دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره چهلم، بهمن و اسفند ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

بررسی عددی یک طرح تفاضلی برای معادلات انتشار کسری زمانی- مکانی کپوتو- ریس چندجمله‌ای

مجتبی فردی[۱]، ابراهیم امینی[۲*]

(۱) گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهرکرد، صنوق پستی ۳۴۱۴۱-۸۸۱۸۶، شهرکرد، ایران
(۲) گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۴۶۹۷- ۱۹۳۹۵، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۰۹/۰۴   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۱۱/۰۴

چکیده

در این مقاله، یک طرح تفاضلی یکنواخت برای حل معادلات انتشار کسری زمانی- مکانی چندجمله‌ای ارائه می‌شود. در معادلات انتشار کسری، مشتق زمانی از نوع کپوتو چندجمله‌ای و مشتق مکانی از نوع ریس هستند. معادلات مذکور در بعدهای یک و دو در نظر گرفته شده‌اند. در بعد یک مشتق مکانی ریس از مرتبه‌ی $\alpha\in(1,2]$ و در بعد دو مشتق‌های مکانی ریس از مرتبه‌های $\alpha\in(1,2]$ و $\beta\in(1,2)$ هستند. مشتق‌های کپوتو چندجمله‌ای از مرتبه‌های $0<\nu_1<\nu_2<\ldots<\nu_l<1$ هستند. هم‌چنین، آنالیز پایداری و همگرایی طرح تفاضلی ارائه می‌شود و شرایط پایداری طرح تفاضلی پیشنهادی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. و اثبات می‌کنیم که طرح تفاضلی پیشنهادی پایدار مشروط است. علاوه‌براین نشان می‌دهیم که طرح تفاضلی با مرتبه $2-\nu_l$ در زمان و با مرتبه‌ی دو در مکان همگراست. در پایان دو مثال عددی به ترتیب در بعدهای یک و دو داده می‌شود تا کارآیی و قابل اجرا بودن طرح تفاضلی پیشنهادی را از نظر دقت و سرعت همگرایی نشان دهیم.

واژه‌های کلیدی: معادلات انتشار کسری، مشتق کپوتو-ریس، طرح تفاضلی، پایدار مشروط، همگرایی.

* عهده‌دار مکاتبات: Email:eb.amini.s@pnu.ac.ir

۱- مقدمه

در دهه‌های اخیر، مشتقات و انتگرال‌های کسری برای تحلیل دینامیکی برخی دستگاه‌های پیچیده مورد استفاده قرار گرفته‌اند. دانشمندان حساب کسری را برای توسعه برخی مدل‌های پیشرفته ریاضی به‌کار می‌برند تا دستگاه‌های پیچیده را بتوانند با دقت زیاد پیش‌بینی کنند. اثر حافظه روی وراثت را می‌توان با استفاده از معادلات مشتقات کسری بررسی کرد و بنابراین می‌توان توانایی مدل‌سازی آن را افزایش داد. اخیراً برخی از مدل‌های ریاضی با مفهوم مشتقات کسری، در زیست‌شناسی، فیزیک، شیمی، و بیوشیمی، هیدرولوژی و امور مالی ظاهر شده‌اند [۳-۱]. مشتقات کسری به‌طور گسترده در علوم و مهندسی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. در بسیاری از موارد، جواب دقیق این معادلات مشخص است [۵-۴]. برای مطالعه‌ی معادلات دیفرانسیل کسری می‌توان به منابع [۹-۶] مراجعه کرد. معادلات دیفرانسیل جزئی کسری، به‌عنوان یکی از شاخه‌های اصلی حسابان کسری توجه بسیاری از محققان را به خود جلب کرده است. بنابراین، یافتن جواب‌های عددی و تحلیلی معادلات دیفرانسیل جزئی کسری به یک موضوع مهم تحقیقاتی با پتانسیل بالا تبدیل شده است.

روش‌های عددی متعددی برای حل معادلات مشتقات جزئی کسری زمانی ارائه شده است که برخی از آنها را می‌آوریم. نویسندگان در [۱۱-۱۰] فرمول ذوزنقه‌ای کسری را برای تقریب انتگرال کسری مرتبه‌ی دوم به‌کار برده‌اند. در سال ۱۹۹۳ تانگ در [۱۲] یک روش تفاضل متناهی برای به‌دست آوردن جواب عددی معادلات دیفرانسیل-انتگرال جزئی مبتنی بر هسته‌ی تکین بر اساس فرمول ذوزنقه‌ای ارائه داده است. چن و همکارانش در [۱۳] برای گسسته‌سازی مکانی، یک طرح تفاضلی مبتنی بر قاعده ذوزنقه‌ای کسری برای حل معادلات کسری مرتبه‌ی دوم پیشنهاد داده‌اند. نویسندگان در [۱۴]، یک طرح تفاضلی برای معادلات دیفرانسیل-انتگرال مرتبه‌ی کسری مرتبه‌ی دوم به‌دست آورده‌اند. اخیراً یک طرح تفاضل متناهی برای حل معادلات موج کسری زمانی در [۱۵] پیشنهاد شده است. یک روش عددی برای حل معادلات انتشار کسری زمانی-مکانی خطی و غیر خطی در [۱۶] ارائه شده است که در آن گسسته‌سازی زمانی با استفاده از قاعده‌ی ذوزنقه‌ای و گسسته‌سازی مکانی با استفاده از تقریب تفاضل مرکزی انجام می‌شود. چندین روش عددی برای تقریب مشتق کسری ریس با استفاده از تقریب مشتق ریمان- لیویل پیشنهاد شده است که می‌توان به روش‌هایی نظیر فرمول استاندارد گرونوالد-لتنیکوف (مرتبه‌ی اول)، فرمول انتقال‌یافته گرونوالد-لتنیکوف (مرتبه‌ی اول) [۱۷]، روش تقریب $L-۲$ (مرتبه‌ی اول) [۱۸]، روش درون‌یابی اسپلاین (مرتبه‌ی دوم) [۱۹]، فرمول های وزنی و انتقال‌یافته گرونوالد-لتنیکوف (مرتبه‌ی دوم و سوم) [۲۰]، فرمول تفاضل مرکزی میانگین کسری (مرتبه‌ی دوم و چهارم) [۲۱] اشاره کرد. الگوریتم‌های مرتبه‌ی بالا برای مشتقات ریمان-لیوویل برای اولین بار توسط لوبیچ در [۲۲] ارائه شد. همچنین، الگوریتم‌های مرتبه‌ی بالا برای مشتقات ریس توسط دینگ و لی ارائه شده است [۲۴-۲۳ ,۲۱].

اخیراً، برخی از محققان معادله‌ی انتشار-فرارفت کسری را مطالعه کرده‌اند. معادله‌ی انتشار-فرارفت کسری برای توصیف انتقال دینامیکی دستگاه‌های پیچیده که توسط انتشار غیر عادی و الگوهای غیر نمایی کنترل می‌شوند استفاده می‌شود [۲۶-۲۵]. پووستنکو و همکارانش در [۲۷]، جواب اساسی برای معادلات انتشار کسری زمانی-مکانی را به‌دست آورده‌اند. لیو و سایر نویسندگان در [۲۸]، جواب معادلات انتشار-فرارفت کسری را با استفاده از تغییر متغیر و تبدیل‌های ملین ولاپلاس و توابع H به‌دست آورده‌اند. پووستنکو و کیریلیچ در [۲۹] دو تعمیم متفاوت از معادلات انتشار-فرارفت کسری زمانی-مکانی ارائه داده‌اند. علاوه‌براین، آنها جواب‌های اساسی برای مسئله‌ی کوشی یک متغیره با استفاده از تبدیل لاپلاس و برای مسئله‌ی دو متغیره با استفاده از تبدیل لاپلاس برای متغیر زمانی و تبدیل فوریه برای متغیر مکانی را به‌دست آورده‌اند. هوانگ و لیو در [۳۰]، جواب معادله‌ی انتشار-فرارفت کسری زمانی-مکانی را با استفاده از جمله‌های توابع گرین به‌دست آورده‌اند. میرشارت و همکاران در [۱۷]، روش‌های عددی برای حل معادله‌ی انتشار-فرارفت کسری

مکانی یک بعدی با ضرایب متغیر در دامنه‌ی متناهی ارائه داده‌اند. تریپاتی و همکاران [۳۱]، جواب تحلیلی تقریبی برای معادلات انتشار غیر خطی مرتبه‌ی کسری با استفاده از روش آنالیز هموتوپی به‌دست آورده‌اند. مومانی و سایر نویسندگان در [۳۲]، یک الگوریتم مناسب با استفاده از روش تجزیه آدومیان برای به‌دست آوردن جواب معادله‌ی انتشار-فرارفت کسری زمانی-مکانی ارائه داده‌اند. لیو و همکاران در [۳۳]، با استفاده از روش گام‌های تصادفی و روش تفاضل متناهی، روش‌های تقریبی برای فرآیندهای لوی-فلر پیشنهاد داده است. برای به‌دست آوردن جواب تقریبی معادلات همرفت-انتشار کسری محققان روش‌های تفاضل متناهی [۳۴]، روش‌های عناصر محدود [۳۵]، روش‌های حجم متناهی [۳۶] و روش‌های طیفی [۳۸-۳۷] را به‌کار برده‌اند.

در این مقاله معادلات انتشار کسری زمانی-مکانی کپوتو-ریس چندجمله‌ای را مطالعه می‌کنیم.

معادلات انتشار کسری زمانی-مکانی کپوتو-ریس چند جمله‌ای یک بعدی:

معادلات انتشار کسری زمانی-مکانی کپوتو-ریس چندجمله‌ای در حالت یک بعدی به‌صورت زیر است:

$$\mathcal{P}(\partial_t)u(x,t)-\mathcal{K}_\alpha \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial |x|^\alpha}=f(x,t), \qquad 0<x<L, 0<t\le T, \qquad (1)$$

که دارای شرایط اولیه و مرزی زیر است:

$$u(x,0)=u_0(x), 0\le x\le L, \qquad (2)$$

$$u(0,t)=u(L,t)=0, 0<t\le T, \qquad (3)$$

که در آن t متغیر زمان، x متغیر مکان، $\mathcal{K}_\alpha$ یک ثابت مثبت، و u سرعتی است که باید تعیین شود.

مشتق کسری مکانی $(1<\alpha\le 2)$ ، $\frac{\partial^\alpha}{\partial |x|^\alpha}$ مشتق کسری ریس از مرتبه‌ی α است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial |x|^\alpha}=-\Psi_\alpha({}_{RL}D^\alpha_{0,x}+{}_{RL}D^\alpha_{x,L})u(x,t),\ \Psi_\alpha=0.5\sec(0.5\pi\alpha)$$

که در آن عملگرهای چپ و راست ریمان-لیویل به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$${}_{RL}D^\alpha_{0,x}u(x,t)=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\partial^2_{x^2}\int_0^x (x-\xi)^{1-\alpha}u(\xi,t)d\xi,$$

$${}_{RL}D^\alpha_{x,L}u(x,t)=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\partial^2_{x^2}\int_x^L (\xi-x)^{1-\alpha}u(\xi,t)d\xi,$$

مشتق کسری زمانی ∂_t^ν، مشتق کسری کپوتو از مرتبه‌ی $0<\nu<1$ است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\partial_t^\nu u(x,t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{\partial u(x,s)}{\partial s}\frac{ds}{(t-s)^\alpha},$$

عملگر $\mathcal{P}(\partial_t)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{P}(\partial_t)=\partial_t^{\nu_1}+\sum_{j=2}^{l}a_j\,\partial_t^{\nu_j}, 0<\nu_1<\nu_2<\cdots<\nu_l<1, a_j\in\mathbb{R}^+,\ j=2,\cdots,l.$$

نویسندگان در [۳۹] تابع چند متغیره میتاگ- لفلر (n بعدی) به‌صورت زیر تعریف کرده‌اند:

$$E_{(a_1,a_2,\cdots,a_n),b}(z_1,z_2,\cdots,z_n)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{J_1+J_2+\cdots+J_n=k,J_1\geq 0,J_2\geq 0,\cdots,J_n\geq 0}\left[\frac{(k)(k-1)(k-2)\cdots(2)(1)}{\prod_{s=1}^{n}(J_s)(J_s-1)(J_s-2)\cdots(2)(1)}\frac{\prod_{i=1}^{n}z_i^{J_i}}{\Gamma(b+\sum_{i=1}^{n}a_iJ_i)}\right],$$

که در آن $b>0$ و برای $i=1,2,\cdots,n$، $a_i>0$ و $|z_i|<\infty$. جیانگ در [۳۹]، یک جواب تحلیلی برای معادلات (۳)-(۱) به‌صورت زیر به‌دست آورده است:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}[\int_0^t G_{\nu_l}^n(\tau)\tau^{\nu_l-1}f_n(t-\tau)d\tau+c_n(0)H_0(t)]\sin(\frac{n\pi x}{L}),\qquad (۴)$$

که در آن

$$f_n(t)=\frac{2}{L}\int_0^L f(x,t)\sin(\frac{n\pi x}{L})dx,\ n=1,2,\cdots,\qquad (۵)$$

$$c_n(0)=\frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})dx,\ n=1,2,\cdots,\qquad (۶)$$

$$G_\eta^n(t)=E_{(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_{l-1},\nu_l),\eta}(-a_1t^{\nu_1},\cdots,-a_{l-1}t^{\nu_{l-1}},-\kappa_nt^{\nu_l}),\quad \nu_i=\nu_l-\nu_i,i=1,2,\cdots,l-1,$$

و

$$H_0(t)=1-\kappa_nt^{\nu_l}G_{1+\nu_l}^n(t),\kappa_n=K_\alpha\lambda_n^\alpha,\lambda_n^2=\frac{n^2\pi^2}{L^2}.$$

معادلات انتشار کسری زمانی-مکانی کپوتو-ریس چندجمله‌ای دو بعدی:

معادلات انتشار کسری زمانی-مکانی کپوتو-ریس چندجمله‌ای در حالت دو بعدی به‌صورت زیر است:

$$\mathcal{P}(\partial_t)u(x,y,t)-\mathcal{K}_\alpha\frac{\partial^\alpha u(x,y,t)}{\partial|x|^\alpha}-\mathcal{K}_\beta\frac{\partial^\beta u(x,y,t)}{\partial|y|^\alpha}=f(x,y,t),0<x<L,0<y<L,0<t\leq T,\quad (۷)$$

که دارای شرایط اولیه و مرزی زیر است:

$$u(x,y,0)=u_0(x,y),0\leq x\leq L,0\leq y\leq L\qquad (۸)$$

$$u(x,0,t)=u(x,L,t)=0,0\leq x\leq L,0<t\leq T,\qquad (۹)$$

$$u(0,y,t)=u(L,y,t)=0,0\leq y\leq L\ 0<t\leq T,\qquad (۱۰)$$

که در آن t متغیر زمان، xمتغیر مکان، $\mathcal{K}_\alpha$و $\mathcal{K}_\beta$ ثابت‌های مثبت، و uسرعتی است که باید تعیین شود. مشتقات کسری مکانی $\frac{\partial^\alpha}{\partial|x|^\alpha},(1<\alpha\leq 2)$ و $\frac{\partial^\beta}{\partial|y|^\beta},(1<\beta\leq 2)$ به‌ترتیب مشتقات کسری ریس از مرتبه‌ی α و β هستند.

در این مقاله یک طرح تفاضلی برای معادلات انتشار کسری زمانی-مکانی کپوتو-ریس ارائه می‌شود. دست‌آوردهای مقاله‌ی اخیر را می‌توان به‌صورت زیر خلاصه کرد:

الف) یک طرح تفاضلی برای حل مسئله‌های (۳)-(۱) و (۱۰)-(۷) ارائه می‌شود.

ب) پایداری و همگرایی طرح تفاضل مورد بررسی قرار گرفته است که نشان می‌دهد طرح تفاضلی پایدار مشروط است. همچنین نشان داده شده است که طرح تفاضلی با مرتبه‌ی $2-\nu_l$ در زمان و مرتبه‌ی دو در مکان همگراست.

باقیمانده مقاله به شرح زیر سازمان‌دهی شده است:

در بخش ۲، نحوه گسسته‌سازی متغیرهای زمان و مکان بیان شده است و یک طرح تفاضلی برای مسئله‌های (۳)-(۱) و (۱۰)-(۷) پیشنهاد می‌شود. پایداری و همگرایی طرح تفاضلی در همین بخش بررسی می‌شود. در بخش ۳، نتایج عددی را می‌آوریم. سرانجام مقاله با نتیجه‌گیری در بخش ۴ پایان می‌یابد.

۲- طرح تفاضلی برای (۳)- (۱) و (۱۰)-(۷)

گسسته‌سازی زمانی و مکانی متغیرها:

برای گسسته‌سازی متغیرهای زمانی و مکانی، قرار می‌دهیم:

$$x_m = mh,\ h = \frac{L}{M},\ m = ۰,۱,\cdots,M,$$

و

$$t_n = T(n/N), n = ۰,۱,۲,\cdots,N.$$

لم ۲,۱ ([۴۰]): اگر $۰ < \nu < ۱$ و $\tau = t_n - t_{n-۱}, n = ۱,۲,\cdots,N$ آنگاه داریم:

$$\partial_t^{\nu} u(x_m,t_n) = D_N^{\nu} u(x_m,t_n) + O(\tau^{۲-\nu}),$$

که در آن

$$D_N^{\nu} u(x_m,t_n) = \mathbf{b}_۱ u(x_m,t_n) - \mathbf{b}_n u(x_m,t_۰) + \sum_{k=۱}^{n-۱} (\mathbf{b}_{k+۱} - \mathbf{b}_k) u(x_m,t_{n-k}),$$

و

$$\mathbf{b}_k = \frac{۱}{\Gamma(۲-\nu)\tau^{\nu}} [(k)^{۱-\nu} - (k-۱)^{۱-\nu}].$$

لم ۲,۲ ([۴۱]): اگر $۱ < \alpha < ۲$ آنگاه داریم:

$$\frac{\partial^{\alpha} u(x_m,t_n)}{\partial |x|^{\alpha}} = \Delta_h^{\alpha} u(x_m,t_n) + O(h^۲),$$

که در آن

$$\Delta_h^{\alpha} u(x_m,t_n) = \frac{-\Psi_{\alpha}}{\Gamma(۴-\alpha)h^{\alpha}} \sum_{k=۰}^{M} z_{m,k}^{(\alpha)} u(x_k,t_n),$$

$$z_{m,k}^{(\alpha)} = \begin{cases} \overline{z}_{m,k}^{(\alpha)}, & k < m-۱ \\ \overline{z}_{m,m-۱}^{(\alpha)} + \tilde{z}_{m,m-۱}^{(\alpha)}, & k = m-۱ \\ \overline{z}_{m,m}^{(\alpha)} + \tilde{z}_{m,m}^{(\alpha)}, & k = m \\ \overline{z}_{m,m+۱}^{(\alpha)} + \tilde{z}_{m,m+۱}^{(\alpha)}, & k = m+۱ \\ \tilde{z}_{m,k}^{(\alpha)}, & k > m+۱ \end{cases}$$

$$\bar{z}_{m,k}^{(\alpha)}=\begin{cases}\bar{c}_{m-1,k}-2\bar{c}_{m,k}+\bar{c}_{m+1,k}, & k\le m-1,\\ -2\bar{c}_{m,m}+\bar{c}_{m+1,m}, & k=m,\\ \bar{c}_{m+1,m+1}, & k=m+1,\\ 0, & k>m+1,\end{cases}\qquad (11)$$

$$\tilde{z}_{m,k}^{(\alpha)}=\begin{cases}0, & k<m-1,\\ \tilde{c}_{m-1,m-1}, & k=m-1,\\ -2\tilde{c}_{m,m}+\tilde{c}_{m-1,m}, & k=m,\\ \tilde{c}_{m-1,k}-2\tilde{c}_{m,k}+\tilde{c}_{m+1,k}, & m+1\le k\le M,\end{cases}$$

$$\bar{c}_{j,k}=\begin{cases}(j-1)^{3-\alpha}-j^{2-\alpha}(j-3+\alpha), & k=0,\\ (j-k+1)^{3-\alpha}-2(j-k)^{3-\alpha}+(j-k-1)^{3-\alpha}, & 1\le k\le j-1,\\ 1, & k=j,\end{cases}$$

و

$$\tilde{c}_{j,k}=\begin{cases}1, & k=j,\\ (k-j+1)^{3-\alpha}-2(k-j)^{3-\alpha}+(k-j-1)^{3-\alpha}, & j+1\le k\le M-1,\\ (3-\alpha-M+j)(M-j)^{2-\alpha}+(M-j-1)^{(3-\alpha)}, & k=M.\end{cases}$$

لم ۳,۲ ([۴۲]): ضرایب $\bar{z}_{m,k}^{(\alpha)}$ و $\tilde{z}_{m,k}^{(\alpha)}$ در شرایط زیر صدق می‌کنند:

الف) $\bar{z}_{m,k}^{(\alpha)}>0,(k<m-1)$.

ب) $\tilde{z}_{m,k}^{(\alpha)}>0,(k>m+1)$.

پ) $\bar{z}_{m,m+1}^{(\alpha)}=\tilde{z}_{m,m-1}^{(\alpha)}=1$.

ج) $\bar{z}_{m,m}^{(\alpha)}=\tilde{z}_{m,m}^{(\alpha)}=-4+2^{(3-\alpha)}$.

لم ۴,۲ ([۴۲]): ضرایب $z_{m,k}^{(\alpha)}$ که با (۲) تعریف شده‌اند در شرایط زیر صدق می‌کنند.:

الف) $z_{m,k}^{(\alpha)}>0,(k\neq m)$.

ب) $z_{m,k}^{(\alpha)}<0,(m=k)$.

پ) $\sum_{k=0}^{M}z_{m,k}^{(\alpha)}<0$.

تقریب تفاضل برای (۳)-(۱):

اگر در (۱) قرار دهیم $(x,t)=(x_m,t_n)$، آنگاه به‌دست می‌آوریم:

$$\mathcal{P}(\partial_t)u(x_m,t_n)=\mathcal{K}_\alpha\frac{\partial^\alpha u(x_m,t_n)}{\partial|x|^\alpha}+f(x_m,t_n)=\mathcal{K}_\alpha\frac{\partial^\alpha u(x_m,t_{n-1})}{\partial|x|^\alpha}+f(x_m,t_n)+O(\tau),\qquad (12)$$

مشتق زمانی تعریف شده در (۱۲) با استفاده از لم ۲,۱ و مشتق مکانی تعریف شده در (۱۲) با استفاده از لم ۲,۲ گسسته سازی می‌شوند. با جایگزین کردن $u(x_m,t_n)$ با جواب تقریبی u_m^n، یک طرح تفاضلی برای مسئله‌ی (۳)-(۱) به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

طرح تفاضلی یکنواخت: جواب تقریبی

$$u_m^n(m=1,2,\cdots,M-1,n=1,2,\cdots,N)$$

را پیدا می‌کنیم به‌طوری‌که

$$\begin{cases} \Pi_N^{\nu_1,\cdots,\nu_l} u_m^n - \mathcal{K}_\alpha \Delta_h^\alpha u_m^{n-1} = f(x_m,t_n), & 1 \le m \le M-1, 1 \le n \le N \\ u_m^0 = u_0(x_m), & 0 \le m \le M, \\ u_0^n = u_M^n = 0, & 1 \le n \le N, \end{cases} \qquad (13)$$

که در آن

$$\Delta_h^\alpha u_m^{n-1} = \frac{-\Psi_\alpha}{\Gamma(4-\alpha)h^\alpha} \sum_{k=0}^{M} z_{m,k}^{(\alpha)} u_k^{n-1},$$

$$\Pi_N^{\nu_1,\cdots,\nu_l} u_m^n = \mathbf{b}_1^1 u_m^n - \mathbf{b}_n^1 u_m^0 + \sum_{k=1}^{n-1} u_m^{n-k} [\mathbf{b}_{k+1}^1 - \mathbf{b}_k^1] + \sum_{j=2}^{l} a_j [\mathbf{b}_1^j u_m^n - \mathbf{b}_n^j u_m^0$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} u_m^{n-k} [\mathbf{b}_{k+1}^j - \mathbf{b}_k^j]], \qquad (14)$$

$$\mathbf{b}_k^j = \frac{1}{\Gamma(2-\nu_j)\tau^{\nu_j}} [(k)^{1-\nu_j} - (k-1)^{1-\nu_j}], \quad j = 1,2,\cdots,l.$$

با استفاده ار رابطه‌ی (۱۴)، رابطه‌ی (۱۳) را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{cases} [\mathbf{b}_1^1 + \sum_{j=2}^{l} a_j \mathbf{b}_1^j] u_m^n \quad \mathcal{K}_\alpha \dfrac{\Psi_\alpha}{\Gamma(4-\alpha)h^\alpha} \sum_{k=0}^{M} z_{m,k}^{(\alpha)} u_k^{n-1} + \mathbf{b}_n^1 u_m^0 & \\ \qquad + \sum_{k=1}^{n-1} u_m^{n-k} [\mathbf{b}_k^1 - \mathbf{b}_{k+1}^1] + \sum_{j=2}^{l} a_j [\mathbf{b}_n^j u_m^0 & 1 \le m \le M-1, 1 \le n \le N, \\ \qquad + \sum_{k=1}^{n-1} u_m^{n-k} [\mathbf{b}_k^j - \mathbf{b}_{k+1}^j]] + f(x_m,t_n), & \\ u_m^0 = u_0(x_m), & 0 \le m \le M \\ u_0^n = u_M^n = 0, & 1 \le n \le N. \end{cases} \qquad (15)$$

آنالیز پایداری:

در این بخش پایداری طرح تفاضلی (۱۵) را بررسی می‌کنیم.

لم ۵٫۲: ضرایب $\mathbf{b}_k^j$ در رابطه‌های زیر صدق می‌کنند:

الف) $\mathbf{b}_{k+1}^j \le \mathbf{b}_k^j,\ j = 1,2,\cdots,l$.

ب) $\mathbf{b}_1^j = \frac{\tau^{-\nu_j}}{\Gamma(2-\nu_j)}, \ j=1,2,\cdots,l$.

پ)

$$\frac{(1-\nu_j)}{\Gamma(2-\nu_j)\tau^{\nu_j}}(k)^{-\nu_j} \le \mathbf{b}_k^j \le \frac{(1-\nu_j)}{\Gamma(2-\nu_j)\tau^{\nu_j}}((k-1))^{-\nu_j}, \quad j=1,2,\cdots,l, n=2,3,\cdots,N.$$

ج)

$$\mathbf{b}_1^1 + \sum_{j=2}^{l} a_j \mathbf{b}_1^j = B(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_l) = \frac{1}{\Gamma(2-\nu_1)}\tau^{-\nu_1} + \sum_{j=2}^{l}\frac{a_j}{\Gamma(2-\nu_j)}\tau^{-\nu_j}.$$

لم ۶,۲: اگر

$$[\mathbf{b}_1^1 - \mathbf{b}_2^1] + \sum_{j=2}^{l} a_j[\mathbf{b}_1^j - \mathbf{b}_2^j] \ge \mathcal{K}_\alpha \frac{\Psi_\alpha}{\Gamma(4-\alpha)h^\alpha}(2(-4+2^{3-\alpha})), \qquad (16)$$

آنگاه جواب مسئله‌ی گسسته‌سازی (۱۵) در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$\| u^n \|_\infty \le \frac{1}{B(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_l)}[\mathbf{b}_n^1 \| u^0 \|_\infty + \sum_{k=1}^{n-1}[\mathbf{b}_k^1 - \mathbf{b}_{k+1}^1] \| u^{n-k} \|_\infty$$
$$+ \sum_{j=2}^{l} a_j[\mathbf{b}_n^j \| u^0 \|_\infty + \sum_{k=1}^{n-1}[\mathbf{b}_k^j - \mathbf{b}_{k+1}^j] \| u^{n-k} \|_\infty] + \| f^n \|_\infty], n=1,2,\cdots,N,$$

که در آن $u^n = [u_0^n, u_1^n, \cdots, u_M^n]^T$ و $f^n = [f_0^n, f_1^n, \cdots, f_M^n]^T$.

اثبات: فرض کنید $n \in \{1,2,\cdots,N\}$ ثابت است. همچنین قرار می‌دهیم $u^n = [u_0^n, u_1^n, \cdots, u_M^n]^T$. اکنون $m \in \{0,1,2,\cdots,M\}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $| u_m^n | = \| u^n \|_\infty$. اگر در (۱۵) $(x,t) = (x_m, t_n)$ باشد، آنگاه به‌دست می‌آوریم:

$$[\mathbf{b}_1^1 + \sum_{j=1}^{2} a_j \mathbf{b}_1^j] u_m^n = [[\mathbf{b}_1^1 - \mathbf{b}_2^1] + \sum_{j=2}^{l} a_j[\mathbf{b}_1^j - \mathbf{b}_2^j] - \mathcal{K}_\alpha \frac{\Psi_\alpha}{\Gamma(4-\alpha)h^\alpha} z_{m,m}^{(\alpha)}] u_m^{n-1}$$
$$- \mathcal{K}_\alpha \frac{\Psi_\alpha}{\Gamma(4-\alpha)h^\alpha} \sum_{k=0,k\ne m}^{M} z_{m,k}^{(\alpha)} u_k^{n-1} + \mathbf{b}_n^1 u_m^0 + \sum_{k=2}^{n-1} u_m^{n-k}[\mathbf{b}_k^1 - \mathbf{b}_{k+1}^1] + \sum_{j=2}^{l} a_j[\mathbf{b}_n^j u_m^0$$
$$+ \sum_{k=2}^{n-1} u_m^{n-k}[\mathbf{b}_k^j - \mathbf{b}_{k+1}^j]] + f_m^n, 1 \le m \le M-1, 1 \le n \le N,$$

که در آن $f_m^n = f(x_m, t_n)$. با قرار دادن

$$[[\mathbf{b}_1^1 - \mathbf{b}_2^1] + \sum_{j=2} a_j[\mathbf{b}_1^j - \mathbf{b}_2^j] - \mathcal{K}_\alpha \frac{\Psi_\alpha}{\Gamma(4-\alpha)h^\alpha}(2(-4+2^{3-\alpha}))] \ge 0$$

و به‌کار بردن لم ۳,۲، خواهیم داشت:

$$| [[\mathbf{b}_1^1 - \mathbf{b}_2^1] + \sum_{j=2}^{l} a_j[\mathbf{b}_1^j - \mathbf{b}_2^j] - \mathcal{K}_\alpha \frac{\Psi_\alpha}{\Gamma(4-\alpha)h^\alpha}(2(-4+3^{3-\alpha}))] u_m^{n-1}$$
$$- \mathcal{K}_\alpha \frac{\Psi_\alpha}{\Gamma(4-\alpha)h^\alpha} \sum_{k=0,k\ne m}^{M} z_{m,k}^{(\alpha)} u_k^{n-1} | \le [[\mathbf{b}_1^1 - \mathbf{b}_2^1] + \sum_{j=2}^{l} a_j[\mathbf{b}_1^j - \mathbf{b}_2^j] - \mathcal{K}_\alpha \frac{\Psi_\alpha}{\Gamma(4-\alpha)h^\alpha} z_{m,m}^{(\alpha)}] | u_m^{n-1} |$$

$$-\mathcal{K}_\alpha \frac{\Psi_\alpha}{\Gamma(4-\alpha)h^\alpha}\sum_{k=0,k\neq m}^{M} z_{m,k}^{(\alpha)}\,|u_k^{n-1}| \le [[\mathbf{b}_1^1-\mathbf{b}_2^1+\sum_{j=2}^{l}a_j[\mathbf{b}_1^j-\mathbf{b}_2^j]-\mathcal{K}_\alpha \frac{\Psi_\alpha}{\Gamma(4-\alpha)h^\alpha} z_{m,m}^{(\alpha)}]\,|u_m^{n-1}|$$

$$-\mathcal{K}_\alpha \frac{\Psi_\alpha}{\Gamma(4-\alpha)h^\alpha}\sum_{k=0}^{M} z_{m,k}^{(\alpha)}\,|u_m^{n-1}|,\ 1\le m\le M-1, 1\le n\le N.$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم:

$$|\mathbf{b}_1^1+\sum_{j=2}^{l}a_j\mathbf{b}_1^j|\,|u_m^n| \le [[\mathbf{b}_1^1-\mathbf{b}_2^1]+\sum_{j=2}^{l}a_j[\mathbf{b}_1^j-\mathbf{b}_2^j]-\mathcal{K}_\alpha \frac{\Psi_\alpha}{\Gamma(4-\alpha)h^\alpha} z_{m,m}^{(\alpha)}]\,|u_m^{n-1}|$$

$$-\mathcal{K}_\alpha \frac{\Psi_\alpha}{\Gamma(4-\alpha)h^\alpha}\sum_{k=0}^{M} z_{m,k}^{(\alpha)}\,|u_m^{n-1}| + \mathbf{b}_n^1|u_m^0| + \sum_{k=2}^{n-1}|u_m^{n-k}|\,[\mathbf{b}_k^1-\mathbf{b}_{k+1}^1] + \sum_{j=2}^{l}a_j[\mathbf{b}_n^j|u_m^0|$$

$$+\sum_{k=2}^{n-1}|u_m^{n-k}|\,[\mathbf{b}_k^j-\mathbf{b}_{k+1}^j]] + |f_m^n| \le [[\mathbf{b}_1^1-\mathbf{b}_2^1]+\sum_{j=2}^{l}a_j[\mathbf{b}_1^j-\mathbf{b}_2^j]+\mathbf{b}_n^1|u_m^0|$$

$$+\sum_{k=2}^{n-1}|u_m^{n-k}|\,[\mathbf{b}_k^1-\mathbf{b}_{k+1}^1] + \sum_{j=2}^{l}a_j[\mathbf{b}_n^j|u_m^0| + \sum_{k=2}^{n-1}|u_m^{n-k}|\,[\mathbf{b}_k^j-\mathbf{b}_{k+1}^j]] + |f_m^n| = \mathbf{b}_n^1|u_m^0|$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}|u_m^{n-k}|\,[\mathbf{b}_k^1-\mathbf{b}_{k+1}^1] + \sum_{j=2}^{l}a_j[\mathbf{b}_n^j|u_m^0| + \sum_{k=1}^{n-1}|u_m^{n-k}|\,[\mathbf{b}_k^j-\mathbf{b}_{k+1}^j]] + |f_m^n|,\ 1\le m\le M-1, 1\le n\le N.$$

آنگاه داریم:

$$\|u^n\|_\infty \le \frac{1}{B(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_l)}[\mathbf{b}_n^1\|u^0\|_\infty + \sum_{k=1}^{n-1}[\mathbf{b}_k^1-\mathbf{b}_{k+1}^1]\,\|u^{n-k}\|_\infty$$

$$+\sum_{j=2}^{l}a_j[\mathbf{b}_n^j\|u^0\|_\infty \sum_{k=1}^{n-1}[\mathbf{b}_k^j-\mathbf{b}_{k+1}^j]\,\|u^{n-k}\|_\infty] + \|f^n\|_\infty], 1\le n\le N,$$

که در آن $f^n=[f_0^n, f_1^n,\cdots,f_M^n]^T$.

لم ۷,۲: اگر

$$[\mathbf{b}_1^1-\mathbf{b}_2^1]+\sum_{j=2}^{l}a_j[\mathbf{b}_1^j-\mathbf{b}_2^j] \ge \mathcal{K}_\alpha \frac{\Psi_\alpha}{\Gamma(4-\alpha)h^\alpha}(2(-4+2^{3-\alpha})),$$

آنگاه جواب مسئله‌ی گسسته‌سازی (۱۵) در شرایط زیر صدق می‌کند.

$$\|u^n\|_\infty \le \|u^0\|_\infty + \frac{1}{B(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_l)}\sum_{s=1}^{n}\lambda_{s,n}\,\|f^s\|_\infty,\ n=1,2,\cdots,N. \qquad (17)$$

که در آن

$$\lambda_{n,n}=1,\ \lambda_{s,n}=\sum_{k=1}^{n-s}\frac{1}{B(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_l)}[[\mathbf{b}_k^1-\mathbf{b}_{k+1}^1]+\sum_{j=2}^{l}a_j[\mathbf{b}_k^j-\mathbf{b}_{k+1}^j]]\lambda_{s,n-k}.$$

برهان: درستی این عبارت را با استقرا روی n نشان می‌دهیم. ابتدا فرض کنید $n=1$، آنگاه داریم:

$$\|u^1\|_\infty \le \frac{1}{B(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_l)}[\mathbf{b}_{1,1}^1\|u^0\|_\infty + \sum_{j=2}^{l}a_j\mathbf{b}_{1,1}^j\|u^0\|_\infty + \|f^1\|_\infty] = \|u^0\|_\infty + \frac{1}{B(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_l)}\lambda_{1,1}\|f^1\|_\infty,$$

لذا برای $n=1$ رابطه‌ی (۱۷) درست است.

اکنون فرض کنید رابطه‌ی (۱۷) برای $k<n$ برقرار باشد آنگاه به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\|u^n\|_\infty \le{}& \frac{1}{B(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_l)}[\mathbf{b}_n^1\|u^0\|_\infty + \sum_{k=1}^{n-1}[\mathbf{b}_k^1-\mathbf{b}_{k+1}^1](\|u^0\|_\infty + \\ &\frac{1}{B(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_l)}\sum_{s=1}^{n-k}\lambda_{s,n-k}\|f^s\|_\infty) + \sum_{j=2}^{l}a_j[\mathbf{b}_n^j\|u^0\|_\infty + \sum_{k=1}^{n-1}[\mathbf{b}_k^j-\mathbf{b}_{k+1}^j](\|u^0\|_\infty \\ &+\frac{1}{B(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_l)}\sum_{s=1}^{n-k}\lambda_{s,n-k}\|f^s\|_\infty)] + \|f^n\|_\infty] \\ \le{}& \frac{1}{B(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_l)}[\mathbf{b}_1^1\|u^0\|_\infty + \sum_{k=1}^{n-1}[\mathbf{b}_k^1-\mathbf{b}_{k+1}^1]\frac{1}{B(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_l)}\sum_{s=1}^{n-k}\lambda_{s,n-k}\|f^s\|_\infty \\ &+\sum_{j=2}^{l}a_j[\mathbf{b}_1^j\|u^0\|_\infty + \sum_{k=1}^{n-1}[\mathbf{b}_k^j-\mathbf{b}_{k+1}^j]\frac{1}{B(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_l)}\sum_{s=1}^{n-k}\lambda_{s,n-k}\|f^s\|_\infty] + \|f^n\|_\infty].\end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}\|u^n\|_\infty \le{}& \|u^0\|_\infty + \frac{1}{B(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_l)}[\sum_{s=1}^{n-1}\|f^s\|_\infty[\sum_{k=1}^{n-s}\mathbf{b}_k^1-\mathbf{b}_{k+1}^1]\frac{1}{B(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_l)}\lambda_{s,n-k} \\ &+\sum_{j=2}^{l}a_j[\sum_{s=1}^{n-1}\|f^s\|_\infty\sum_{k=1}^{n-s}[\mathbf{b}_k^j-\mathbf{b}_{k+1}^j]\frac{1}{B(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_l)}\lambda_{s,n-k}] + \|f^n\|_\infty] \\ ={}& \|u^0\|_\infty + \frac{1}{B(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_l)}\sum_{s=1}^{n}\lambda_{s,n}\|f^s\|_\infty,\end{aligned}$$

بنابراین برای $k=n$ هم برقرار است و در نتیجه اثبات قضیه کامل می‌شود.

قضیه ۸,۲ (پایداری تقریب تفاضل)**:** اگر

$$[\mathbf{b}_1^1-\mathbf{b}_2^1]+\sum_{j=2}^{l}a_j[\mathbf{b}_1^j-\mathbf{b}_2^j] \ge \mathcal{K}_\alpha\frac{\Psi_\alpha}{\Gamma(4-\alpha)h^\alpha}(2(-4+2^{3-\alpha})),$$

آنگاه مسئله‌ی گسسته (۱۵) پایدار است.

برهان: با استفاده از رابطه‌ی (۱۵)، به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}&[\mathbf{b}_1^1+\sum_{j=2}^{l}a_j\mathbf{b}_1^j][u_m^n-\tilde{u}_m^n] + \mathcal{K}_\alpha\frac{\Psi_\alpha}{\Gamma(4-\alpha)h^\alpha}\sum_{k=0}^{M}z_{m,k}^{(\alpha)}[u_k^n-\tilde{u}_k^n] = \mathbf{b}_n^1[u_m^0-\tilde{u}_m^0] + \sum_{k=1}^{n-1}[u_m^{n-k}-\tilde{u}_m^{n-k}][\mathbf{b}_k^1-\mathbf{b}_{k+1}^1] \\ &+\sum_{j=2}^{l}a_j[\mathbf{b}_n^j[u_m^0-\tilde{u}_m^0] + \sum_{k=1}^{n-1}[u_m^{n-k}-\tilde{u}_m^{n-k}][\mathbf{b}_k^j-\mathbf{b}_{k+1}^j]],\ 1\le m\le M-1, 1\le n\le N.\end{aligned}$$

بنابراین، با استفاده از لم ۷,۲، خواهیم داشت:

$$\|u^n-\tilde{u}^n\|_\infty \le \|u^0-\tilde{u}^0\|_\infty,\ n=1,2,\cdots,N,$$

و اینجا اثبات قضیه کامل می‌شود.

تخمین خطا و آنالیز همگرایی:

ابتدا لم زیر را برای آنالیز خطا بیان می‌کنیم.

لم ۹،۲: فرض کنید $e_m^n = u(x_m,t_n) - u_m^n$ خطا در نقطه‌ی گرهی (x_m,t_n) باشد. اگر شرط (۱۶) برقرار باشد، آنگاه داریم:

$$\| e^n \|_\infty \le \frac{1}{B(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_l)} \sum_{s=1}^{n} \lambda_{s,n} (h^2 + \tau^{2-\nu_l}), \qquad n = 1,2,\cdots,N.$$

اثبات: با استفاده از رابطه‌ی (۱۵)، به‌دست می‌آوریم:

$$[\mathbf{b}_1^1 + \sum_{j=2}^{l} a_j \mathbf{b}_1^j] e_m^n + \mathcal{K}_\alpha \frac{\Psi_\alpha}{\Gamma(4-\alpha) h^\alpha} \sum_{k=0}^{M} z_{m,k}^{(\alpha)} e_k^n - \mathbf{b}_n^1 e_m^0 - \sum_{k=1}^{n-1} e_m^{n-k} [\mathbf{b}_k^1 - \mathbf{b}_{k+1}^1] - \sum_{j=2}^{l} a_j [\mathbf{b}_n^j e_m^0$$

$$- \sum_{k=1}^{n-1} e_m^{n-k} [\mathbf{b}_k^j - \mathbf{b}_{k+1}^j]] = R_m^n, 1 \le m \le M-1, 1 \le n \le N,$$

که در آن R_m^n خطای برشی در نقطه (x_m,t_n) است. اکنون با به‌کار بردن لم‌های ۲،۱ و ۲،۲، به‌دست می‌آوریم:

$$| R_m^n | \le C(h^2 + \tau^{2-\nu_l}). \tag{18}$$

با استفاده از لم ۷،۲ به‌دست می‌آوریم:

$$\| e^n \|_\infty \le \frac{1}{B(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_l)} \sum_{s=1}^{n} \lambda_{s,n} \| R^s \|_\infty, \qquad n = 1,2,\cdots,N, \tag{19}$$

که در آن $e^n = [e_0^n, e_1^n, \cdots, e_M^n]^T$ و

$$R^n = [R_0^n, R_1^n, \cdots, R_M^n]^T.$$

با به‌کار بردن (۱۸) و (۱۹)، خواهیم داشت:

$$\| e^n \|_\infty \le \frac{1}{B(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_l)} \sum_{s=1}^{n} \lambda_{s,n} (h^2 + \tau^{2-\nu_l}), \qquad n = 1,2,\cdots,N.$$

لم ۱۰،۲: برای $n = 1,2,\cdots,N$، نامساوی‌های زیر برقرار هستند:

$$\frac{1}{B(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_l)} \sum_{s=1}^{n} \lambda_{s,n} \le \frac{\Gamma(2-\nu_l)}{a_l(1-\nu_l)} T^{\nu_l}. \tag{20}$$

اثبات: درستی این عبارت را با استقرا روی n نشان می‌دهیم. ابتدا فرض کنید $n=1$، آنگاه داریم:

$$\frac{1}{B(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_l)} \sum_{s=1}^{1} \lambda_{s,1} = \frac{1}{\frac{1}{\Gamma(2-\nu_1)} \tau_1^{-\nu_1} + \sum_{j=2}^{l} \frac{a_j}{\Gamma(2-\nu_j)} \tau_1^{-\nu_j}} \le \frac{\Gamma(2-\nu_l)}{a_l} T^{\nu_l} \le \frac{\Gamma(2-\nu_l)}{a_l(1-\nu_l)} T^{\nu_l},$$

لذا برای $n=1$ رابطه‌ی (۲۰) درست است.

فرض کنید رابطه‌ی (۲۰) برای $k < n$ برقرار باشد، آنگاه داریم:

$$\frac{1}{B(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_l)} \sum_{s=1}^{n} \lambda_{s,n} = \frac{1}{B(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_l)} \lambda_{n,n} + \frac{1}{B(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_l)} \sum_{s=1}^{n-1} \lambda_{s,n} = \frac{1}{B(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_l)} \lambda_{n,n}$$

$$+ \frac{1}{B(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_l)} \sum_{s=1}^{n-1} [\sum_{k=1}^{n-s} \frac{1}{B(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_l)} [[\mathbf{b}_k^1 - \mathbf{b}_{k+1}^1] + \sum_{j=2}^{l} a_j [\mathbf{b}_k^j - \mathbf{b}_{k+1}^j]] \lambda_{s,n-k}] = \frac{1}{B(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_l)} \lambda_{n,n}$$

$$+\frac{1}{B(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_l)}\sum_{k=1}^{n-1}[[\mathbf{b}_k^1-\mathbf{b}_{k+1}^1]+\sum_{j=2}^{l}a_j[\mathbf{b}_k^j-\mathbf{b}_{k+1}^j]]\frac{1}{B(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_l)}\sum_{s=1}^{n-k}\lambda_{s,n-k}$$

$$\leq\frac{1}{B(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_l)}+\frac{1}{B(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_l)}\sum_{k=1}^{n-1}[[\mathbf{b}_k^1-\mathbf{b}_{k+1}^1]+\sum_{j=2}^{l}a_j[\mathbf{b}_k^j-\mathbf{b}_{k+1}^j]][\frac{\Gamma(2-\nu_l)}{a_l(1-\nu_l)}T^{\nu_l}]$$

$$=\frac{1}{B(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_l)}[1-[\mathbf{b}_n^1+\sum_{j=2}^{l}a_j\mathbf{b}_n^j][\frac{\Gamma(2-\nu_l)}{a_l(1-\nu_l)}T^{\nu_l}]]+\frac{\Gamma(2-\nu_l)}{a_l(1-\nu_l)}T^{\nu_l}$$

اگر رابطه‌ی زیر برقرار باشد آنگاه رابطه‌ی برای $k=n$ نیز برقرار است.

$$1-[\mathbf{b}_n^1+\sum_{j=2}^{l}a_j\mathbf{b}_n^j][\frac{\Gamma(2-\nu_l)}{a_l(1-\nu_l)}T^{\nu_l}]\leq 0.$$

برای اثبات نامساوی فوق داریم:

$$[\mathbf{b}_n^1+\sum_{j=2}^{l}a_j\mathbf{b}_n^j][\frac{\Gamma(2-\nu_l)}{a_l(1-\nu_l)}T^{\nu_l}]\geq\frac{[n^{(1-\nu_l)}-(n-1)^{1-\nu_l}]}{N^{-\nu_l}(1-\nu_l)}\geq N^{\nu_l}n^{-\nu_l}=(\frac{N}{n})^{\nu_l}\geq 1.$$

بنابراین برای $k=n$ هم برقرار است و در نتیجه اثبات قضیه کامل می‌شود.

با استفاده از لم‌های ۹،۲ و ۱۰،۲ قضیه‌ی زیر برقرار است.

قضیه ۱۱،۲: فرض کنید شرط (۱۶) برقرار باشد آنگاه داریم:

$$\|e^n\|_\infty\leq C_{T,\nu_l}(h^2+\tau^{2-\nu_l}),\ n=1,2,\cdots,N,$$

که در آن C ثابت حقیقی و تنها وابسته به T و ν_l است.

با استفاده از قضیه ۱۱،۲ می‌توانیم قضیه‌ی زیر را به‌دست آوریم:

قضیه۱۲،۲ (همگرایی تقریب تفاضلی): فرض کنید شرط (۱۶) برقرار باشد آنگاه جواب عددی طرح تفاضلی (۱۵) وقتی که $h\to 0$ و $\tau\to 0$ به جواب دقیق همگرا است.

۲-۲ تقریب تفاضلی برای (۱۴)-(۱۱)

برای گسسته‌سازی متغیرهای زمانی و مکانی، قرار می‌دهیم:

$$x_m=mh, m=0,1,\cdots,M,\quad y_k=k\bar{h}, k=0,1,\cdots,K,$$

با $h=\frac{L}{M}$ و $\bar{h}=\frac{L}{K}$. همچنین قرار می‌دهیم:

$$t_n=T(n/N), n=0,1,2,\cdots,N.$$

اکنون در (۷) قرار می‌دهیم $(x,y,t)=(x_i,y_k,t_n)$، آنگاه به‌دست می‌آوریم:

$$\mathcal{P}(\partial_t)u(x_m,y_k,t_n)-\mathcal{K}_\alpha\frac{\partial^\alpha u(x_m,y_k,t_{n-1})}{\partial|x|^\alpha}-\mathcal{K}_\beta\frac{\partial^\beta u(x_m,y_k,t_{n-1})}{\partial|y|^\beta}=f(x_m,y_k,t_n)+O(\tau),$$

مشتق زمانی لم ۲،۱ و مشتق مکانی با لم ۲،۲ گسسته‌سازی می‌شوند. با جایگزین کردن $u(x_m,y_k,t_n)$ با جواب تقریبی $u_{m,k}^n$، طرح تفاضلی برای مسئله‌ی (۱۰)-(۷) به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

طرح تفاضلی یکنواخت: جواب تقریبی

$$u_{m,k}^n(m=1,2,\cdots,M-1,k=1,2,\cdots,K-1,n=1,2,\cdots,N)$$

را پیدا می‌کنیم به‌طوری‌که

$$\begin{cases} \Pi_N^{\nu_1,\cdots,\nu_l} u_{m,k}^n - \mathcal{K}_\alpha \Delta_h^\alpha u_{m,k}^{n-1} - \mathcal{K}_\beta \Delta_{\bar{h}}^\beta u_{m,k}^{n-1} = f(x_m, y_k, t_n) & 1 \le m \le M-1, 1 \le k \le K-1, \\ & 1 \le n \le N, \\ u_{m,k}^0 = u_0(x_m, y_k), & 0 \le m \le M, 0 \le k \le K, \\ u_{m,0}^n = u_{m,K}^n = 0, & 0 \le m \le M, 1 \le n \le N, \\ u_{0,k}^n = u_{M,k}^n = 0, & 0 \le k \le K, 1 \le n \le N, (21) \end{cases}$$

که در آن

$$\Delta_h^\alpha u_{m,k}^{n-1} = \frac{-\Psi_\alpha}{\Gamma(4-\alpha)h^\alpha} \sum_{s=0}^{M} z_{m,s}^{(\alpha)} u_{s,k}^{n-1}, \qquad \Delta_{\bar{h}}^\beta u_{m,k}^{n-1} = \frac{-\Psi_\beta}{\Gamma(4-\beta)\bar{h}^\beta} \sum_{s=0}^{K} z_{k,s}^\beta u_{m,s}^{n-1},$$

و

$$\Pi_N^{\nu_1,\cdots,\nu_l} u_{m,k}^n = \mathbf{b}_1^1 u_{m,k}^n - \mathbf{b}_n^1 u_{m,k}^0 + \sum_{i=1}^{n-1} u_{m,k}^{n-i} [\mathbf{b}_{i+1}^1 - \mathbf{b}_i^1] + \sum_{j=2}^{l} a_j [\mathbf{b}_1^j u_{m,k}^n - \mathbf{b}_n^j u_{m,k}^0 + \sum_{i=1}^{n-1} u_{m,k}^{n-i} [\mathbf{b}_{i+1}^j - \mathbf{b}_i^j]], 1 \le n \le N, (22)$$

$$\mathbf{b}_i^j = \frac{1}{\Gamma(2-\nu_j)\tau^{\nu_j}} [(i)^{1-\nu_j} - (i-1)^{1-\nu_j}], \; j = 1, 2, \cdots, l.$$

با استفاده از رابطه‌ی (۲۱)، رابطه‌ی (۲۲) را می‌توانیم به‌صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\begin{cases} [\mathbf{b}_1^1 + \sum_{j=2}^{l} a_j \mathbf{b}_1^j] u_{m,k}^n + \mathcal{K}_\alpha \frac{\Psi_\alpha}{\Gamma(4-\alpha)h^\alpha} \sum_{s=0}^{M} z_{m,s}^{(\alpha)} u_{s,k}^{n-1} & \\ \quad + \frac{\Psi_\beta}{\Gamma(4-\beta)\bar{h}^\alpha} \sum_{s=0}^{K} z_{k,s}^{(\alpha)} u_{m,s}^{n-1} = \mathbf{b}_n^1 u_{m,k}^0 + \sum_{i=1}^{n-1} u_{m,k}^{n-i} [\mathbf{b}_i^1 - \mathbf{b}_{i+1}^1] & 1 \le m \le M-1, \; 1 \le k \le K-1, \; 1 \le n \le N, \\ \quad + \sum_{j=2}^{l} a_j [\mathbf{b}_n^j u_{m,k}^0 + \sum_{i=1}^{n-1} u_{m,k}^{n-i} [\mathbf{b}_i^j - \mathbf{b}_{i+1}^j]] + f(x_m, y_k, t_n), & \\ u_{m,k}^0 = u_0(x_m, y_k), & 0 \le m \le M, 0 \le k \le K, \\ u_{m,0}^n = u_{m,K}^n = 0, & 0 \le m \le M, 1 \le n \le N, \\ u_{0,k}^n = u_{M,k}^n = 0, & 0 \le k \le K, 1 \le n \le N. \end{cases} \quad (23)$$

قضیه ۱۳,۲ (پایداری تقریب تفاضلی): اگر

$$[\mathbf{b}_1^1 - \mathbf{b}_2^1] + \sum_{j=2}^{l} a_j [\mathbf{b}_1^j - \mathbf{b}_2^j] \ge \mathcal{K}_\alpha \frac{\Psi_\alpha}{\Gamma(4-\alpha)h^\alpha} (2(-4+2^{3-\alpha})) + \mathcal{K}_\beta \frac{\Psi_\beta}{\Gamma(4-\beta)\bar{h}^\beta} (2(-4+2^{3-\beta})), \quad (24)$$

آنگاه، مسئله‌ی گسسته‌سازی (۲۳) پایدار است.

اثبات: اثبات این قضیه مشابه اثبات قضیه ۸,۲ است.

قضیه۱۴,۲: فرض کنید $e_{m,k}^n = u(x_m, y_k, t_n) - u_{m,k}^n$ خطا در نقطه‌ی گرهی (x_m, y_k, t_n) باشد و قرار می‌دهیم

$$e^n = [e_0^n, e_1^n, \cdots, e_M^n]^T$$

که در آن $e_i^n = [e_{i,0}^n, e_{i,1}^n, \cdots, e_{i,K}^n]^T$. آنگاه داریم:

$$\| e^n \|_\infty \le C_{T,\nu_l}(h^2 + \overline{h}^2 + \tau^{2-\nu_l}),\ n = 1, 2, \cdots, N,$$

که در آن C یک ثابت حقیقی و مستقل از T و ν_l است.

با استفاده از قضیه ۱۴،۲، قضیه همگرایی زیر برقرار است.

قضیه ۱۵،۲ (همگرایی تقریب تفاضلی): فرض کنید شرط (۲۴) برقرار باشد آنگاه جواب عددی طرح تفاضل وقتی که $h \to 0$، $\overline{h} \to 0$ و $\tau \to 0$ به جواب دقیق همگراست.

۳- مثال‌های عددی

در این بخش، نتایج عددی حاصل از پیاده سازی طرح تفاضلی روی معادلات انتشار زمانی-مکانی کپوتو-ریس ارائه خواهد شد. برنامه‌ها روی کامپیوتر با مشخصات Cori7-9700@3.00 GH-3.00GH با $16GB$ حافظه RAM اجرا شده است. دو مثال عددی برای نشان دادن همگرایی و دقت روش پیشنهادی ارائه می‌دهیم. به منظور نشان دادن کارایی طرح تفاضلی، ماکسیمم خطا در نقاط گرهی را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$e_{\max}(M, N) = \max_{0 \le m \le M, 0 \le n \le N} | u(x_m, t_n) - u_m^n |,$$

و

$$e_{\max}(M, K, N) = \max_{0 \le m \le M, 0 \le n \le N} | u(x_m, y_k, t_n) - u_{m,k}^n |.$$

مثال۱: معادله‌ی انتشار کسری زمانی-مکانی کپوتو-ریس (۱) را در ناحیه مستطیل شکل $[0,1]\times[0,1]$ با شرط اولیه

$$u(x, 0) = (x^2 - x),\ \ x \in [0, 1],$$

و شرایط مرزی

$$u(0, t) = u(1, t) = 0,\ t \in [0, 1]$$

در نظر بگیرید. تابع $f(x,t)$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $u(x,t) = (1 + t^3)(x^2 - x)$ جواب دقیق مسئله‌ی مذکور باشد.

در جدول‌های ۶-۱ خطای ماکسیمم گسسته برای مقادیر $M = 10, 15$ و مقادیر $N = 100, 200, 400, 800, 1600$ برای مقادیر γ_1، γ_2 و α گزارش شده است. همان‌طوری که از نتایج مشخص است طرح تفاضلی ارائه‌شده برای این مثال دارای دقت بالای عددی است با توجه به قضیه ۸،۲ شرط کافی شرط پایداری مسئله‌ی گسسته به‌صورت زیر است:

$$C_1 = C_1(h, \gamma_1, \gamma_2, \alpha) = b_1^1 - b_2^1 + b_1^2 - b_2^2 - \mathcal{K}_\alpha \frac{\psi_\alpha}{\Gamma(4 - \alpha) h^\alpha} (2(-4 + 2^{2-\alpha})) > 0$$

مقادیر C_1 در جدول‌های ۶-۱ آورده شده است. همان‌طوری که مشاهده می‌شود اگر $C_1 > 0$ باشد آنگاه طرح تفاضلی همگرا است.

مثال۲: معادله‌ی انتشار زمانی-مکانی کسری کپوتو-ریس (۱۴) را در ناحیه $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ با شرط اولیه

$$u(x, 0) = x^2 - x, x \in [0, 1],$$

و شرایط مرزی

$$u(0,y,t)=u(1,y,t)=0,\ \ y\in[0,1], t\in[0,1],$$
$$u(x,0,t)=u(x,1,t)=0,\ \ x\in[0,1], t\in[0,1],$$

در نظر بگیرید. تابع $f(x,y,t)$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $u(x,y,t)=(1+t^3)(x^2-x)(y^2-y)$ جواب دقیق مسئله‌ی مذکور باشد.

در جدول‌های ۱۲-۷ خطای ماکسیمم گسسته برای مقادیر $M=10,15$ و مقادیر $N=100,200,400,800,1600$ برای مقادیر γ_1، γ_2، α و β گزارش شده است. همان‌طوری که از نتایج مشخص است طرح تفاضلی ارائه شده برای این مثال دارای دقت بالای عددی است با توجه به قضیه ۱۳,۲ شرط کافی پایداری مسئله‌ی گسسته به‌صورت زیر است:

$$C_1=C_1(h,\gamma_1,\gamma_2,\alpha,\beta)=b_1^1-b_2^1+b_1^2-b_2^2$$
$$-\mathcal{K}_\alpha\frac{\psi_\alpha}{\Gamma(4-\alpha)h^\alpha}(2(-4+2^{2-\alpha}))-\mathcal{K}_\beta\frac{\psi_\beta}{\Gamma(4-\beta)h^\beta}(2(-4+2^{2-\beta}))>0$$

مقادیر C_2 در جدول‌های ۱۲-۷ آورده شده است. همان‌طوری که مشاهده می‌شود اگر $C_2>0$ باشد آنگاه طرح تفاضلی همگرا است.

۴- نتیجه‌گیری: در این مقاله یک طرح تفاضلی یکنواخت برای حل معادلات انتشار کسری مکانی-زمانی کپوتو-ریس چندجمله‌ای ارائه شده است. اثبات کرده‌ایم که طرح تفاضلی پایدار مشروط است. همچنین نشان داده‌ایم که طرح نفاضلی با مرتبه‌ی $2-\nu_l$ در زمان و با مرتبه‌ی دو در مکان همگراست نتایج حاصل از مثال‌های عددی، تحلیل تئوری داده شده را تایید می‌کنند.

جدول۱: .خطای ماکسیمم گسسته برای مثال ۱ برای $\alpha=1.9$ و $M=10$.

	$N=100$	$N=200$	$N=400$	$N=800$	$N=1600$
$\gamma_1=0.9,\gamma_2=0.8$	NaN	٦.٣٤٤٤e-٣	٤.٩٤٧٩e-٣	٤.٣٠٧٨e-٣	٤.٠٩٤٧e-٣
C_1	-٤٤.١٩٥٨	٣٦.٤٧٦١	١٨٣.٥٩٦٨	٤٥٢.١٨٢٠	٩٤٣.٠١٦٨
$\gamma_1=0.9,\gamma_2=0.7$	NaN	٦.٣٤٢٧e-٣	٤.٩٥٢٢e-٣	٤.٣١٣٥e-٣	٤.٠٩٨٩e-٣
C_1	-٥٩.٥٨٨١	٧.١٦٧٤٦٩٣٠	١٢٨.٤٩١٦	٣٤٩.٦١٦٧	٧٥٣.٦٨٣٩
$\gamma_1=0.9,\gamma_2=0.6$	NaN	٦.٣٦٣٧e-٣	٤.٩٦٨٤e-٣	٤.٣٢٢٨e-٣	٤.١٠٤٠٤e-٣
C_1	-٦٨.٩٥١٨	-٩.٣٦٦٣	٩٩.٦٢٨١	٢٩٩.٦٨٩٩	٦٦٧.٩٧٢٧
$\gamma_1=0.8,\gamma_2=0.6$	NaN	NaN	٤.٩٥٣٩e-٣	٤.٣٢٤٤e-٣	٤.١٠٨١e-٣
C_1	-٩٣.٦٠٢٥	-٥٩.٩٧٨٦	-٢.٨٤٩٠	٩٤.٤٧٨١	٢٦٠.٦٨٨٣

جدول۲: خطای ماکسیمم گسسته برای مثال ۱ برای $\alpha = ۱.۹$ و $M = ۱۵$.

	$N = ۱۰۰$	$N = ۲۰۰$	$N = ۴۰۰$	$N = ۸۰۰$	$N = ۱۶۰۰$
$\gamma_{۱} = ۰.۹, \gamma_{۲} = ۰.۸$	NaN	NaN	٣.٦٠٥٩e-٣	٢.٩٢٢٠e-٣	٢.٧١٨٢e-٣
$C_{۱}$	-٢٠٩.٧٧٧٢	-١٢٩.١٠٥٣	١٨.٠١٥٥	٢٨٦.٦٠٠٦	٧٧٧.٤٣٥٥١٣٣
$\gamma_{۱} = ۰.۹, \gamma_{۲} = ۰.۷$	NaN	NaN	٠.٥.٨٤٦٦e-١	٢.٩٢٥٩e-٣	٢.٧٢١٤e-٣
$C_{۱}$	-٢٢٥.١٦٩٥	-١٥٨.٤١٣٩	-٣٧.٠٨٩٨	١٨٤.٠٣٥٤	٥٨٨.١٠٢٥٠
$\gamma_{۱} = ۰.۹, \gamma_{۲} = ۰.۶$	NaN	NaN	NaN	٢.٩٣٥٠e-٣	٢.٧٢٥٩e-٣
$C_{۱}$	-٢٣٤.٥٣٣٢	-١٧٤.٩٤٧٦	-٦٥.٩٥٣٢	١٣٤.١٠٨٦	٥٠٢.٣٩١٤
$\gamma_{۱} = ۰.۸, \gamma_{۲} = ۰.۶$	NaN	NaN	NaN	NaN	٢.٧٢٧٩٩e-٣
$C_{۱}$	-٢٥٩.١٨٣٩	-٢٢٥.٥٦٠٠	-١٦٨.٤٣٠٣	-٧١.١٠٣٣	٩٥.١٠٦٩

جدول۳: خطای ماکسیمم گسسته برای مثال ۱ برای $\alpha = ۱.۸$ و $M = ۱۰$.

	$N = ۱۰۰$	$N = ۲۰۰$	$N = ۴۰۰$	$N = ۸۰۰$	$N = ۱۶۰۰$
$\gamma_{۱} = ۰.۹, \gamma_{۲} = ۰.۸$	١.١١٥٤e-٢	٨.٤١٧٥e-٣	٧.٤٩١٥e-٣	٧.٢٣٨٧e-٣	٧.١١٣٧e-٣
$C_{۱}$	-٤.٠٤٥٣	٧٦.٦٢٦٩	٢٢٣.٧٤٧٤	٤٩٢.٣٣٢٦	٩٨٣.١٦٧٤
$\gamma_{۱} = ۰.۹, \gamma_{۲} = ۰.۷$	NaN	٨.٤١٨٠e-٣	٧.٤٩٨٢e-٣	٧.٢٤٦٤e-٣	٧.١٢١٦e-٣
$C_{۱}$	-١٩.٤٣٧٦	٤٧.٣١٨١	١٦٨.٦٤٢١	٣٨٩.٧٦٧٣	٧٩٣.٨٣٤٤
$\gamma_{۱} = ۰.۹, \gamma_{۲} = ۰.۶$	NaN	٨.٤٤٥٤e-٣	٧.٥٠٩٥e-٣	٧.٢٥٦٥e-٣	٧.١٣١٠e-٣
$C_{۱}$	-١٩.٤٣٧٦	٣٠.٧٨٤٣	١٣٩.٧٧٨٧	٣٣٩.٨٤٠٥	٧٠٨.١٢٣٣
$\gamma_{۱} = ۰.۸, \gamma_{۲} = ۰.۶$	NaN	NaN	٧.٥١٠٧e-٣	٧.٢٦٢٩٠e-٣	٧.١٤٠٠e-٣
$C_{۱}$	-٥٣.٤٥١٩	-١٩.٨٢٨٠	٣٧.٣٠١٦	١٣٤.٦٢٨٦	٣٠٠.٨٣٨٨

جدول ۴: خطای ماکسیمم گسسته برای مثال ۱ برای $\alpha = ۱.۸$ و $M = ۱۵$.

	$N = ۱۰۰$	$N = ۲۰۰$	$N = ۴۰۰$	$N = ۸۰۰$	$N = ۱۶۰۰$
$\gamma_۱ = ۰.۹, \gamma_۲ = ۰.۸$	NaN	٦,٨٦٤٠e-٢	٤,٩١٤٥e-٣	٤,٧٤٠٠e-٣	٤,٦٥٣٦e-٣
$C_۱$	-١١٤.٢٢٦٦	-٣٣.٥٥٤٦	١١٣.٥٦٦١	٣٨٢.١٥١٣	٨٧٢.٩٨٦١
$\gamma_۱ = ۰.۹, \gamma_۲ = ۰.۷$	NaN	NaN	٤,٧٤٣٧e-٣	٤,٩١٧٦e-٣	٤,٦٥٧٥e-٣
$C_۱$	-١٢٩.٦١٨٩	-٦٢.٨٦٣٣	٥٨.٤٦٠٨	٢٧٩.٥٨٦٠	٦٨٣.٦٥٣١
$\gamma_۱ = ۰.۹, \gamma_۲ = ۰.۶$	NaN	NaN	٤,٩٢٣٦e-٣	٤,٧٤٨٩e-٣	٤,٦٦٢٢e-٣
$C_۱$	-١٣٨.٩٨٢٦	-٧٩.٣٩٧٠	٢٩.٥٩٧٤	٢٢٩.٦٥٩٢	٥٩٧.٩٤٢٠
$\gamma_۱ = ۰.۸, \gamma_۲ = ۰.۶$	NaN	NaN	NaN	٤,٧٥٠٩e-٣	٤,٦٦٦٠e-٣
$C_۱$	-١٦٣.٦٣٣٢	-١٣٠.٠٠٩٤	-٧٢.٨٧٩٧	٢٤.٤٤٧٣	١٩٠.٦٥٧٥

جدول ۵: خطای ماکسیمم گسسته برای مثال ۱ برای $\alpha = ۱.۷$ و $M = ۱۰$.

..	$N = ۱۰۰$	$N = ۲۰۰$	$N = ۴۰۰$	$N = ۸۰۰$	$N = ۱۶۰۰$
$\gamma_۱ = ۰.۹, \gamma_۲ = ۰.۸$	١,٢١٠٧e-٢	١,٠١٨٧e-٢	٩,٦٩٦٢e-٣	٩,٤٥٤١e-٣	٩,٣٣٤٥e-٣
$C_۱$	٢٤.٣٣٧٣	١٠٥.٠٠٩٣	٢٥٢.١٣٠٠	٥٢٠.٧١٥١	١٠١١.٥٥٠٠
$\gamma_۱ = ۰.۹, \gamma_۲ = ۰.۷$	١,٢٠٨٧٤e-٢	١,٠١٩٥e-٢	٩,٧٠٦٧e-٣	٩,٤٦٥٧e-٣	٩,٣٤٦٥e-٣
$C_۱$	٨.٩٤٥٠	٧٥.٧٠٠٦	١٩٧.٠٢٤٧	٤١٨.١٥٠٠	٨٢٢.٢١٧٠
$\gamma_۱ = ۰.۹, \gamma_۲ = ۰.۶$	١,٢١٢٥e-٢	١,٠٢١٢e-٢	٩,٧٢٢٥e-٣	٩,٤٨٠٢٣e-٣	٩,٣٦٠٢e-٣
$C_۱$	-٠.٤١٨٦٨	٥٩.١٦٧٠	١٦٨.١٦١٣	٣٦٨.٢٢٣١	٧٣٦.٥٠٦٠
$\gamma_۱ = ۰.۸, \gamma_۲ = ۰.۶$	NaN	١,٠٢٠٤e-٢	٩,٧٢٦٦e-٢	٩,٤٩٠٥e-٣	٩,٣٧٣٦e-٣
$C_۱$	-٢٥.٠٦٩٣	٨.٥٥٤٥	٦٥.٦٨٤٢	١٦٣.٠١١٢	٣٢٩.٢٢١٤

جدول ۶: خطای ماکسیمم گسسته برای مثال ۱ برای $\alpha = 1.7$ و $M = 15$.

	$N = 100$	$N = 200$	$N = 400$	$N = 800$	$N = 1600$
$\gamma_1 = 0.9, \gamma_2 = 0.8$	NaN	٦.٦٨٩٢e-٣	٦.٣٥٢٤e-٣	٦.١٨٦٤e-٣	٦.١٠٤٤e-٣
C_1	-٤٩.٢٢٨١	٣١.٤٤٣٨	١٧٨.٥٦٤٥	٤٤٧.١٤٩٧	٩٣٧.٩٨٤٦
$\gamma_1 = 0.9, \gamma_2 = 0.7$	NaN	٦.٦٩٢٠e-٣	٦.٣٥٧٢e-٣	٦.١٩٢٠e-٣	٦.١١٠٣e-٣
C_1	-٦٤.٦٢٠٥	٢.١٣٥٢	١٢٣.٤٥٩٣	٣٤٤.٥٨٤٤	٧٤٨.٦٥١٥
$\gamma_1 = 0.9, \gamma_2 = 0.6$	NaN	٦.٧٠١٦e-٣	٦.٣٦٥٦e-٣	٦.١٩٩٤e-٣	٦.١١٧٢e-٣
C_1	-٧٣.٩٨٤٢	-١٤.٣٩٨٦	٩٤.٥٩٥٨	٢٩٤.٦٥٧٦	٦٦٢.٩٤٠٤
$\gamma_1 = 0.8, \gamma_2 = 0.6$	NaN	NaN	٦.٣٦٥٠e-٣	٦.٢٠٣٢e-٣	٦.١٢٣١e-٣
C_1	-٩٨.٦٣٤٨	-٦٥.٠١٠٩	-٧.٨٨١٢٦٦٠٢	٨٩.٤٤٥٧٣٦٦٥	٢٥٥.٦٥٦٠

جدول ۷: خطای ماکسیمم گسسته برای مثال ۲ برای $\alpha = 1.9$، $\beta = 1.7$ و $M = K = 10$.

	$N = 100$	$N = 200$	$N = 400$	$N = 800$	$N = 1600$
$\gamma_1 = 0.9, \gamma_2 = 0.8$	NaN	NaN	٢.٠٥١٦e-٣	١.٩٧٨٧e-٣	١.٩٤٢٥e-٣
C_2	-١١٨.٣٣٢٠	-٣٧.٦٦٠١	١٠٩.٤٦٠٦	٣٧٨.٠٤٥٨	٨٦٨.٨٨٠٧
$\gamma_1 = 0.9, \gamma_2 = 0.7$	NaN	NaN	٢.٠٥٣٨	١.٩٨١١	١.٩٤٤٩
C_2	-١٣٣.٧٢٤٣	-٦٦.٩٦٨٧	٥٤.٣٥٥٤	٢٧٥.٤٨٠٥	٦٧٩.٥٤٧٧
$\gamma_1 = 0.9, \gamma_2 = 0.6$	NaN	NaN	٢.٠٥٦٥e-٣	١.٩٨٣٥e-٣	١.٩٤٧٢e-٣
C_2	-١٤٣.٠٨٨٠	-٨٣.٥٠٢٤	٢٥.٤٩١٩	٢٢٥.٥٥٣٧	٥٩٣.٨٣٦٦
$\gamma_1 = 0.8, \gamma_2 = 0.6$	NaN	NaN	NaN	١.٩٨٥٩e-٣	١.٩٥٠٠e-٣
C_2	-١٦٧.٧٣٨٧	-١٣٤.١١٤٨	-٧٦.٩٨٥١	٢٠.٣٤١٩	١٨٦.٥٥٢١

جدول ۸: خطای ماکسیمم گسسته برای مثال ۲ برای $\alpha=۱.۹$، $\beta=۱.۷$ و $M=K=۱۵$.

	$N=۱۰۰$	$N=۲۰۰$	$N=۴۰۰$	$N=۸۰۰$	$N=۱۶۰۰$
$\gamma_{۱}=۰.۹, \gamma_{۲}=۰.۸$	NaN	NaN	NaN	۱.۳۵۶۴e-۳	۱.۳۳۱۵e-۳
$C_{۲}$	-۳۵۷.۴۷۸۹	-۳۰۶.۱۱۵۶	-۱۲۹.۶۸۶۲	۱۳۸.۸۹۹۰	۶۲۹.۷۳۳۸
$\gamma_{۱}=۰.۹, \gamma_{۲}=۰.۷$	NaN	NaN	NaN	۱.۰۷۱۸e-۳	۱.۳۳۲۷e-۳
$C_{۲}$	-۳۷۲.۸۷۱۱	-۳۰۶.۱۱۵۶	-۱۸۴.۷۹۱۵	-۲۸.۶۶۴۲	۴۴۰.۴۰۰۸
$\gamma_{۱}=۰.۹, \gamma_{۲}=۰.۶$	NaN	NaN	NaN	۱.۳۵۹۳e-۳	۱.۳۳۳۹e-۳
$C_{۲}$	-۳۸۲.۲۳۴۹	-۳۲۲.۶۴۹۳	-۲۷۸.۶۵۳۳	-۱۳.۵۹۲۵۵	۳۵۴.۶۸۹۷
$\gamma_{۱}=۰.۸, \gamma_{۲}=۰.۶$	NaN	NaN	NaN	NaN	۱.۳۳۵۲e-۳
$C_{۲}$	-۴۰۶.۸۸۵۵	-۳۷۳.۲۶۱۶	-۳۱۶.۱۳۲۰	-۲۱۸.۸۰۴۶	-۵۲.۵۹۴۸

جدول ۹: خطای ماکسیمم گسسته برای مثال ۲ برای $\alpha=۱.۸$، $\beta=۱.۶$ و $M=K=۱۰$.

	$N=۱۰۰$	$N=۲۰۰$	$N=۴۰۰$	$N=۸۰۰$	$N=۱۶۰۰$
$\gamma_{۱}=۰.۹, \gamma_{۲}=۰.۸$	NaN	۲.۶۰۱۶e-۳	۲.۴۵۸۱e-۳	۲.۳۸۶۲e-۳	۲.۳۵۱۳e-۳
$C_{۲}$	-۵۷.۹۶۰۹	۲۲.۷۱۱۱	۱۶۹.۸۳۱۹	۴۳۸.۴۱۷۲	۹۲۹.۲۵۲۳
$\gamma_{۱}=۰.۹, \gamma_{۲}=۰.۷$	NaN	۲.۶۰۴۳e-۳	۲.۴۶۰۹e-۳	۲.۳۹۰۲e-۳	۲.۳۵۶۴e-۳
$C_{۲}$	-۷۳.۳۵۳۲	-۶.۵۹۷۶	۱۱۴.۷۲۶۶	۳۳۵.۸۵۱۹	۷۳۹.۹۱۹۱
$\gamma_{۱}=۰.۹, \gamma_{۲}=۰.۶$	NaN	۲.۶۰۸۳e-۳	۲.۴۶۴۶e-۳	۲.۳۹۳۳e-۳	۲.۳۵۷۱e-۳
$C_{۲}$	-۸۲.۷۱۶۹	-۲۳.۱۳۱۳	۸۵.۸۶۳۲	۲۸۵.۹۲۵۰	۶۵۴.۲۰۸۰
$\gamma_{۱}=۰.۸, \gamma_{۲}=۰.۶$	NaN	NaN	۲.۴۶۷۴e-۳	۲.۳۹۶۸e-۳	۲.۳۶۲۴e-۳
$C_{۲}$	-۱۰۷.۳۶۷۵	-۷۳.۷۴۳۷	-۱۶.۶۱۴۰۸	۸۰.۷۱۲۹۵	۲۴۶.۹۲۳۲

جدول ۱۰: خطای ماکسیمم گسسته برای مثال ۲ برای $\alpha = ۱.۸$، $\beta = ۱.۶$ و $M = K = ۱۵$.

	$N = ۱۰۰$	$N = ۲۰۰$	$N = ۴۰۰$	$N = ۸۰۰$	$N = ۱۶۰۰$
$\gamma_۱ = ۰.۹, \gamma_۲ = ۰.۸$	NaN	NaN	۰.۰۰۱.٦٥٨٩e-۳	١.٦٠٩٦e-۳	١.٥٨٥٧e-۳
$C_۲$	-٢١٧.٣٧٤٥	-١٣٦.٧٠٢٦	١٠.٤١٨٣	٢٧٩.٠٠٣٦	٧٦٩.٨٣٨٧
$\gamma_۱ = ۰.۹, \gamma_۲ = ۰.۷$	NaN	NaN	١.٦٦٠١٣e-۳	١.٦١١٨١e-۳	١.٥٨٨٦٦e-۳
$C_۲$	-٢٣٢.٧٦٦٨	-١٦٦.٠١١٢	-٤٤.٦٨٧٠	١٧٦.٤٣٨٣	٥٨٠.٥٠٥٥
$\gamma_۱ = ۰.۹, \gamma_۲ = ۰.۶$	NaN	NaN	NaN	١.٦١٣٥e-۳	١.٥٨٨٦e-۳
$C_۲$	-٢٤٢.١٣٠٥	-١٨٢.٥٤٥٠	-٧٣.٥٥٠٥	١٢٦.٥١١٤	٤٩٤.٧٩٤٤
$\gamma_۱ = ۰.۸, \gamma_۲ = ۰.۶$	NaN	NaN	NaN	NaN	١.٥٩١٥e-۳
$C_۲$	-٢٦٦.٧٨١٢	-٢٣٣.١٥٧٣	-١٧٦.٠٢٧٧	-٧٨.٧٠٠٧	٨٧.٥٠٩٦

جدول ۱۱: خطای ماکسیمم گسسته برای مثال ۲ برای $\alpha = ۱.۸$، $\beta = ۱.۵$ و $M = K = ۱۰$.

	$N = ۱۰۰$	$N = ۲۰۰$	$N = ۴۰۰$	$N = ۸۰۰$	$N = ۱۶۰۰$
$\gamma_۱ = ۰.۹, \gamma_۲ = ۰.۸$	NaN	٢.٧٣٦١e-۳	٢.٥٩٥٢e-۳	٢.٥٢٤٣e-۳	٢.٤٩٠٠e-۳
$C_۲$	-٤٣.٤٥٩٠	٣٧.٢١٢٩	١٨٤.٣٣٣٨	٤٥٢.٩١٩١	٩٤٣.٧٥٤٢
$\gamma_۱ = ۰.۹, \gamma_۲ = ۰.۷$	NaN	٢.٧٣٩٣e-۳	٢.٥٩٨٣e-۳	٢.٥٢٨٨e-۳	٢.٤٩٥٧e-۳
$C_۲$	-٥٨.٨٥١٣	٧.٩٠٤٣	١٢٩.٢٢٨٥	٣٥٠.٣٥٣٨	٧٥٤.٤٢١٠
$\gamma_۱ = ۰.۹, \gamma_۲ = ۰.۶$	NaN	٢.٧٤٣٨e-۳	٢.٤٦٤٦e-۳	٢.٣٩٣٣e-۳	٢.٤٩٦٦e-۳
$C_۲$	-٦٨.٢١٥٠	-٨.٦٢٩٥	١٢٩.٢٢٨٥	٢٨٥.٩٢٥٠	٦٦٨.٧٠٩٩
$\gamma_۱ = ۰.۸, \gamma_۲ = ۰.۶$	NaN	NaN	٢.٦٠٥٧e-۳	٢.٥٣٦٣e-۳	٢.٥٠٢٦e-۳
$C_۲$	-٩٢.٨٦٥٧	-٥٩.٢٤١٨	-٢.١١٢٢	٩٥.٢١٤٨٥	٢٦١.٤٢٥١

جدول ۱۲: خطای ماکسیمم گسسته برای مثال ۲ برای $\alpha = 1.8$، $\beta = 1.5$ و $M = K = 15$.

	$N = 100$	$N = 200$	$N = 400$	$N = 800$	$N = 1600$
$\gamma_1 = 0.9, \gamma_2 = 0.8$	NaN	NaN	۱.۷٦۲۰e-۳	۱.۷۱٤۳e-۳	۱.٦۹۰٦e-۳
C_2	-۱۸٦.٦۳٤۳	-۱۰٥.۹٦۲٤	٤۱.۱٥۸٤	۳۰۹.۷٤۳٥	۸۰۰.٥۷۹۰
$\gamma_1 = 0.9, \gamma_2 = 0.7$	NaN	NaN	۱.۷٦۳۸e-۳	۱.۷۱٦۲e-۳	۱.٦۹۳۹e-۳
C_2	-۲۰۲.۰۲٦٦	-۱۳٥.۲۷۱۰	-۱۳.۹٤٦۹	۲۰۷.۱۷۸۳	٦۱۱.۲٤٥۸
$\gamma_1 = 0.9, \gamma_2 = 0.6$	NaN	NaN	۱.۷٦٦۱e-۳	۱.۷۱۸۳e-۳	۱.٦۹۳۹e-۳
C_2	-۲۱۱.۳۹۰۳	-۱٥۱.۸۰٤۷	-٤۲.۸۱۰٤	۱٥۷.۲٥۱٤	٥۲٥.٥۳٤۷
$\gamma_1 = 0.8, \gamma_2 = 0.6$	NaN	NaN	NaN	۱.۷۲۰۳e-۳	۱.٦۹۷۳e-۳
C_2	-۲۳٦.۰٤۱۰	-۲۰۲.٤۱۷۱	-۱٤٥.۲۸۷٤	-٤۷.۹٦۰٤	۱۱۸.۲٤۹۹

فهرست منابع

[۱] Metzler, R., and Klafter, J. (۲۰۰۰). The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. *Physics Reports*, ۳۳۹(۱), ۱–۷۷.

[۲] Zaslavsky, G. (۲۰۰۲). Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport. *Physics Reports*, ۳۷۱(٦), ٤٦۱–٥۸۰.

[۳] Metzler, R., and Klafter, J. (۲۰۰٤). The restaurant at the end of the random walk: recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, ۳۷(۳۱), R۱٦۱–R۲۰۸.

[٤] Gloeckle, W. G., and Nonnenmacher, T. F. (۱۹۹۱). Fractional integral operators and Fox functions in the theory of viscoelasticity. *Macromolecules*, ۲٤(۲٤), ٦٤۲٦–٦٤۳٤.

[٥] Schiessel, H., Metzler, R., Blumen, A., and Nonnenmacher, T. F. (۱۹۹٥). Generalized viscoelastic models: their fractional equations with solutions. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, ۲۸(۲۳), ٦٥٦۷–٦٥۸٤.

[٦] Diethelm, K. (۲۰۱۰). The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type (Lecture Notes in Mathematics, ۲۰۰٤) (۲۰۱۰th ed.). Springer.

[۷] Hilfer, E. (۲۰۰۰). Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific Publishing, New York, NY, USA.

[۸] I. Podlubny, I. (۱۹۹۹). Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, Calif, USA.

[۹] Samko, S. G., Kilbas, A. A., and Marichev, O. I., (۱۹۹۳). Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications, Gordon and Breach Science Publishers, Philadelphia, Pa, USA.

[۱۰] Diethelm, K., Ford, N. J., and Freed, A. D. (۲۰۰٤). Detailed Error Analysis for a Fractional Adams Method. *Numerical Algorithms*, ۳٦(۱), ۳۱–٥۲.

[۱۱] Zhuang, P., Liu, F., Anh, V., and Turner, I. (۲۰۰۸). New Solution and Analytical Techniques of the Implicit Numerical Method for the Anomalous Subdiffusion Equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, ٤٦(۲), ۱۰۷۹–۱۰۹٥.

[۱۲] Tang, T. (۱۹۹۳). A finite difference scheme for partial integro-differential equations with a weakly singular kernel. Applied Numerical Mathematics, ۱۱(٤), ۳۰۹–۳۱۹.

[۱۳]. Chen, H., Xu, D., and Peng, Y. (۲۰۱٤). An alternating direction implicit fractional trapezoidal rule type difference scheme for the two-dimensional fractional evolution equation. *International Journal of Computer Mathematics*, ۹۲(۱۰), ۲۱۷۸–۲۱۹۷.

[۱٤]. Chen, H., Gan, S., and Xu, D. (۲۰۱٦). A fractional trapezoidal rule type difference scheme for fractional order integro–differential equation. J. Frac. Calcul. Appl., ۷, ۱۳۳–۱٤٦.

[۱٥] Elmahdi, E. G. M., & Huang, J. (۲۰۲۱). Two linearized finite difference schemes for time fractional nonlinear diffusion-wave equations with fourth order derivative. *AIMS Mathematics, ٦*(٦), ٦۳٥٦–٦۳۷٦.

[۱٦] Arshad, S., Bu, W., Huang, J., Tang, Y., and Zhao, Y. (۲۰۱۷). Finite difference method for time–space linear and nonlinear fractional diffusion equations. *International Journal of Computer Mathematics, ۹٥*(۱), ۲۰۲–۲۱۷.

[۱۷] Meerschaert, M. M., and Tadjeran, C. (۲۰۰٤). Finite difference approximations for fractional advection–dispersion flow equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics, ۱۷۲*(۱), ٦٥–۷۷.

[۱۸] Yang, Q., Liu, F., and Turner, I. (۲۰۱۰). Numerical methods for fractional partial differential equations with Riesz space fractional derivatives. *Applied Mathematical Modelling, ۳٤*(۱), ۲۰۰–۲۱۸.

[۱۹] Sousa, E. (۲۰۱۲). A second order explicit finite difference method for the fractional advection diffusion equation. *Computers & Mathematics with Applications,* ٦٤(۱۰), ۳۱٤۱–۳۱٥۲.

[۲۰] Tian, W., Zhou, H., and Deng, W. (۲۰۱٥). A class of second order difference approximations for solving space fractional diffusion equations. *Mathematics of Computation, ۸٤*(۲۹٤), ۱۷۰۳–۱۷۲۷.

[۲۱] Ding, H., Li, C., and Chen, Y. (۲۰۱٤). High-Order Algorithms for Riesz Derivative and Their Applications(I). *Abstract and Applied Analysis, ۲۰۱٤*, ۱–۱۷.

[۲۲] Lubich, C. (۱۹۸٦). Discretized Fractional Calculus. *SIAM Journal on Mathematical Analysis, ۱۷*(۳), ۷۰٤–۷۱۹.

[۲۳] Ding, H., Li, C., and Chen, Y. (۲۰۱٥). High-order algorithms for Riesz derivative and their applications (II). *Journal of Computational Physics, ۲۹۳*, ۲۱۸–۲۳۷.

[۲٤] Ding, H., and Li, C. (۲۰۱٦). High-Order Algorithms for Riesz Derivative and their Applications (III). *Fractional Calculus and Applied Analysis, ۱۹*(۱), ۱۹–٥٥.

[۲٥] Metzler, R., and Klafter, J. (۲۰۰۰). The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. *Physics Reports, ۳۳۹*(۱), ۱–۷۷.

[۲٦] Tang, Q. (۲۰۲۰). On an optimal control problem of time-fractional advection-diffusion equation. *Discrete & Continuous Dynamical Systems - B, ۲٥*(۲), ۷٦۱–۷۷۹.

[۲۷] Povstenko, Y., Kyrylych, T., and Ryga, G., (۲۰۱۷). Fractional diffusion in a solid with mass absorption. *Entropy*, ۱۹, ۲۰۳.

[۲۸] Liu, F., Anh, V. V., Turner, I., and Zhuang, P. (۲۰۰۳). Time fractional advection-dispersion equation. *Journal of Applied Mathematics and Computing, ۱۳*(۱–۲), ۲۳۳–۲٤٥.

[۲۹] Povstenko, Y., and Kyrylych, T., (۲۰۱۷). Two approaches to obtaining the space-time fractional advection–diffusion equation. Entropy, ۱۹, ۲۹۷.

[۳۰] Huang, F., and Liu, F. (۲۰۰۵). The fundamental solution of the space-time fractional advection-dispersion equation. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, *۱۸*(۱–۲), ۳۳۹–۳۵۰.

[۳۱] Tripathi, N., Das, S., Ong, S., Jafari, H., and al Qurashi, M. (۲۰۱۶). Solution of Higher Order Nonlinear Time-Fractional Reaction Diffusion Equation. *Entropy*, *۱۸*(۹), ۳۲۹.

[۳۲] Momani, S., and Odibat, Z. (۲۰۰۸). Numerical solutions of the space-time fractional advection-dispersion equation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, *۲۴*(۶), ۱۴۱۶–۱۴۲۹.

[۳۳] Liu, Q., Liu, F., Turner, I., and Anh, V. (۲۰۰۷). Approximation of the Lévy–Feller advection–dispersion process by random walk and finite difference method. *Journal of Computational Physics*, *۲۲۲*(۱), ۵۷–۷۰.

[۳۴] Liu, F., Zhuang, P., Anh, V., Turner, I., and Burrage, K. (۲۰۰۷). Stability and convergence of the difference methods for the space–time fractional advection–diffusion equation. *Applied Mathematics and Computation*, *۱۹۱*(۱), ۱۲–۲۰.

[۳۵] Ervin, V. J., and Roop, J. P. (۲۰۰۶). Variational formulation for the stationary fractional advection dispersion equation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, *۲۲*(۳), ۵۵۸–۵۷۶.

[۳۶] Hejazi, H., Moroney, T., and Liu, F. (۲۰۱۴). Stability and convergence of a finite volume method for the space fractional advection–dispersion equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, *۲۵۵*, ۶۸۴–۶۹۷.

[۳۷] Carella, A. R., and Dorao, C. A. (۲۰۱۳). Least-Squares Spectral Method for the solution of a fractional advection–dispersion equation. *Journal of Computational Physics*, *۲۳۲*(۱), ۳۳–۴۵.

[۳۸] Zheng, G., and Wei, T. (۲۰۱۰). Spectral regularization method for a Cauchy problem of the time fractional advection–dispersion equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, *۲۳۳*(۱۰), ۲۶۳۱–۲۶۴۰.

[۳۹] Jiang, H., Liu, F., Turner, I., and Burrage, K. (۲۰۱۲). Analytical solutions for the multi-term time-space Caputo-Riesz fractional advection-diffusion equations on a finite domain. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, ۳۸۹, ۱۱۱۷-۱۱۲۷.

[۴۰] Zhang, Y., Sun, Z., and Liao, H. (۲۰۱۴). Finite difference methods for the time fractional diffusion equation on non-uniform meshes. *Journal of Computational Physics*, ۲۶۵, ۱۹۵-۲۱۰.

[۴۱] Li, C., and Zeng, F. (۲۰۱۵). *Numerical methods for fractional calculus*, Boca Raton, FL: CRC Press, Taylor and Francis Group.

[۴۲] Chen, M., and Deng, W. (۲۰۱۴). A second-order numerical method for two-dimensional two-sided space fractional convection diffusion equation. *Applied Mathematical Modelling*, ۳۸(۱۳), ۳۲۴۴–۳۲۵۹.