دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال پنجم، شماره نوزدهم، مرداد و شهریور ۱۳۹۸
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

آنتروپی تیسالیس و آنتروپی تیسالیس شرطی افرازهای فازی

محمدحسین زارع‌نژاد[۱*]، ابوالفضل ابراهیم‌زاده[۲]

[۱و۲] گروه ریاضی، واحد زاهدان، دانشگاه آزاد اسلامی، زاهدان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۶/۱۱/۰۹ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۰۷/۱۷

چکیده

هدف این پژوهش این است که مفاهیم آنتروپی تیسالیس و آنتروپی تیسالیس شرطی افرازهای فازی را تعریف کرده و نتایجی در مورد این نوع آنتروپی بدست آوریم. نشان می‌دهیم آنتروپی تیسالیس افرازهای فازی دارای ویژگی‌های زیرجمعی و تقعر می‌باشد. این اندازه اطلاعات را تحت روابط تظریف و زیرمجموعه به مد صفر مورد مطالعه قرار می‌دهیم. قوانین زنجیره‌ای را برای این اندازه اطلاعات بررسی کرده و خواصی در مورد آنتروپی افرازهای فازی مستقل اثبات می‌نماییم. نتایجی درباره‌ی رابطه‌ی بین آنتروپی تیسالیس و آنتروپی تیسالیس شرطی افرازهای فازی بدست آورده و به کمک آنتروپی تیسالیس شرطی افرازهای فازی، نشان می‌دهیم که ویژگی زیرجمعی برای آنتروپی تیسالیس افرازهای فازی در حالتی که پارامتر این آنتروپی از یک کوچکتر است، برقرار نمی‌باشد. به طور کلی، آنتروپی تیسالیس افرازهای فازی در حالتی که پارامتر آنتروپی تیسالیس از یک بزرگتر است دارای خواصی شبیه به آنتروپی شانون افرازهای فازی می‌باشد و بنابراین می‌تواند علاوه بر آنتروپی شانون، برای اندازه‌گیری مقدار اطلاعات مستخرج از یک آزمایش فازی مورد استفاده قرار گیرد.

واژه‌های کلیدی: افراز فازی، آنتروپی تیسالیس، آنتروپی تیسالیس شرطی.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: m.zarenezhad@iauzah.ac.ir

۱. مقدمه

رویکرد کلاسیک در نظریه اطلاعات [۳۵] روی آنتروپی شانون پایه‌گذاری شده است و برای اندازه‌گیری مقدار اطلاعاتی که از یک آزمایش بدست می‌آید مناسب می‌باشد. با استفاده از آنتروپی شانون، کولموگروف و سینای [۲۶، ۳۷] آنتروپی سیستم دینامیکی را تعریف کردند. از آن‌جایی که آنتروپی دو سیستم دینامیکی یکریخت با هم برابر است آن‌ها ابزاری را برای تشخیص سیستم‌های دینامیکی غیریکریخت پیدا نمودند. آنتروپی در بسیاری از علوم مانند نظریه اطلاعات، سیستم‌های دینامیکی، فیزیک، شیمی، علوم کامپیوتر، آمار، حسابداری، اقتصاد، زیست‌شناسی، جامعه شناسی، نظریه‌ی سیستم‌های عمومی و غیره کاربرد دارد. بنابراین مطالعه‌ی آنتروپی دارای اهمیت زیادی در رشته‌های علمی مدرن می‌باشد. فرض کنید $P=(p_1,\dots,p_n)$ یک توزیع احتمال باشد در این صورت آنتروپی شانون P به صورت $H_F(A)=\sum_{i=1}^{n}F(p_i)$ تعریف می‌شود که تابع $F:[0,1]\to[0,\infty)$ (تابع آنتروپی شانون) با ضابطه‌ی $F(x)=-x\log x$ اگر $x\in(0,1]$ و $F(0)=0$ معرفی می‌گردد. لازم به ذکر است که فرمول آنتروپی منطقی توزیع احتمال $P=(p_1,\dots,p_n)$ به صورت $H_L(P)=\sum_{i=1}^{n}L(p_i)$ است که تابع آنتروپی منطقی $L:[0,1]\to[0,\infty)$ با ضابطه‌ی $L(x)=x(1-x)$ تعریف می‌شود. آنتروپی منطقی توسط جینی [۲۰] در سال ۱۹۱۲ به عنوان ابزار اندازه‌گیری میزان بی‌ثباتی استفاده شد. آنتروپی منطقی حالت خاصی از آنتروپی مربعی رائو [۳۱] و همچنین آنتروپی تیسالیس [۳۸] می‌باشد. در سال ۱۹۸۲ گود، پاتیل و تایلی ایده‌ی آنتروپی منطقی را مورد مطالعه قرار دادند [۲۱، ۲۷]. الرمان در سال ۲۰۱۳ تاریخچه‌ی آنتروپی منطقی را به صورت عمیق‌تری مورد بررسی قرار داد و او رابطه‌ی آنتروپی منطقی و آنتروپی شانون را بررسی نمود [۱۶]. اخیرا مقالاتی در مورد آنتروپی منطقی روی ساختارهای جبری مختلف چاپ شده است [۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۷، ۲۷].

بعد از مقاله‌ی پایه‌ی شانون [۳۵] چندین پژوهشگر اصلاحیه‌هایی از آنتروپی شانون ارائه دادند از جمله رنی [۳۳]، آرمیتو [۲]، داروکزی [۶]، هارودا، چاروات و تیسالیس [۲۲، ۳۸] و غیره.

آنتروپی تیسالیس در فیزیک آماری قبلا توسط هارودا و چاروات در [۲۲] معرفی شده بود. اگر $P=(p_1,\dots,p_n)$ یک توزیع احتمال باشد آنتروپی تیسالیس P از مرتبه‌ی q به صورت:

$$S_q(P)=\sum_{i=1}^{n}I_q(p_i)$$

تعریف می‌شود که $q\in(0,1)\cup(1,\infty)$. ضابطه‌ی تابع آنتروپی تیسالیس $I_q:[0,1]\to[0,\infty)$ به صورت:

$$I_q(x)=-x^q\ln_q x$$

می‌باشد. تابع q–لگاریتم به صورت $\ln_q x=\dfrac{x^{1-q}-1}{1-q}$ برای هر $x\in(0,\infty)$ تعریف می‌گردد. بنابراین بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} S_q(P)&=-\sum_{i=1}^{n}p_i^{\,q}\,\frac{p_i^{\,1-q}-1}{1-q}\\ &=\frac{1}{q-1}\Big(1-\sum_{i=1}^{n}p_i^{\,q}\Big). \end{aligned} \tag{۱}$$

توجه کنید که آنتروپی منطقی، حالت $q=2$ از آنتروپی تیسالیس است و آنتروپی تیسالیس توسیعی از آنتروپی شانون نیز می‌باشد [۱۸]. آنتروپی تیسالیس توزیع‌های احتمال در مقالاتی از جمله [۱، ۶، ۱۸، ۱۹، ۲۴، ۲۵، ۳۸] مورد مطالعه قرار گرفته است. آنتروپی تیسالیس شرطی یک توزیع احتمال با رویکردهایی متفاوت در [۱، ۱۸] تعریف و مطالعه شده است. در این مقاله، رویکرد ارائه شده در [۱] را به افرازهای فازی توسیع خواهیم داد. در [۱] نویسندگان نشان دادند که آنتروپی تیسالیس شرطی در زمینه‌ی کوانتوم، برای تفکیک‌پذیری ماتریس چگالی جهت اعتبارسنجی واقع‌گرایی موضعی کاربرد دارد و به کمک این آنتروپی، قویترین محدودیت روی اعتبار واقع‌گرایی موضعی را می‌توان با شیوه‌ای جدید بدست آورد. همچنین آنتروپی تیسالیس به عنوان یک متریک جدید رتبه‌بندی قدرتمند کلمه برای استخراج کلمات کلیدی یک سند، کاربرد پیدا کرده است [۲۳]. در [۳۹]

نویسندگان، تعدادی نامساوی در نظریه اطلاعات را با استفاده از آنتروپی تیسالیس ثابت کرده‌اند. اهمیت تعریف و مطالعه‌ی این نوع آنتروپی، در [۱] مورد بحث واقع شده است. یک مدل ریاضی معمولی از یک آزمایش تصادفی در نظریه اطلاعات، یک افراز اندازه‌پذیر از فضای اندازه احتمال است. برای حل مسائل واقعی، افرازهای تعریف شده توسط مجموعه‌های فازی (افرازهای فازی) از افرازهای اندازه‌پذیر مجوعه‌های کلاسیک مناسب‌تر می‌باشد و این انگیزه‌ی تعریف افراز فازی بود. افراز فازی می‌تواند به عنوان یک مدل ریاضی از یک آزمایش تصادفی که نتایج آن آزمایش، وقایع مبهم (وقایع فازی) باشد به کار برده شود. مفهوم آنتروپی فازی، در نظریه ارگودیک کلاسیک با جایگزین کردن افرازهای فازی به جای افرازهای اندازه‌پذیر بورل، تولید شد. از آن‌جایی که تعاریف متفاوتی از افرازهای فازی وجود دارد [۴، ۷، ۲۹] تعاریف زیادی از آنتروپی شانون افرازهای فازی ارائه شده است [۵، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۲۸، ۳۲، ۳۴]. اخیرا آنتروپی منطقی افرازهای فازی در [۲۷]، تعریف شده و مورد بررسی قرار گرفته است. ابراهیم‌زاده و جمال‌زاده در [۲۸]، آنتروپی منطقی و آنتروپی منطقی شرطی سیگماجبرهای فازی را تعریف کرده و خواصی از آن‌ها را اثبات نموده‌اند.

در این پژوهش، می‌خواهیم آنتروپی تیسالیس و آنتروپی تیسالیس شرطی توزیع‌های احتمال را به فضای اندازه احتمال فازی تعمیم دهیم. با جایگزین‌کردن تابع آنتروپی تیسالیس به جای تابع آنتروپی شانون و تابع آنتروپی منطقی، رویکردی جدید در نظریه اطلاعات فازی خواهیم داشت. در بخش ۲، تعاریف مقدماتی ارائه می‌شود. در بخش ۳ آنتروپی تیسالیس افرازهای فازی را تعریف کرده و خواصی از این اندازه اطلاعات اثبات می‌نماییم. به ویژه، خواص زیرجمعی (در حالت $q>1$) و تقعر را برای این آنتروپی نشان داده می‌شود. در بخش ۴، به تعریف آنتروپی تیسالیس شرطی افرازهای فازی می‌پردازیم و قوانین زنجیره‌ای را برای این آنتروپی مورد مطالعه قرار می‌دهیم. با استفاده از آنتروپی تیسالیس شرطی افرازهای مستقل فازی نشان می‌دهیم که ویژگی زیرجمعی برای آنتروپی تیسالیس افرازهای فازی در حالت $q<1$ برقرار نیست.

۲. افرازهای فازی

در این بخش، ابتدا به یادآوری مفهوم فضای احتمال فازی می‌پردازیم و سپس افراز متناهی فازی، تظریف، الحاق و زیرمجموعه به مد صفر معرفی می‌گردد.

فرض کنید X یک مجموعه‌ی ناتهی باشد. یک مجموعه فازی یک نگاشت $f:X\to[0,1]$ است. برای دو مجموعه‌ی فازی f,g عملگرهای $\vee,\wedge$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f\vee g=\sup\{f,g\},$$
$$f\wedge g=\inf\{f,g\}.$$

تعریف ۱،۲. $M\subseteq[0,1]^X$ را یک $\sigma-$جبر گویند اگر:

۱) $1_X\in M$

۲) اگر $f\in M$ آن‌گاه $f'=1_X-f\in M$؛

۳) اگر برای هر $n\in\mathbb{N}$، $f_n\in M$ آن‌گاه $\bigvee_{i=1}^{\infty}f_n:=\sup_n f_n\in M$.

مجموعه M را یک مجموعه بطور جزئی مرتب در نظر می‌گیرند که ترتیب جزیی آن به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$f\le g$ اگر و فقط اگر برای هر $x\in X$ داشته باشیم $f(x)\le g(x)$

تعریف ۲،۲. فرض کنید X یک مجموعه‌ی غیر تهی، M یک $\sigma-$جبر و $m:M\to[0,1]$ تابعی باشد که در شرایط زیر صدق کند:

۱) برای هر $f\in M$، $m(f\vee f')=1$؛

۲) اگر $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از عناصر دو به دو متعامد M باشد آن‌گاه $m\left(\bigvee_{i=1}^{\infty}f_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}m(f_i)$.

سه تایی (X,m,M) را فضای احتمال فازی نامند.

قضیه ۳،۲. تابع $m:M\to[0,1]$ دارای خواص زیر می‌باشد:

۱) برای هر $f \in M$، $m(f')=1-m(f)$؛
۲) اگر $f \le g$ آن‌گاه $m(f) \le m(g)$؛
۳) اگر $f \le 1-g$ آن‌گاه $m(f \wedge g)=0$؛
۴) $m(g)=1$ اگر و فقط اگر برای هر $f \in M$، $m(f \wedge g)=m(f)$.

تعریف ۴،۲. فرض کنید $A=\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ زیر مجموعه‌ای از M باشد و برای $i \ne j$ داشته باشیم $f_i \le 1_X - f_j$. در این صورت A یک افراز فازی است هرگاه

$$m\left(\bigvee_{i=1}^{n} f_i\right)=1.$$

اگر تعریف شود $\wedge_i f_i := \inf_i f_i$، آن‌گاه لم زیر را داریم.

لم ۵،۲. اگر $A=\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ و $B=\{g_1, g_2, \ldots, g_m\}$ دو افراز فازی باشند آن‌گاه پیوند دو افراز فازی A, B که که با نماد $A \coprod B$ نمایش داده می‌شود به صورت

$$A \coprod B=\{f_i \wedge g_j : i=1,\ldots,n, j=1,\ldots,m\},$$

تعریف می‌گردد، یک افراز فازی است و به آن افراز مشترک نیز گویند.

اثبات: واضح است که

$$\bigvee_{j=1}^{m} \bigvee_{i=1}^{n} (f_i \wedge g_j)=\bigvee_{j=1}^{m}\left(\bigvee_{i=1}^{n} f_i\right) \wedge g_j$$
$$=\bigvee_{j=1}^{m} g_j=1.$$

کافیست ثابت کنیم برای $(i,j) \ne (k,l)$ رابطه‌ی $f_i \wedge g_j \le 1-f_k \wedge g_l$ برقرار است.

اگر $i \ne k$ و $j=l$ آن‌گاه $f_i \le 1-f_k$ و داریم

$$f_i \wedge g_j \le (1-f_k) \wedge g_j \le 1-(f_k \wedge g_j)$$
$$=1-(f_k \wedge g_l).$$

اگر $i \ne k$ و $j \ne l$ آن‌گاه $f_i \le 1-f_k$ و $g_j \le 1-g_l$ و این نتیجه می‌دهد

$$f_i \wedge g_j \le (1-f_k) \wedge (1-g_l)$$
$$=1-(f_k \vee g_l) \le 1-(f_k \wedge g_l).$$

تعریف ۶،۲. برای دو افراز فازی A, B گویند $A \prec B$ هرگاه برای هر $g \in B$ وجود داشته باشد $f \in A$ به طوری که $g \le f$. در این حالت افراز B را تظریفی از افراز A گوییم. واضح است که $A, B \prec A \coprod B$.

$A \overset{\circ}{\subseteq} B$ (A زیرمجموعه B به مد صفر است) است اگر برای هر f_i وجود داشته باشد g_j به طوری که

$$m(f_i \wedge g_j')= m(f_i' \wedge g_j)=0.$$

تعریف ۷،۲. گویند دو افراز فازی $A=\{f_1, \ldots, f_n\}$ و $B=\{g_1, \ldots, g_k\}$ مستقل‌اند هرگاه برای هر i, j،

$$m(f_i \wedge g_j)=m(f_i)m(g_j).$$

۳. آنتروپی تیسالیس افرازهای فازی

در این بخش، آنتروپی تیسالیس افرازهای فازی را تعریف می‌کنیم و این اندازه اطلاعات را تحت روابط تظریف و زیرمجموعه به مد صفر بررسی می‌نماییم. مثالی عددی از محاسبه‌ی آنتروپی تیسالیس افراز فازی ارائه می‌دهیم و نشان می‌دهیم این آنتروپی در حالت $q>1$ ویژگی زیرجمعی دارد. همچنین ویژگی تقعر را برای آنتروپی تیسالیس افرازهای فازی ثابت می‌کنیم.

تعریف ۱،۳. آنتروپی تیسالیس افراز فازی $A=\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ از فضای احتمال فازی (X, m, M) از مرتبه $1 \ne q>0$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S_q(A):=\frac{1}{q-1}\left(1-\sum_{i=1}^{n}(m(f_i))^q\right).$$

در زیر یک مثال عددی از آنتروپی تیسالیس افرازهای فازی ارائه می‌شود.

مثال ۲،۳. فرض کنید $X=[0,1]$ و $f:X\to[0,1]$ با ضابطه‌ی $f(x)=x$ برای هر $x\in X$ و

$$M=\{f,1_X-f,f\vee(1_X-f),f\wedge(1_X-f),0_X,1_X\}.$$

اگر نگاشت $m:M\to[0,1]$ را به صورت

$$m(f\vee(1_X-f))=m(1_X)=1,$$
$$m(f\wedge(1_X-f))=m(0_X)=0,$$
$$m(f)=m(1_X-f)=\frac{1}{2}$$

تعریف کنیم آن‌گاه سه‌تایی (X,m,M) یک فضای احتمال فازی خواهد بود. سیستم‌های $A=\{f,1_X-f\}$ و $B=\{f\vee(1_X-f)\}$ افرازهایی فازی از (X,m,M) هستند به طوری که $A\prec B$. با محاسباتی ساده آنتروپی تیسالیس افرازهای A و B را بدست می‌آوریم:

$$S_q(A)=\frac{2^{1-q}}{1-q} \text{ و } S_q(B)=0.$$

مطابق با الزامات طبیعی، هر آزمایشی که نتیجه آن یک رخداد قطعی است، دارای آنتروپی صفر می‌باشد.
اکنون به بیان یک کران بالا برای این آنتروپی می‌پردازیم.

توجه ۳،۳. برای توزیع یکنواخت $p_i=m(A_i)=\frac{1}{n}$، که $i=1,2,\dots,n$، روی افراز فازی $A=\{f_1,\dots,f_n\}$، آنتروپی تیسالیس $S_q(A)$ بیشترین مقدار $\frac{1}{q-1}\left(1-n^{1-q}\right)$ را دارد. بنابراین

$$S_q(A)\le\frac{1}{q-1}\left(1-n^{1-q}\right).$$

قضیه ۴،۳. فرض کنید A و B دو افراز فازی باشند به طوری که $A\prec B$. در این صورت $S_q(A)\le S_q(B)$.

اثبات: فرض کنید $A=\{f_1,\dots,f_n\}$ و $B=\{g_1,\dots,g_k\}$. از آن‌جایی که $A\prec B$ برای هر $g_j\in B$ وجود دارد $f_i\in A$ به طوری که $m\left(g_j\right)\le m\left(f_i\right)$.

اگر $q<1$ آن‌گاه $\sum_{j=1}^{m} m\left(g_j\right)^q\ge\sum_{i=1}^{n} m\left(f_i\right)^q$. از آن‌جایی که $q-1<0$، داریم

$$S_q(A)=\frac{1}{q-1}\left(1-\sum_{i=1}^{n}(m(f_i))^q\right)$$
$$\le\frac{1}{q-1}\left(1-\sum_{i=1}^{n}(m(g_j))^q\right)=S_q(B).$$

اکنون اگر $q>1$ آن‌گاه $\sum_{j=1}^{m} m\left(g_j\right)^q\le\sum_{i=1}^{n} m\left(f_i\right)^q$. از آن‌جایی که $q-1>0$، داریم

$$S_q(A)=\frac{1}{q-1}\left(1-\sum_{i=1}^{n}(m(f_i))^q\right)$$
$$\le\frac{1}{q-1}\left(1-\sum_{i=1}^{n}(m(g_j))^q\right)=S_q(B).$$

قضیه ۵،۳. فرض کنید A افرازی فازی باشد. در این صورت

۱) $S_q(\{1_X\})=0$؛

۲) $S_q(A)\ge 0$.

اثبات:

۱) طبق تعریف و قضیه ۳،۲ قسمت ۴)، حکم واضح است.

۲) از آن‌جایی که $A\prec\{1\}$، با توجه به قسمت اول این قضیه و قضیه ۴،۳ بدست می‌آوریم

$$S_q(A)\ge S_q(\{1\})=0.$$

قضیه ۶،۳. فرض کنید A و B دو افراز فازی باشند به طوری که $A\mathring{\subseteq}B$. در این صورت $S_q(A)\le S_q(B)$.

اثبات: فرض کنید $A=\{f_1,\dots,f_n\}$ و $B=\{g_1,\dots,g_k\}$. از آن‌جایی که $A\mathring{\subseteq}B$ برای هر f_i وجود دارد g_j به طوری که

$$m\left(f_i\wedge g_j'\right)=m\left(f_i'\wedge g_j\right)=0.$$

بنابراین $m\left(f_i\right)= m\left(g_j\right)$. در نتیجه اگر $q<1$ آن‌گاه $\sum_{j=1}^{m} m\left(g_j\right)^q \ge \sum_{i=1}^{n} m\left(f_i\right)^q$. از آن‌جایی که $q-1<0$، داریم

$$S_q(A)=\frac{1}{q-1}\left(1-\sum_{i=1}^{n}(m(f_i))^q\right) \le \frac{1}{q-1}\left(1-\sum_{i=1}^{n}(m(g_j))^q\right)=S_q(B).$$

اکنون اگر $q>1$ آن‌گاه $\sum_{j=1}^{m} m\left(g_j\right)^q \le \sum_{i=1}^{n} m\left(f_i\right)^q$. از آن‌جایی که $q-1>0$، داریم

$$S_q(A)=\frac{1}{q-1}\left(1-\sum_{i=1}^{n}(m(f_i))^q\right) \le \frac{1}{q-1}\left(1-\sum_{i=1}^{n}(m(g_j))^q\right)=S_q(B).$$

در قضیه‌ی زیر، ویژگی زیرجمعی را برای آنتروپی تیسالیس افرازهای فازی ثابت می‌نماییم.

قضیه ۷،۳. فرض کنید A و B دو افراز فازی باشند و $q>1$. در این صورت $S_q(A\coprod B)\le S_q(A)+S_q(B)$.

اثبات: فرض کنید $A=\{f_1,\dots,f_n\}$ و $B=\{g_1,\dots,g_k\}$. برای هر i داریم $\sum_{j=1}^{k} m(f_i\wedge g_j)=m(f_i)$. همچنین $\sum_{i=1}^{n}\frac{m(f_i\wedge g_j)}{m(g_j)}=1$ و $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} m(f_i\wedge g_j)=1$.

بنابراین به کمک (۱) بدست می‌آوریم

$$S_q\left(\sum_{j=1}^{k} m(f_1\wedge g_j),\dots,\sum_{j=1}^{k} m(f_n\wedge g_j)\right) =\frac{1}{q-1}\left(1-\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k} m(f_i\wedge g_j)\right)^q\right) =\frac{1}{q-1}\left(1-\sum_{i=1}^{n}\left(m(f_i)\right)^q\right)=S_q(A).$$

فرض کنید $(p_1,\dots,p_k)$ و $\left(q_{1_j},\dots,q_{n_j}\right)$ دو افراز توزیع احتمال باشند. طبق قضیه ۷ در [۶] داریم

$$\sum_{j=1}^{k} p_j{}^q S_q\left(q_{1_j},\dots,q_{n_j}\right)\le S_q\left(\sum_{j=1}^{k} p_j q_{1_j},\dots,\sum_{j=1}^{k} p_j q_{n_j}\right).$$

اگر برای $j=1,\dots,k$، قرار دهیم $p_j=m(g_j)$ و برای هر $i=1,\dots,n$ و $j=1,\dots,k$، قرار دهیم $q_{i_j}=\frac{m(f_i\wedge g_j)}{m(g_j)}$ آن‌گاه با توجه به رابطه‌ی بالا و نامساوی فوق، به دست می‌آوریم

$$S_q(A\coprod B)=\frac{1}{q-1}\left(1-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\left(m(f_i\wedge g_j)\right)^q\right)=$$

$$\frac{1}{q-1}\left(1-\sum_{j=1}^{k}\left(m(g_j)\right)^q\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{m(f_i\wedge g_j)}{m(g_j)}\right)^q\right)$$

$$=\frac{1}{q-1}\begin{pmatrix}1-\sum_{j=1}^{k}\left(m(g_j)\right)^q+\sum_{j=1}^{k}\left(m(g_j)\right)^q- \\ \sum_{j=1}^{k}\left(m(g_j)\right)^q\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{m(f_i\wedge g_j)}{m(g_j)}\right)^q\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{q-1}\left(1-\sum_{j=1}^{k}\left(m(g_j)\right)^q\right)+ \sum_{j=1}^{k}\left(m(g_j)\right)^q\frac{1}{q-1}\left(1-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{m(f_i\wedge g_j)}{m(g_j)}\right)^q\right)$$

$$=S_q(B)+ \sum_{j=1}^{k}\left(m(g_j)\right)^q S_q\left(\frac{m(f_1\wedge g_j)}{m(g_j)},\dots,\frac{m(f_n\wedge g_j)}{m(g_j)}\right)$$

$$\le S_q(B)+ S_q\left(\sum_{j=1}^{k} m(f_1\wedge g_j),\dots,\sum_{j=1}^{k} m(f_n\wedge g_j)\right)$$

$$=S_q(A)+S_q(B).$$

گزاره ۸،۳. فرض کنید m_1 و m_2 دو اندازه فازی باشند. در این صورت برای هر $r\in[0,1]$، $rm_1+(1-r)m_2$ نیز یک اندازه فازی است.

اکنون نشان می‌دهیم آنتروپی تیسالیس افرازهای فازی دارای ویژگی تقعر می‌باشد.

قضیه ۹،۳. فرض کنید A افرازی فازی متناظر با دو اندازه فازی m_1 و m_2 باشد. در این صورت برای هر $r \in [0,1]$ داریم

$$rS_{q,m_1}(A)+(1-r)S_{q,m_2}(A) \le S_{q,rm_1+(1-r)m_2}(A).$$

اثبات: طبق گزاره‌ی قبل $rm_1+(1-r)m_2$ یک اندازه فازی است. فرض کنید $A=\{f_1,\ldots,f_n\}$. از آن‌جایی که m_1 و m_2 اندازه فازی هستند داریم $\sum_{i=1}^{n} m_1(f_i)=1$ و $\sum_{i=1}^{n} m_2(f_i)=1$. بنابراین $\sum_{i=1}^{n}(rm_1+(1-r)m_2(f_i))=1$. این یعنی A متناظر با اندازه فازی $rm_1+(1-r)m_2$ نیز است.
با توجه به این که تابع $f(x)=x^q$ وقتی $q<1$ تابعی مقعر است برای اعداد حقیقی a,b داریم

$$\left(ra+(1-r)b\right)^q \ge ra^q+(1-r)b^q.$$

بنابراین با قرار دادن $a=m_1(f_i)$ و $b=m_2(f_i)$ در رابطه‌ی فوق بدست می‌آوریم

$$\left(rm_1(f_i)+(1-r)m_2(f_i)\right)^q \ge r(m_1(f_i))^q+(1-r)(m_2(f_i))^q.$$

در نتیجه می‌توانیم بنویسیم

$$\sum_{i=1}^{n}\left(rm_1(f_i)+(1-r)m_2(f_i)\right)^q \ge r\sum_{i=1}^{n}(m_1(f_i))^q+(1-r)\sum_{i=1}^{n}(m_2(f_i))^q.$$

بنابراین با توجه به آخرین نامساوی فوق و طبق تعریف ۱،۳ از آن‌جایی که $\frac{1}{q-1}<0$ داریم:

$$\begin{aligned}S_{q,rm_1+(1-r)m_2}(A)&=\frac{1}{q-1}\left(1-\sum_{i=1}^{n}\left(rm_1(f_i)+(1-r)m_2(f_i)\right)^q\right)\\ &\ge\frac{1}{q-1}r\left(1-\sum_{i=1}^{n}\left(m_1(f_i)\right)^q\right)+\frac{1}{q-1}(1-r)\left(1-\sum_{i=1}^{n}\left(m_2(f_i)\right)^q\right)\\ &=rS_{q,m_1}(A)+(1-r)S_{q,m_2}(A).\end{aligned}$$

حال اگر $q>1$ با توجه به این که تابع $f(x)=x^q$ وقتی $q>1$ تابعی محدب است برای اعداد حقیقی a,b داریم

$$\left(ra+(1-r)b\right)^q \le ra^q+(1-r)b^q.$$

بنابراین با قرار دادن $a=m_1(f_i)$ و $b=m_2(f_i)$ در رابطه‌ی فوق به دست می‌آوریم

$$\left(rm_1(f_i)+(1-r)m_2(f_i)\right)^q \le r(m_1(f_i))^q+(1-r)(m_2(f_i))^q.$$

در نتیجه می‌توانیم بنویسیم

$$\sum_{i=1}^{n}\left(rm_1(f_i)+(1-r)m_2(f_i)\right)^q \le r\sum_{i=1}^{n}(m_1(f_i))^q+(1-r)\sum_{i=1}^{n}(m_2(f_i))^q.$$

بنابراین با توجه به آخرین نامساوی فوق و تعریف ۱،۳ از آن‌جایی که $\frac{1}{q-1}>0$ بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned}S_{q,rm_1+(1-r)m_2}(A)&=\frac{1}{q-1}\left(1-\sum_{i=1}^{n}\left(rm_1(f_i)+(1-r)m_2(f_i)\right)^q\right)\\ &\ge\frac{1}{q-1}r\left(1-\sum_{i=1}^{n}\left(m_1(f_i)\right)^q\right)+\frac{1}{q-1}(1-r)\left(1-\sum_{i=1}^{n}\left(m_2(f_i)\right)^q\right)\\ &=rS_{q,m_1}(A)+(1-r)S_{q,m_2}(A).\end{aligned}$$

در نتیجه حکم ثابت شد.

٤. آنتروپی تیسالیس شرطی افرازهای فازی

در این بخش، آنتروپی تیسالیس شرطی توزیع‌های

احتمال را به افرازهای فازی توسیع می‌دهیم و خواصی از آن را بررسی می‌نماییم. به ویژه، قوانین زنجیره‌ای را برای این آنتروپی مطالعه می‌کنیم. قضایایی در مورد آنتروپی تیسالیس افرازهای فازی مستقل ثابت می‌کنیم و با استفاده از این قضایا، نشان می‌دهیم این اندازه اطلاعات دارای ویژگی زیرجمعی برای حالت $q<1$ نمی‌باشد.

تعریف ۱،۴. فرض کنید $A=\{f_1,\dots,f_n\}$ و $B=\{g_1,\dots,g_k\}$ دو افراز فازی باشند. آنتروپی تیسالیس شرطی A به شرط B از مرتبه $1\neq q>0$ به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$S_q(A\,|\,B):=\frac{1}{q-1}\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(m(f_i\wedge g_j))^q}{\sum_{j=1}^{k}(m(g_j))^q}\right).$$

توجه ۲،۴.

$$S_q(A\,|\,\{1\})=\frac{1}{q-1}\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(m(f_i\wedge 1))^q}{(m(1))^q}\right)=S_q(A).$$

قضیه ۳،۴. فرض کنید A و B دو افراز فازی باشند. آن‌گاه داریم

$$S_q(A\coprod B)=S_q(A\,|\,B)+S_q(B)+(1-q)S_q(A\,|\,B)S_q(B).$$

اثبات: فرض کنید $A=\{f_1,\dots,f_n\}$ و $B=\{g_1,\dots,g_k\}$. می‌توانیم بنویسیم

$$S_q(A\,|\,B)+S_q(B)+(1-q)S_q(A\,|\,B)S_q(B)=$$

$$=\frac{1}{q-1}\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(m(f_i\wedge g_j))^q}{\sum_{j=1}^{k}(m(g_j))^q}\right)$$
$$+\frac{1}{q-1}\left(1-\sum_{j=1}^{k}(m(g_j))^q\right)$$
$$+(1-q)\left(\frac{1}{q-1}\right)^2$$
$$\left((1-\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(m(f_i\wedge g_j))^q}{\sum_{j=1}^{k}(m(g_j))^q})\times(1-\sum_{j=1}^{k}(m(g_j))^q)\right)$$
$$=\frac{1}{q-1}\left(2-\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(m(f_i\wedge g_j))^q+(\sum_{j=1}^{k}(m(g_j))^q)^2}{\sum_{j=1}^{k}(m(g_j))^q}\right)$$
$$+\frac{1}{q-1}\left(\begin{array}{l}-1+\sum_{j=1}^{k}(m(g_j))^q+\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(m(f_i\wedge g_j))^q}{\sum_{j=1}^{k}(m(g_j))^q}\\ -\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(m(f_i\wedge g_j))^q+\sum_{j=1}^{k}(m(g_j))^q}{\sum_{j=1}^{k}(m(g_j))^q}\end{array}\right)$$
$$=\frac{1}{q-1}\left(1-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(m(f_i\wedge g_j))^q\right)$$
$$=S_q(A\coprod B).$$

نتیجه ۴،۴. فرض کنید A و B افرازهایی فازی باشند. در این صورت

۱) $S_q(A\,|\,B)=\dfrac{S_q(A\coprod B)-S_q(B)}{1+(1-q)S_q(B)}$؛

۲) اگر $q<1$ آن‌گاه $S_q(A\,|\,B)\leq S_q(A\coprod B)-S_q(B)$؛

۳) اگر $q>1$ آن‌گاه $S_q(A\,|\,B)\geq S_q(A\coprod B)-S_q(B)$؛

۴) برای هر $1\neq q>0$ داریم $S_q(A\,|\,B)\geq 0$.

اثبات: از آن‌جایی که حالت‌های $1-q>0$ و $1-q<0$ را داریم، با توجه به قضیه ۳،۴، حکم برای ۱) و ۲) و ۳) ثابت است.
۴): طبق قضایای ۴،۳ و ۵،۳ قسمت ۲)، از آن‌جایی که $B \prec A \coprod B$ بدست می‌آوریم $0 \le S_q(B) \le S_q(A \coprod B)$. حال اگر $q<1$ آن‌گاه از آن‌جایی که $S_q(B) \ge 0$ و $1-q>0$، با توجه به قسمت‌های قبلی این نتیجه، حکم ثابت است. اما اگر $q>1$ در این صورت طبق قسمت سوم این نتیجه می‌توانیم بنویسیم
$$S_q(A|B) \ge S_q(A \coprod B) - S_q(B) \ge 0.$$

نتیجه ۵،۴. فرض کنید A و B و C افرازهایی فازی باشند. در این صورت
۱) اگر $q<1$ آن‌گاه $S_q(A \coprod C | B \coprod C) \le S_q(A|C) - S_q(B|C)$؛
۲) اگر $q>1$ آن‌گاه $S_q(A \coprod C | B \coprod C) \ge S_q(A|C) - S_q(B|C)$.

اثبات:
۱) از آنجایی که $C \prec B \coprod C$ طبق قضیه ۴،۳ داریم $S_q(C) \le S_q(B \coprod C)$. بنابراین
از آن‌جایی که $1-q>0$ داریم
$$1+(1-q)S_q(B \coprod C) \ge 1+(1-q)S_q(C).$$
طبق نتیجه ۴،۴ می‌توانیم بنویسیم
$$S_q(A|C) - S_q(B|C) = \frac{S_q(A \coprod C) - S_q(C)}{1+(1-q)S_q(C)} - \frac{S_q(B \coprod C) - S_q(C)}{1+(1-q)S_q(C)}.$$
$$= \frac{S_q(A \coprod C) - S_q(B \coprod C)}{1+(1-q)S_q(C)}$$
$$\ge \frac{S_q(A \coprod C) - S_q(B \coprod C)}{1+(1-q)S_q(B \coprod C)}$$
$$= S_q(A \coprod C | B \coprod C).$$

از آن‌جایی که $C \prec B \coprod C$ طبق قضیه ۴،۳ داریم $S_q(C) \le S_q(B \coprod C)$. بنابراین
با توجه به این که $1-q<0$ داریم
$$1+(1-q)S_q(B \coprod C) \le 1+(1-q)S_q(C).$$

طبق نتیجه ۴،۴ می‌توانیم بنویسیم
$$S_q(A|C) - S_q(B|C) = \frac{S_q(A \coprod C) - S_q(C)}{1+(1-q)S_q(C)} - \frac{S_q(B \coprod C) - S_q(C)}{1+(1-q)S_q(C)}$$
$$= \frac{S_q(A \coprod C) - S_q(B \coprod C)}{1+(1-q)S_q(C)}$$
$$\le \frac{S_q(A \coprod C) - S_q(B \coprod C)}{1+(1-q)S_q(B \coprod C)}$$
$$= S_q(A \coprod C | B \coprod C).$$

نتیجه ۶،۴. فرض کنید A و B افرازهایی فازی باشند. در این صورت
۱) اگر $q<1$ آن‌گاه $S_q(A|B) \le S_q(A) - S_q(B)$؛
۲) اگر $q<1$ آن‌گاه $S_q(A|B) \le S_q(A)$؛
۳) اگر $q>1$ آن‌گاه $S_q(A|B) \ge S_q(A) - S_q(B)$.

اثبات: طبق تعریف داریم $A \coprod \{1\} = A$ و $B \coprod \{1\} = B$. بنابراین با قراردادن $C=\{1\}$ در حکم نتیجه‌ی ۵،۴، طبق توجه ۲،۴ حکم بدست می‌آید.

نتیجه ۷،۴. فرض کنید A و B دو افراز فازی باشند. در این صورت اگر $A \mathring{\subseteq} B$ و $q<1$ آن‌گاه $S_q(A|B)=0$.

اثبات: با توجه به قضیه ۶،۳ و نتیجه ۶،۴ قسمت ۱) داریم
$$0 \le S_q(A|B) \le S_q(A) - S_q(B) \le 0.$$
بنابراین $S_q(A|B)=0$.

قضیه ۸،۴. دو افراز فازی A و B مستقل‌اند اگر و تنها اگر $S_q(A\mid B)=S_q(A)$.

اثبات: فرض کنید $A=\{f_1,\dots,f_n\}$ و $B=\{g_1,\dots,g_k\}$ مستقل باشند. در این صورت طبق تعریف داریم

$$S_q(A\mid B)=$$
$$\frac{1}{q-1}\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(m(f_i\wedge g_j))^q}{\sum_{j=1}^{k}(m(g_j))^q}\right)$$
$$=\frac{1}{q-1}\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(m(f_i))^q(m(g_j))^q}{\sum_{j=1}^{k}(m(g_j))^q}\right)$$
$$=\frac{1}{q-1}\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{n}(m(f_i))^q\sum_{j=1}^{k}(m(g_j))^q}{\sum_{j=1}^{k}(m(g_j))^q}\right)$$
$$=\frac{1}{q-1}\left(1-\sum_{i=1}^{n}(m(f_i))^q\right)=S_q(A).$$

برعکس اگر $S_q(A\mid B)=S_q(A)$ آن‌گاه طبق فوق، به دست می‌آوریم

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(m(f_i\wedge g_j))^q=$$
$$\sum_{i=1}^{n}(m(f_i))^q\sum_{j=1}^{k}(m(g_j))^q$$

و این یعنی برای هر i,j،

$$m\left(f_i\wedge g_j\right)=m\left(f_i\right)m\left(g_j\right).$$

و بنابراین حکم ثابت است.

نتیجه ۹،۴. فرض کنید دو افراز فازی A و B مستقل باشند. در این صورت داریم

۱) $S_q(A\amalg B)=S_q(A)+S_q(B)+(1-q)S_q(A)S_q(B)$؛

۲) اگر $q<1$ آن‌گاه $S_q(A\amalg B)\ge S_q(A)+S_q(B)$.

اثبات:

۱) طبق قضایای ۳،۴ و ۸،۴ بدست می‌آید.

۲) با توجه به قسمت اول این قضیه، حکم به دست می‌آید.

۳)

توجه ۱۰،۴. در مقابل، در حالت آنتروپی شانون برای افرازهای فازی مستقل A,B داریم:

$$H(A\amalg B)=H(A)+H(B).$$

توجه ۱۱،۴. در حالت کلی، ویژگی زیرجمعی فقط برای حالت $q>1$ (همان‌طور که در قضیه ۷،۳ ثابت شد) برقرار است زیرا در حالت $q<1$ طبق نتیجه‌ی ۹،۴ برای دو افراز مستقل A,B نشان داده شد:

$$S_q(A\amalg B)\ge S_q(A)+S_q(B).$$

بنابراین آنتروپی تیسالیس افرازهای فازی دارای ویژگی زیرجمعی در حالت $q<1$ نمی‌باشد.

۵. نتیجه‌گیری

هدف مطالعه‌ی حاضر، تعریف مفاهیم آنتروپی تیسالیس و آنتروپی تیسالیس شرطی افرازهای فازی بود. نتایج این مقاله در بخش‌های ۳ و ۴ آورده شده است.

در بخش ۳، آنتروپی تیسالیس افرازهای فازی را تعریف کردیم و این آنتروپی را تحت روابط تظریف و زیرمجموعه به مد صفر بررسی نمودیم. مثالی از محاسبه‌ی آنتروپی تیسالیس افراز فازی ارائه دادیم و ویژگی زیرجمعی را برای این اندازه اطلاعات در حالت $q>1$ اثبات کردیم (قضیه ۷،۳). در انتهای این بخش، نشان داده شد که آنتروپی تیسالیس افرازهای فازی، ویژگی تقعر دارد (قضیه ۹،۳).

در بخش ۴، آنتروپی تیسالیس شرطی توزیع‌های احتمال را که در [۱] تعریف شده بود به افرازهای فازی توسیع دادیم و خواصی از آن را بررسی کردیم. از جمله، قوانین زنجیره‌ای را برای این اندازه اطلاعات مطالعه کرده و نتایجی در مورد آنتروپی تیسالیس افرازهای فازی مستقل بدست آوردیم و با حالت آنتروپی شانون مقایسه نمودیم. در نتیجه‌ی ۹،۴ نشان دادیم که ویژگی زیرجمعی برای حالت $q < 1$ برقرار نیست (توجه ۱۱،۴ را نیز ببینید). دلیل پرداختن به مطالعه‌ی خواص آنتروپی تیسالیس افرازهای فازی این بود که با توجه به این‌که در فرمول آنتروپی تیسالیس از لگاریتم استفاده نمی‌شود و در نتیجه محاسبات با آنتروپی تیسالیس نسبت به آنتروپی شانون راحت‌تر و دقیق‌تر است، در صورت داشتن خواصی مشابه آنتروپی شانون، جایگزین مناسبی به جای آنتروپی شانون جهت اندازه‌گیری مقدار اطلاعات مستخرج از یک آزمایش فازی خواهد بود. با اثبات قضایایی در این پژوهش نشان دادیم آنتروپی تیسالیس افرازهای فازی در حالت $q > 1$، خواصی شبیه به خواص آنتروپی شانون و آنتروپی منطقی افرازهای فازی دارد و بنابراین از آن‌جایی که در فرمول آنتروپی تیسالیس از لگاریتم استفاده نمی‌شود، محاسبات با استفاده از فرمول آنتروپی تیسالیس نسبت به آنتروپی شانون، راحت‌تر و با تقریب بهتری انجام می‌شود و در نتیجه کارکردن با این اندازه‌ی اطلاعات نسبت به آنتروپی شانون ساده‌تر است و به این دلیل، پیشنهاد می‌شود که پژوهشگران در رشته‌های مختلف، این آنتروپی را به جای آنتروپی شانون مورد استفاده قرار دهند و حتی نتایج تحلیل را با حالت آنتروپی شانون مقایسه نمایند. بنابراین آنتروپی تیسالیس در حالت $q > 1$ می‌تواند به عنوان یک جایگزین مناسب و بهتر به جای آنتروپی شانون، جهت اندازه‌گیری مقدار اطلاعات مستخرج از یک آزمایش فازی مورد استفاده قرار گیرد.

فهرست منابع

[1] Abe, S., Rajagopal, K., Nonadditive Conditional Entropy and Its Significance for Local Realism, Physica A, 289, 157 (2001).

[2] Arimoto, S., Information-theoretical considerations on estimation problems, Inf. and Control 19, 181 (1971).

[3] Asadian, M.H., Ebrahimzadeh A., Entropy of Dynamical Systems from the Observer's Viewpoint, with Countable sigma-algebras, Journal of Uncertain Systems, 11(3) (2017) 197-204.

[4] Butnariu, D., Additive fuzzy measures and integrals, J. Math. Anal. Appl. 93 (1983) 436-452.

[5] Bertoluzza, C., Viviana, V., Naval, G., Uncertainty measure on fuzzy partitions, Fuzzy Sets Syst. 142 (2004) 105–116.

[6] Daroczy, Z., General information functions, Information and Control, 16 (1970) 36-51.

[7] Dubois, D., Prade, H., The logical view of conditioning and its application to possibility and evidence theories, Int. J Approx. Reason. 4 (1990) 23–46.

[8] Dumitrescu, D., A note on fuzzy information theory, Stud. Univ. Babes-Bolyai, Math. 33 (1988) 65–69.

[9] Dumitrescu, D., Measure-preserving transformation and the entropy of a fuzzy partition, in: 13th Linz Seminar on Fuzzy Set Theory, Linz, (1991) 25–27.

[10] Dumitrescu, D., Fuzzy measures and the entropy of fuzzy partitions, J. Math. Anal. Appl. 176 (1993) 359–373.

[11] Dumitrescu, D., Entropy of a fuzzy process, Fuzzy Sets Syst. 55 (1993) 169–177.

[12] Dumitrescu, D., Hierarchical pattern classification, Fuzzy Sets Syst. 28 (1998) 145–162.

[13] Ebrahimzadeh, A., Logical entropy of quantum dynamical systems, Open Physics, 14 (2016) 1-5.

[14] Ebrahimzadeh, A., Eslami Giski Z., and Markechova, D., logical Entropy of Dynamical Systems - A General Model, $\sum$ Mathematics, 5(1) (2017), DOI:10.3390/math5010006.

[15] Ebrahimzadeh A., Jamalzadeh J., Conditional logical entropy of fuzzy σ- algebras, Journal of intelligent and fuzzy systems, 33 (2017) 1019-1026.

[16] Ellerman D., An introduction to logical entropy and its relation to Shannon Entropy. Int. J. Semantic Comput. 7 (2013) 121–145.

[17] Eslami Giskia, Z., Ebrahimzadeh, A., An introduction of logical entropy on sequential effect algebra, Indagationes Mathematicae 28 (2017) 928-937.

[18] Furuichi, S., Information theoretical properties of Tsallis entropies, Journal of Mathematical Physics, 47 (2006), DOI: 10.1063/1.2165744.

[19] Furuichi, S., On uniqueness theorem for Tsallis entropy and Tsallis relative entropy, IEEE Trans. on Information Theory 51 (2005) 3638-3645.

[20] Gini, C., Variabilita e Mutabilita, Tipograa di Paolo Cuppini, Bologna, (1912).

[21] Good, I. J., Comment (on Patil and Taillie: Diversity as a concept and its measurement). Journal of the American Statistical Association. 77 (1982) 561-563.

[22] Havrda, J., Charvat, F., Quantification methods of classification processes: Concept of structural alpha-entropy, Kybernetika, 3, 30 (1967).

[23] Jamaati, M., Mehri, A., Text mining by Tsallis entropy, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 490 (2018) 1368-1376.

[24] Khosravi Tanak, A., Mohtashami Borzadaran G.R., Ahmadi J., Maximum Tsallis entropy with generalized Gini and Gini mean difference indices constraints, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 471 (2017) 554-560.

[25] Kumar, V., Some results on Tsallis entropy measure and k-record values, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 462 (2016) 667-673.

[26] Markechová, D., Entropy and mutual information of expriments in the fuzzy case, Neural Network World, 23 (2013) 339-349.

[27] Markechova, D., Logical entropy of fuzzy dynamical systems, Entropy, 18 (2016) 157-171.

[28] Mesiar, R., Rybárik, J., Entropy of fuzzy partitions: a general model, Fuzzy Sets Syst. 99 (1998) 73–79.

[29] Nguyen, H.T., Walker, E.A., A First Course in Fuzzy Logic, CRC Press, Boca Raton, FL, 1997.

[30] Patil G.P., Taillie, C., Diversity as a concept and its measurement, Journal of the American Statistical Association 77 (1982) 548-561.

[31] Rao, C.R., Diversity and dissimilarity coecients: A unifin`1ed approach, Theoretical Population Biology 21 (1982) 24-43.

[32] Rahimi, M., Riazi, A., On local entropy of fuzzy partitions. Fuzzy Sets Syst. 234 (2014) 97-108.

[33] R´enyi, A., On measures of entropy and information, in: Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, University of California Press, 1 (1961) 547-561.

[34] Rieˇcan, B., Markechová, D., The entropy of fuzzy dynamical systems, general scheme and generators, Fuzzy Sets Syst. 96 (1998) 191–199.

[35] Shannon, C.E., A Mathematical Theory of Communication. Bell Syst. Tech. J., 27 (1948). 379-423.

[36] Sinai, Y.G., Ergodic Theory with Applications to Dynamical Systems and Statistical Mechanics; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, (1990).

[37] Sinai, Y.G., On the Notion of Entropy of a Dynamical System. Dokl. Russ. Acad. Sci. 124 (1959) 768–771.

[38] Tsallis, C., Possible generalization of Bolzmann-Gibbs statistics, J.Stat.Phys., 52 (1988) 479-487.

[39] Wondie, L., Kumar, S., Some Inequalities in Information Theory Using Tsallis Entropy, International Journal of

Mathematics and Mathematical Sciences, (2018) DOI: 10.1155/2018/2861612.