(L_\tau)}{Soc(\mathcal{R}(L_\tau))}$$

را از حلقه‌ی $\frac{\mathcal{R}(L_\tau)}{Soc(\mathcal{R}(L_\tau))}$ به قسمی در نظر بگیرید که عناصر آن مقسوم‌علیه صفر باشند. فرض می‌کنیم
$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i^2.$$

چون $\bar{f} = \sum_{i=1}^{n} \bar{f}_i^{\,2} \in I$ نتیجه می‌گیریم $0 < g \in \mathcal{R}(L_\tau)$ به قسمی وجود دارد که $\bar{f}\bar{g} = 0$ و $\bar{g} \neq 0$. پس بنابر گزاره‌ی ۳–۴، $a_{i_1}, \cdots, a_{i_r} \in A$ به قسمی وجود دارند که $coz(fg) = \bigvee_{j=1}^{r} a_{i_j}$.

در نظر می‌گیریم $b = \bigwedge_{i=1}^{n} a'_i$. مدّعی می‌شویم که
$0 \neq \bar{f}_b\bar{g} \in Ann(I)$.

اگر $coz(f_b g) \leq \bigvee_{i=1}^{n} a_i$ آن‌گاه

$$\begin{aligned} coz(f_b g) &= coz(f_b g) \wedge \bigvee_{i=1}^{n} a_i \\ &= b \wedge coz(g) \wedge \bigvee_{i=1}^{n} a_i = \perp. \end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد

$$coz(g) \leq z(f_b) = \bigvee_{i=1}^{n} a_i.$$

بنابراین

$$g \in Soc(\mathcal{R}(L_\tau))$$

که تناقض است. لذا $0 \neq \bar{f}_b\bar{g}$. اگر $h = \sum_{i=1}^{n} f_i h_i$ آن‌گاه

$$\begin{aligned} coz(hf_b g) &= coz(\textstyle\sum_{i=1}^{n} f_i h_i f_b g) \\ &\leq \bigvee_{i=1}^{n} coz(|f_i||h_i|\, f_b g) \\ &\leq \bigvee_{i=1}^{n} coz(f_i^{\,2} f_b g) \\ &= coz(\textstyle\sum_{i=1}^{n} f_i^{\,2} f_b g) \\ &= coz(fgf_b) \\ &\leq \bigvee_{i=1}^{r} a_{i_j} \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} a'_i \\ &= \perp. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\bar{h}\bar{f}_b\bar{g} = 0$$

که نتیجه می‌دهد

$$\bar{f}_b\bar{g} \in Ann(I).$$

لذا $\frac{\mathcal{R}(L_\tau)}{Soc(\mathcal{R}(L_\tau))}$ دارای خاصیت (A) است.

عضو f از $\mathcal{R}(L_\tau)$ را کران‌دار می‌گوییم، هرگاه $n \in \mathbb{N}$ به قسمی وجود داشته باشد که $|f| \leq \boldsymbol{n}$. مجموعه‌ی تمام عناصر کران‌دار حلقه‌ی $\mathcal{R}(L_\tau)$ را با $\mathcal{R}^*(L_\tau)$ نشان می‌دهیم.

در ادامه بحث، برای هر $r, s \in \mathbb{R}$ قرار می‌دهیم:
$]]r,s[[:= \{x \in \mathbb{R} : r < x < s\}$.

گزاره۴ -۵: برای هر $f \in \mathcal{R}(L_\tau)$، گزاره‌های زیر معادل هستند.

(۱) $f \in \mathcal{R}^*(L_\tau)$.

(۲) عناصر $p, q \in \mathbb{Q}$ به قسمی وجود دارند که $p < q$ و $f(]]p,q[[) = \top$.

(۳) عناصر $p, q \in \mathbb{Q}$ به قسمی وجود دارند که $p < q$ و $f((-\infty, q]] \cup [[q, +\infty)) = \top$.

برهان: واضح است.

گزاره۴-۶: اگر L_τ توپوقاب کاملاً منظّم باشد، آن‌گاه هر ایده‌آل می‌نیمال $\mathcal{R}(L_\tau)$ مشمول در $\mathcal{R}^*(L_\tau)$ است.

برهان: اگر I یک ایده‌آل می‌نیمال $\mathcal{R}(L_\tau)$ باشد و $f \in I$، آن‌گاه با توجّه به گزاره‌ی ۳-۱۴، اتم a از قاب L به قسمی وجود دارد که $I = \mathcal{R}_{L_\tau}(a)$.

فرض کنید $f \in \mathcal{R}_{L_\tau}(a)$. بنابر گزاره‌ی ۳-۸، $f = ff_a$. حال با توجه به گزاره‌ی ۳-۵، برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$f(]]-n,n[[) = a' \vee f(]]-n,n[[)$$

ماکسیمال بودن a'، نتیجه می‌دهد

$$a' = f(]]-n,n[[)$$

یا

$$f(]]-n,n[[) = \top.$$

اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$a' = f(]]-n,n[[)$$

آن‌گاه

$$\top = f(\mathbb{R}) = f(]]-n,n[[) = a'$$

که یک تناقض است. بنابراین $n \in \mathbb{N}$ به قسمی وجود دارد که

$$f(]]-n,n[[) = \top.$$

لذا با توجّه به گزاره‌ی ۴-۵، $f \in \mathcal{R}^*(L_\tau)$.

f-حلقه‌ی A را معکوس کران‌دار نامیم، هرگاه برای هر $a \in A$، اگر $a \geq 1$ آن‌گاه عنصر a معکوس‌پذیر باشد. به گزاره‌ی زیر که اثبات آن را می‌توانید در [۲، گزاره‌ی ۲-۳] ببینید، نیاز داریم.

گزاره۴-۷: فرض کنید A، f-حلقه‌ی کاهشی و معکوس کران‌دار باشد و A^* زیرحلقه‌ی کل عناصر کران‌دار A باشد. در این صورت $Soc(A) = Soc(A^*)$ اگر و تنها اگر عناصر هر ایده‌آل می‌نیمال آن کران‌دار باشند.

نتیجه۴-۸: اگر L_τ توپوقاب کاملاً منظّم باشد، آن‌گاه $Soc(\mathcal{R}(L_\tau)) = Soc(\mathcal{R}^*(L_\tau))$.

برهان: چون $\mathcal{R}(L_\tau)$، f-حلقه‌ی کاهشی و معکوس کران‌دار است، با توجّه به گزارهای ۴-۶ و ۴-۷، $Soc(\mathcal{R}(L_\tau)) = Soc(\mathcal{R}^*(L_\tau))$.

گزاره۴-۹: فرض کنید L_τ توپوقاب کاملاً منظّم است. اگر τ دارای تعداد متناهی اتم باشد، آن‌گاه $\frac{\mathcal{R}(L_\tau)}{Soc(\mathcal{R}(L_\tau))}$ دارای خاصیت (A) است.

برهان: بنابر گزاره‌ی ۴-۴، واضح است.

فهرست منابع

[1] F. Azarpanah, O.A.S. Karamzadeh and A. Rezai Aliabad, On ideals consisting entirely of zero divisors, Comput. Algebra, 28: 1061-1073 (2000).

[2] T. Dube, A note on the socle of certain type of f-rings, Bull. Iranian Math. Soc., 38 (2): 517-528 (2012).

[3] T. Dube, Contracting the socle in rings of continuous function, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 123: 37-53 (2010).

[4] M.M. Ebrahimi and M. Mohmoudi, Frame, Technical Report, Shahid Beheshti University (1996).

[5] A.As. Estaji, E. Hashemi and A.A. Estaji, Socle and property (A) on real-valude function ring $\mathcal{F}_{\mathrm{p}}$L, Categ. Gen. Algebr. Struct. Appl., 8(1): 61-80 (2018).

[6] A.A. Estaji, A. Karimi Feizabadi and M. Zarghani, The ring of real-continuous function on a topoframe, Categ. Gen. Algebr. Struct. Appl., 4(1): 75-94 (2016).

[7] E. Hashemi, A.As. Estaji and M. Ziembowski, Answer on qustions related to rings with property (A), Proc. Edin. Math. Soc., 60: 651-664 (2017).

[8] H. Henriksen and M. Jerison, The space of minimal prime ideals of a commutative ring, Trans. Amer. Math. Soc., 115: 110-130 (1965).

[9] J.A. Huckaba, commutative rings with Zero Divisors, Marcel Dekker Inc., New York (1987).

[10] J.A. Huckaba and J.M. Keller, Annihilation of ideals in commutative rings, Pacific J. Math., 83: 375-379 (1979).

[11] J. Kaplansky, commutative rings, rev. ed. Chicago: Univ. of Chicago Press (1974).

[12] A. Karimi Feizabadi, A.A. Estaji and M. Zarghani, The ring of real-valued functtions on a frame, Categ. Gen. Algebr. Struct., Appl., 5(1): 85-102 (2016).

[13] O.A.S. Karamzadeh and M. Rostami, On the intrinsic topology and some related ideals of C(X), Proc. Amer. Math. Soc., 93: 179-184 (1985).

[14] J. Lambeck, Lectures on Rings and Modules, Blaisdell Publishing Company, Waltham, Toronto, London (1966).

[15] G. Mason, z-ideals and prime ideals, J. Algebra, 26: 280-297 (1973).

[16] J. Picado and A. Pulter, Frame and locales: Topology whitout point, Frontiers in Mathematics, Springer Basel (2012).

[17] Y. Quentel, Sur la compacite du spectre minimal d΄un anneau, Bull. Soc. Math. France, 99: 265-272 (1971).

[18] M. Zarghani, The ring of real-continuous function on a topoframe, PhD thesis, Hakim Sabsevari University (Feb. 2017).