دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال پنجم، شماره بیست و یکم، آذر و دی ۱۳۹۸
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

بررسی بیشینه تعداد رده‌های احاطه‌گر در رنگ‌آمیزی یک گراف

مرتضی فغانی [*]

دانشکده ریاضی، دانشگاه پیام نور، کدپستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۵ تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۶/۰۷/۰۳ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۰۶/۱۴

چکیده

در این مقاله، عدد رنگی χ-احاطه‌گر، یعنی $d_\chi(G)$ در یک گراف G مورد بررسی قرار می‌گیرد. این عدد برابر است با ماکزیمم تعداد رده های رنگی که احاطه‌گر (یا تسلطی) بوده و G توسط $\chi(G)$ رنگ، رنگ‌آمیزی می‌شود. همچنین، نشان خواهیم داد که $d_\chi(G \vee H) = d_\chi(G) + d_\chi(H)$ است بطوریکه $G \vee H$ به معنای الحاق G و H است. نتیجه فوق به ما کمک می‌کند که رده‌های گراف‌هایی که $d_\chi(G) > 1$ و $d_\chi(G) = \chi(G)$ است را مشخص نماییم. همچنین در این مقاله، برخی نتایج در ارتباط با عدد رنگی χ-احاطه‌گر یک گراف ارائه می‌شود که مرتبط با سوالات مطرح شده در برخی مقالات اخیر حول مشخص‌سازی گراف‌های همبند G براساس مقدار $d_\chi(G)$ می‌باشد. در بخش پایانی مقاله، براساس قضایای حاصل این پرسش را مطرح می‌کنیم که آیا گراف‌های بدون مثلث G با شرط $d_\chi(G) = \chi(G) = k$ موجود است؟ آیا G دارای یک زیرگراف k-رنگ‌پذیر یکتا است یا خیر؟ بعلاوه، آیا یافتن چنین گراف‌هایی از کمر به اندازه کافی بزرگ میسر می‌باشد؟

واژه‌های کلیدی: رنگ‌آمیزی گراف، مجموعه‌های احاطه‌گر، رده‌های رنگ‌آمیزی احاطه‌گر، عدد رنگی، عدد رنگی احاطه‌گر.

*. عهده‌دار مکاتبات: Emai: m_faghani@pnu.ac.ir

۱- مقدمه

فرض کنیم G یک گراف به همراه مجموعه رأسی V و مجموعه یالی E باشد. یک مجموعه I از V مستقل است اگر هیچ دو رأسی در I مجاور نباشد. یک زیرمجموعه S از V یک مجموعه احاطه‌گر است اگر هر رأس در $V/_S$ مجاور با حداقل یک رأس در S باشد. اکنون، یک رنگ‌آمیزی C از G با k رنگ یک افراز از V به k مجموعه مستقل نام دارد اگر

$$C = \{C_1, C_2, \cdots, C_k\}$$

به قسمی که

$$C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_k = V$$

و C_i به ازای $i = 1,2, \dots, k$ مستقل است. مینیمم k که افراز ممکن است، عدد رنگی G نامیده شده و با $\chi(G)$ نشان داده می‌شود. انگیزه تعریف عدد رنگی χ- احاطه‌گر G به یک مسئله بهینه‌سازی دو مرحله‌ای بر می‌گردد. نخست، مجموعه رأسی G را به مینیمم تعداد مجموعه‌های مستقل افراز می‌کنیم. سپس، مجموعه‌های مستقل که در G احاطه‌گراند را بیشینه می‌کنیم. به روشنی، تعداد مجموعه‌های مستقل که در گام اول استفاده می‌کنیم برابر $\chi(G)$، عدد رنگی G خواهد بود. در میان همه رنگ‌آمیزی‌های G با استفاده از $\chi(G)$ رنگ، ماکزیمم تعداد مجموعه‌های مستقل که احاطه‌گرند بصورت عدد رنگی χ- احاطه‌گر G تعریف می‌شود که با نماد $d_\chi(G)$ نشان داده می‌شود. برطبق تعریف استاندارد داریم:

$$d_\chi(G) = \max\left\{ \begin{array}{c} \text{تعداد رده های رنگی } \mathcal{C} \text{ و احاطه گر } G \\ | \ \text{است } G \text{ آمیزی رنگ} - \chi \text{ یک } \mathcal{C} \end{array} \right\}$$

عدد رنگی χ- احاطه‌گر G نخستین بار در سال ۲۰۰۸ در [۲] معرفی شده است. پس از آن نیز تحقیقات متعددی در این حوزه صورت گرفته است (رجوع شود به [۱،۳،۴])، هرچند دو پرسش جالب توجه در این حوزه که در [۱] و [۲] مطرح گردیده همچنان بدون پاسخ باقی مانده است. در این مقاله، برخی نتایج در ارتباط با عدد رنگی χ- احاطه‌گر یک گراف ارائه می‌شود که مرتبط با سوالات مطرح شده است.

۲- نتایج اصلی

در این بخش ابتدا به برخی از مشاهدات ذکر شده در [۲] خواهیم پرداخت.

قضیه ۲،۱: برای هر گراف G همواره $1 \le d_\chi(G) \le \chi(G)$ برقرار است.

دو پرسش زیر در [۱] و [۲] مطرح گردیده است:

پرسش ۲،۲: گراف‌های G را مشخص کنید که $d_\chi(G) = 1$ باشد.

پرسش ۲،۳: گراف‌های G را مشخص کنید که $d_\chi(G) = \chi(G)$ باشد.

هیچ یک از دو حالت اکسترمم بدیهی نیست. می‌دانیم که اگر G دارای یک رأس تنها باشد آنگاه $d_\chi(G) = 1$ است. با این حال یک گراف G با شرط $d_\chi(G) = 1$ می‌تواند همبند باشد و بطور دلخواه برخوردار از رأس مینیمم به اندازه کافی بزرگ باشد.

قضیه ۲،٤ ([۱]): برای هر عدد صحیح $k \ge 0$، گراف همبند G موجود است بطوریکه $\delta(G) = k$ و $d_\chi(G) = 1$ است.

لم زیر به ما کمک می‌کند تا ارتباط بین ساختار یک گراف و عدد رنگی χ- احاطه‌گر آن را بیابیم. این لم نشان می‌دهد که اگر یک گراف G شامل یک زیرگراف دوبخشی کامل بعنوان یک زیرگراف پوشا باشد آنگاه عدد رنگی χ- احاطه گر گراف G برابر مجموع اعداد رنگی χ- احاطه گر این دو زیرگراف است.

لم ۲،۵: اگر $V(G)$ به دو مجموعه V_1 و V_2 افراز گردد بطوریکه هر رأس در V_1 مجاور به هر رأس در V_2 باشد آنگاه رابطه $d_\chi(G) = d_\chi(G_1) + d_\chi(G_2)$ برقرار است که در آن G_i زیرگراف القایی G توسط V_i به ازای $i = 1,2$ می‌باشد.

اثبات: از آنجاییکه در هر رنگ‌آمیزی گراف G، هیچ رأس در V_1 نمی‌تواند یک رنگ مشترک با یک رأس در V_2 داشته باشد، خواهیم داشت $\chi(G) = \chi(G_1) + \chi(G_2)$. فرض کنیم $\chi(G_1) = k_1$ و $\chi(G_2) = k_2$ باشد. گیرید C_1 یک k_1-رنگ آمیزی G_1 با $d_\chi(G_1)$ رده رنگ‌آمیزی احاطه‌گر با استفاده از رنگ‌های $\{1,2,\dots,k_1\}$ باشد. همچنین گیرید C_2 یک k_2-رنگ‌آمیزی G_2 با $d_\chi(G_2)$ رده رنگ‌آمیزی احاطه‌گر با استفاده از رنگ‌های $\{k_1+1, k_1+2, \dots, k_1+k_2\}$ باشد. ترکیب C_1 و C_2 به روشنی یک (k_1+k_2)-رنگ‌آمیزی G می‌باشد. یک رده رنگ‌آمیزی C یا یک رده رنگ‌آمیزی C_1 است و یا اینکه یک رده رنگ‌آمیزی C_2 می‌باشد. فرض کنیم که S یک رده رنگ‌آمیزی C_1 باشد که G_1 را احاطه می‌کند. هر رأس در V_1/S مجاور با حداقل یک رأس در S است. هر رأس در V_2 مجاور با هر رأس S است. بنابراین، S یک مجموعه احاطه‌گر در G است. بطور مشابه، هر رده رنگ‌آمیزی C_2 که گراف G_2 را احاطه می‌کند یک مجموعه احاطه‌گر در G است. C یک رنگ‌آمیزی G با حداقل $d_\chi(G_1) + d_\chi(G_2)$ رده رنگ‌آمیزی است. آنگاه داریم $d_\chi(G) \geq d_\chi(G_1) + d_\chi(G_2)$. فرض کنید C' یک رنگ‌آمیزی G با $\chi(G_1)$ رنگ و $d_\chi(G_1)$ رده رنگ‌آمیزی احاطه‌گر باشد. تحدید C' به G_i یک رنگ‌آمیزی G_i با $\chi(G_i)$ رنگ به ازای $i = 1,2$ می‌باشد. گیریم S یک رده رنگ‌آمیزی احاطه‌گر C' باشد. آنگاه $S \subset V_1$ یا $S \subset V_2$ برقرار است. فرض کنیم که $S \subset V_1$ باشد. آنگاه S یک مجموعه احاطه‌گر برای G_1 است. بنابراین، هر رده رنگ‌آمیزی احاطه‌گر C' یا یک رده رنگ‌آمیزی احاطه‌گر G_1 و یا یک رده رنگ‌آمیزی احاطه‌گر G_2 است. لذا $d_\chi(G_1) + d_\chi(G_2) \geq d_\chi(G)$ است و اثبات تمام است. ■

با استفاده از لم ۲،۵ یک شرط کافی برای اینکه عدد رنگی χ-احاطه گر یک گراف بیشتر از ۱ باشد را خواهیم داشت.

نتیجه ۲،۶: اگر مکمل G ناهمبند باشد، آنگاه $d_\chi(G) > 1$ است. الحاق دو گراف G_1 و G_2 با نماد $G_1 \vee G_2$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$V(G_1 \vee G_2) = V(G_1) \cup V(G_2),$$
$$E(G_1 \vee G_2) = V(G_1) \cup V(G_2) \cup \{xy:\ x \in V(G_1), y \in V(G_2)\}$$

به بیانی دیگر، $G_1 \vee G_2$ را با درنظر گرفتن یک کپی از G_1 و G_2 و الحاق هر رأس G_1 با هر رأس در G_2 می‌سازیم. می‌دانیم که $\chi(G_1 \vee G_2) = \chi(G_1) + \chi(G_2)$ است. برطبق لم ۲،۵ یک رابطه مشابه بین اعداد رنگی χ -احاطه گر وجود دارد.

قضیه ۲،۷: $d_\chi(G_1 \vee G_2) = d_\chi(G_1) + d_\chi(G_2)$.

در [۱] نشان داده می‌شود که یک گراف با عدد رنگی k می‌تواند دارای عدد رنگی χ-احاطه‌گر l به ازای هر k با شرط $1 \leq l \leq k$ و $(k,l) \neq (2,1)$ باشد. در ادامه به کمک قضیه ۲،۷ یک ساخت جدید را معرفی خواهیم نمود.

قضیه ۲،۸: برای هر عدد صحیح k, l به قسمی که $1 \leq l \leq k$ و $(k,l) \neq (2,1)$ باشد، یک گراف همبند G با شرط $\chi(G) = k$ و $d_\chi(G) = 1$ موجود است.

اثبات: به طریق استقراء روی l اثبات انجام می‌شود. اگر $l = 1$ باشد، وجود چنین گراف‌هایی توسط قضیه۲،۴ تضمین می‌شود. برای $(k,l) = (3,2)$ به راحتی می‌توان بررسی کرد که $\chi(C_5) = 3$ و $d_\chi(C_5) = 2$ است. بنابراین، قضیه برای $(k,l) = (3,2)$ درست است. فرض کنیم که $l > 1$ و $(k,l) \neq (3,2)$ باشد. گیریم $k' = k - 1$ و $l' = l - 1$، $(k', l') \neq (2,1)$ باشد. طبق فرض استقراء یک گراف همبند H با شرط $\chi(H) = k'$ و $d_\chi(H) = l'$ موجود است. فرض کنیم $G = H \vee K_1$ باشد. چون $\chi(K_1) = d_\chi(K_1) = 1$ لذا طبق قضیه ۲،۷ داریم:

$$\chi(G) = \chi(H) + 1 = k' + 1 = k$$

و

$$d_\chi(G) = d_\chi(H) + 1 = l' + 1 = l$$

این قضیه را ثابت می‌کند.■
اکنون توجه‌مان را به پرسش ۲،۳ جلب می‌کنیم. آروموگام و همکاران [۲] نشان دادند که اگر G بطور یکتا χ-رنگ‌پذیر باشد، در این صورت $d_\chi(G)=\chi(G)$ است. بنابراین، اگر G شامل یک زیرگراف بطور یکتا $\chi(G)$-رنگ‌پذیر باشد، آنگاه $d_\chi(G)=\chi(G)$ است. طبیعی است که این سوال پرسیده شود که آیا گراف‌های اینچنین دیگری نیز یافت می‌شوند، یعنی گراف G با شرط $d_\chi(G)=\chi(G)=k$ یافت می‌شود که G بطور یکتا شامل زیرگراف k -رنگ پذیر نباشد؟ برای $k=2$، پاسخ منفی است زیرا هر یال بطور یکتا یک زیرگراف ۲-رنگ پذیر است. به ازای $k=3$ نیز پاسخ مثبت است. آروموگام و همکاران [۱] نشان دادند که

$$d_\chi(C_{6i+3})=\chi(C_{6i+3})=3$$

برای هر عدد صحیح نامنفی i. C_{6i+3} بطور یکتا به ازای $i>0$، ۳-رنگ پذیر نیست. به کمک این حقیقت و قضیه ۲،۷ می‌توان نشان داد که پاسخ پرسش به ازای هر $k\geq 3$ مثبت است. نخست اینکه به لم مهم و حیاتی زیر نیاز داریم:

لم ۲،۹: گراف $G=G_1\vee G_2$ بطور یکتا $(\chi(G_1)+\chi(G_2))$-رنگ‌پذیر است اگر و تنها اگر G_1 بطور یکتا $\chi(G_1)$-رنگ‌پذیر و G_2 بطور یکتا $\chi(G_2)$-رنگ‌پذیر باشد.
اثبات لم فوق آسان بوده و حذف می‌گردد.

قضیه ۲،۱۰: گیریم k یک عدد صحیح بزرگتر از ۳ باشد. در این صورت یک گراف G_k موجود است بطوریکه $d_\chi(G_k)=\chi(G_k)=k$ و G_k بطور یکتا شامل زیرگراف k-رنگ‌پذیر نمی‌باشد.
اثبات: اثبات به استقراء روی k صورت می‌گیرد. نشان می‌دهیم که گزاره برای $k=3$ درست است. فرض کنید $k\geq 4$ و گزاره برای $k-1$ صحیح باشد. گیریم که $G_k=G_{k-1}\vee K_1$ باشد. چون $d_\chi(K_1)=\chi(K_1)=1$ برطبق قضیه ۲،۷ و فرض استقراء داریم $d_\chi(G_k)=d_\chi(G_{k-1})+d_\chi(K_1)=k$. هر زیرگراف k-رنگی H از G_k می‌بایست دارای فرم $H=H_{k-1}\vee K_1$ باشد بطوریکه H_{k-1} یک زیرگراف G_{k-1} باشد. بر طبق لم ۲،۹، H بطور یکتا k-رنگ‌پذیر است اگر و تنها اگر H_{k-1} بطور یکتا $(k-1)$-رنگ‌پذیر باشد. از آنجایی که G_{k-1} بطور یکتا شامل زیرگراف $(k-1)$-رنگ‌پذیر نمی‌باشد، G_k شامل هیچ زیرگراف k-رنگ پذیر یکتا نیست. این قضیه را ثابت می‌کند. ■

گراف‌های ساخته شده در قضیه ۲،۱۰ شامل خوشه (کلیک)های بزرگ می‌باشد. در حقیقت، G_k شامل کپی‌های بسیاری از K_{k-1} می‌باشد. اگر $k=3l+j$ به ازای اعداد صحیح l و j برقرار باشد در این صورت می‌توان اندازه بزرگترین خوشه در G_k را با الحاق کپی‌های C_9 در نخستین l گام و سپس ضمیمه کردن با K_1 کاهش داد. بنابراین، نتیجه زیر را خواهیم داشت:

قضیه ۲،۱۱: گیریم l و j اعداد صحیح نامنفی و $k=3l+j$ باشد و گراف G_k با شرط $d_\chi(G_k)=\chi(G_k)=k$ موجود باشد. در این صورت G_k شامل زیرگراف k-رنگ‌پذیر یکتا نیست و بزرگترین خوشه در G_k دارای اندازه $2l+j$ است.

۳- برخی نکات

می‌دانیم که گراف‌های k-اندازه پذیر یکتا از کمر (محیط) به اندازه کافی بزرگ موجود است. بنابراین، گراف‌های G موجودند بطوری که $d_\chi(G)=\chi(G)$ و G از کمر به اندازه کافی بزرگ است. با نگاهی به قضایای ۲،۱۰ و ۲،۱۱ پرسش زیر را می‌توان مطرح کرد که در پژوهش‌های آتی قابل بررسی است:

پرسش ۳،۱: آیا گراف های بدون مثلث G با شرط $d_\chi(G)=\chi(G)=k$ موجود است و آیا G دارای یک زیرگراف k-رنگ‌پذیر یکتا است یا خیر؟ بعلاوه، آیا یافتن چنین گراف هایی از کمر به اندازه کافی بزرگ میسر می‌باشد؟

فهرست منابع

[1] Arumugam, S., Haynes, T.W., Henning, M.A. and Nigussie, Y., Maximal Independent Sets in Minimum Colorings. Discrete Mathematics, 311 (2011) 1158-1163.

[2] Arumugam, A., Hamid, I.S. and Muthukamatchi, A., Independent Domination and Graph Clorings. Ramanujan Mathematical Society Lecture Notes Series, 7 (2008) 195-203.

[3] Arumugam, S. and Chandrasekar, K.R., Minimal Dominating Sets in Maximum Domatic Partitions. Australasian Journal of Combinatorics, 52 (2012) 281-292.

[4] Li, S., Zhang, H. and Zhang, X., Maximal Independent Sets in Bipartite Graphs with at Least One Cycle. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 15 (2013) 243-258.