دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال پنجم، شماره نوزدهم، مرداد و شهریور ۱۳۹۸
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

ارزش‌ها و رابطها در برخی منطق‌های غیرکلاسیک

پروین صفری[۱*]، سعید صالحی پور[۲]

(۱) گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد قزوین، قزوین، ایران
(۲) مرکز تحقیقات علوم پایه دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۲/۲۴ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۰۷/۲۲

چکیده

برای مدتی این پرسش مطرح بود که آیا منطق گزاره‌ای هیتینگ، که یک صوری سازی برای منطق شهودی براوور است، متناهیاً ارزشی هست یا نه (این پرسش توسط هان مطرح شده بود). کورت گودل (۱۹۳۲) یک زنجیره نزولی نامتناهی از منطق‌های میانی، که اکنون منطق‌های گودل نامیده می‌شوند، را برای نشان دادن اینکه منطق شهودی متناهیاً (چند) ارزشی نیست، معرفی نمود. اکنون می‌دانیم که منطق گزاره‌ای شهودی، نامتناهیاً چند ارزشی (با تعدادی شمارا ارزش منطقی) است. ما در این مقاله یک برهان دیگر برای این نتیجه گودل، از دیدگاه نظریه مدل‌های کریپکی، ارایه می‌کنیم. اشویدار و بندووا (۲۰۰۰) ثابت کردند که در منطق فازی گودل، رابطها ترکیب عطف و استلزام توسط بقیه رابطهای ترکیب گزاره‌ای، قابل تعریف نیستند (با اینکه ترکیب فصلی توسط عطف و استلزام قابل تعریف است). ما در این مقاله نشان می‌دهیم که ترکیب فصلی توسط استلزام و نقیض در منطق فازی گودل تعریف‌پذیر نیست؛ دو برهان برای این قضیه جدید، توسط مدل‌های کریپکی و معناشناسی فازی، ارایه می‌گردند.

واژه‌های کلیدی: منطق فازی؛ منطق شهودی؛ منطق گودل؛ مدل کریپکی؛ تعریف‌پذیری.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: parvin.safari@gmail.com

۱. مقدمه

منطق‌های چند ارزشی، که از برخی ملاحظات فلسفی سربرآورده‌اند، دارای کاربردهای خاصی در برخی از شاخه‌های علوم و مهندسی هستند. منطق‌های فازی، مثالی عملی از این منطق‌ها می‌باشند و البته منطق شهودی هم در این جایگاه قرار می‌گیرد. با اینکه اکنون می‌دانیم که منطق شهودی یک منطق چند ارزشی با بی‌نهایت (و تعدادی شمارا) ارزش است، برای مدتی این پرسش مطرح بود که آیا این منطق، متناهیاً ارزشی نیز هست یا نه. کورت گودل منطق‌دان مشهور و شناخته شده قرن بیستم، که با قضایای ناتمامیت خود معروف است، در سال ۱۹۳۲ به این پرسش پاسخ منفی داد [۳]. او برای این منظور یک زنجیره نزولی نامتناهی از منطق‌ها معرفی نمود که بین منطق شهودی و منطق کلاسیک قرار می‌گیرند. هر کدام از این منطق‌ها متناهیاً ارزشی هستند به طوری که منطق‌های کوچکتر به تعداد بیشتری ارزش منطقی نیاز دارند. در نتیجه منطق شهودی نمی‌تواند تعدادی متناهی ارزش منطقی داشته باشد در صورتیکه منطق کلاسیک چنین است، در حقیقت منطق کلاسیک منطقی دو ارزشی است. امروزه منطق‌های بین منطق شهودی و منطق کلاسیک را «منطق‌های میانی» می‌نامیم.

ما در قضیه ۳،۲ برهانی جدید برای این قضیه گودل می‌آوریم که منطق شهودی متناهیاً ارزشی نیست. این برهان برای اولین بار در رساله دکتری نویسنده دوم [۷] که تحت راهنمایی نویسنده اول نگاشته شده، پدیدار گشت با اینکه در مقاله مستخرج از این پایان نامه [۵] ذکر نگردیده بود. این برهان جدید بر مبنای مدل‌های کریپکی است؛ لازم به ذکر است که در زمان انتشار برهان گودل (در حقیقت تا سال ۱۹۵۹) مدل‌های کریپکی برای منطق شهودی شناخته شده نبودند. منطق فازی گودل، که به اختصار منطق گودل نامیده شده و با G نمایش داده می‌شود، از دل برهان گودل پدید آمد. بندووا [۱] در سال ۱۹۹۹ ثابت کرد که در G رابط‌های ترکیب $\wedge$ برحسب $\rightarrow$ و $\neg$ قابل تعریف نیست. برهان وی بر مبنای معناشناسی فازی (در بازه $[0,1]$) استوار بود؛ در آن مقاله، تعریف‌پذیری (یا تعریف‌ناپذیری) رابط‌های ترکیب $\wedge$ برحسب $\rightarrow$ و $\neg$ و $\vee$ و نیز تعریف‌پذیری (یا تعریف‌ناپذیری) $\rightarrow$ برحسب $\neg$ و $\vee$ و $\wedge$ به عنوان سوالاتی باز مطرح شدند. در سال بعد (۲۰۰۰) اشویدار و بندووا [۶] ثابت کردند که پاسخ هر دو پرسش بالا منفی است. برهان آنها اینبار بر اساس مدل‌های کریپکی بود. ما در قضیه ۳،۳ نشان می‌دهیم که $\vee$ برحسب $\rightarrow$ و $\neg$ در G قابل تعریف نیست؛ با اینکه $\vee$ برحسب $\wedge$ و $\rightarrow$ در G قابل تعریف است:

$$\varphi \vee \psi \equiv \Big((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow . \psi\Big) \wedge \Big((\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi\Big)$$

(به عنوان مثال به [۲] مراجعه کنید). برهان ما نیز بر نظریه مدل‌های کریپکی مبتنی است؛ البته در پیوست این مقاله، یک برهان دیگر با استفاده از معناشناسی فازی ارایه می‌شود. لازم به ذکر است که بر خلاف منطق کلاسیک که دارای مجموعه‌های کوچکی از رابط‌های ترکیب کامل است (به عنوان مثال تمامی رابط‌های ترکیب گزاره‌ای را می‌توان برحسب هر کدام از مجموعه‌های $\{\neg, \vee\}$ یا $\{\neg, \wedge\}$ یا $\{\neg, \rightarrow\}$ در منطق کلاسیک نوشت) ولی در منطق شهودی هیچ کدام از رابط‌های ترکیب از بقیه رابط‌ها قابل تعریف نیستند [۴].

۲ مدل‌های کریپکی و قضیه گودل

تعریف ۱،۲ (قاب کریپکی). یک قاب کریپکی برای منطق شهودی، ساختاری به صورت $\langle K, R\rangle$ است که در آن $R \subseteq K \times K$ یک رابطه‌ی ترتیب جزئی روی مجموعه‌ی ناتهی K می‌باشد و ما آن را رابطه دسترسی می‌نامیم.

تعریف ۲،۲ (مدل کریپکی). مدل کریپکی یک سه‌تایی به صورت $\langle K, R \vDash\rangle$ است که در آن $\langle K, R\rangle$ یک قاب کریپکی بوده و $\vDash \subseteq K \times \mathrm{Atoms}$ یک رابطه ارضاءپذیری بین اعضای K و فرمول‌های اتمی است که در شرط زیر صدق می‌کند:

برای هر $k \in K$ و هر فرمول اتمی p اگر kRk' و $k \vDash p$ آنگاه $k' \vDash p$؛

این شرط، پایایی نامیده می‌شود.

تعریف ارضاءپذیری می‌تواند با استقرا به همه فرمول‌های گزاره‌ای گسترش یابد:

- $k \vDash \varphi \wedge \psi$ اگر و تنها اگر $k \vDash \varphi$ و $k \vDash \psi$؛
- $k \vDash \varphi \vee \psi$ اگر و تنها اگر $k \vDash \varphi$ یا $k \vDash \psi$؛
- $k \vDash \neg\varphi$ اگر و تنها اگر برای هر k' که kRk' داشته باشیم $k' \nvDash \varphi$؛
- $k \vDash \varphi \to \psi$ اگر و تنها اگر برای هر k'ای که kRk' داشته باشیم $k' \vDash \psi$ یا $k' \vDash \varphi$.

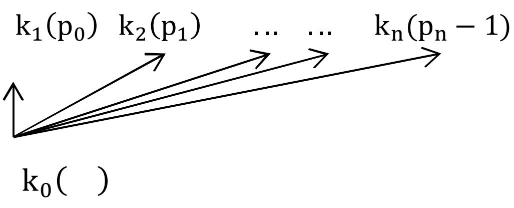
منطق شهودی نسبت به همه‌ی مدل‌های کریپکی درست و کامل است [۴]؛ توجه داریم که رابطه دسترسی یک مدل کریپکی، یک رابطه بازتابی و تراگذری است.

قضیه ۳،۲ (گودل [۳]). منطق شهودی متناهیاً چند ارزشی نیست.

اثبات. فرمول زیر را برای اتم های $p_0, p_1, \dots, p_n$ در نظر می‌گیریم:

$$\varphi \equiv \bigvee_{i < j \le n} (p_i \to p_j)$$

این فرمول در هر منطق n ارزشی شامل منطق شهودی، یک راستگو است (زیرا $n+1$ اتم داریم و n ارزش، پس طبق اصل لانه کبوتری دو اتم هم ارزش خواهیم داشت و بنابراین زیر فرمولی به صورت $p \to p$ که راستگو است وجود خواهد داشت و از آنجا که ترکیب فصلی آن با هر فرمول باز هم راستگو است، کل فرمول همواره درست خواهد بود). اما فرمول φ در منطق شهودی راستگو نیست، برای دیدن این مطلب کافیست مدل کریپکی مانند $\langle K, R \vDash \rangle$ را در نظر بگیریم که در آن $K = \{k_0, k_1, k_2, \dots, k_n\}$، $R = \{\langle k_0, k_i \rangle | i \le n\} \cup \{\langle k_i, k_i \rangle | i \le n\}$، و $\vDash = \{\langle k_1, p_0 \rangle, \langle k_2, p_1 \rangle, \dots, \langle k_n, p_{n-1} \rangle\}$.



با این تعریف در $k_0 \in K$ داریم $k_0 \nvDash p_i \to p_j$ برای هر $i < j \le n$، زیرا در k_0Rk_{i+1} داریم $k_{i+1} \vDash p_i$ ولی $k_{i+1} \nvDash p_j$، پس فرمول φ در این مدل ارضا نمی‌شود.■

۳. تعریف‌پذیری رابطهای ترکیب در منطق گودل

منطق گودل G حساب گزاره‌ای با رابطهای ترکیب $\neg$ و $\to$ و $\vee$ و $\wedge$ و بازه‌ی درستی $[0,1]$ می‌باشد که توابع درستی $\wedge$ و $\vee$ به ترتیب $\min$ و $\max$ هستند و تابع ارزشی استلزام $\to$ عبارتست از

$$(x \to y) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x \le y \\ y & \text{otherwise} \end{cases}$$

و تابع ارزشی نقیض عبارتست از

$$(\neg x) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x = 0 \\ 0 & \text{if} \quad x > 0 \end{cases}$$

دامت در [۲] نشان داد که راستگوهای منطق گودل کاملاً با بنداشت‌های منطق دامت که از اضافه شدن بنداشت $(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$ به بداشت‌های منطق شهودی به دست می‌آید، اصل‌بندی می‌شوند و به همین دلیل این منطق را منطق گودل– دامت نیز می‌نامند. بنابراین با این تعریف، G یک منطق میانی است و در کنار معناشناسی چند ارزشی، معناشناسی کریپکی را نیز با استفاده از منطق شهودی داراست (که قاب‌های آن مرتب جزئی همبند هستند).

تعریف ۱،۳. رابطه $R \subseteq K \times K$ را همبند می‌نامیم هرگاه برای هر $a, b, c \in K$ اگر cRa و cRb برقرار باشند، آنگاه لااقل یکی از رابطه‌های aRb یا bRa نیز برقرار است.

منطق کریپکی نسبت به همه‌ی مدل‌های همبند کریپکی درست و کامل است [۲و۶]؛ توجه داریم که گاهی تناقض را می‌توانیم به طور معادل با 0 (نادرست) یکسان در نظر بگیریم و $\neg\varphi$ را به صورت $\varphi \to 0$ تعریف کنیم.

تعریف ۲،۳. ([۶]). برای یک مدل کریپکی $\boldsymbol{K} = \langle K, R, \vDash\rangle$ و فرمول φ قرار می‌دهیم
$$D_{\boldsymbol{K}}(\varphi) = \{k \in K | k \vDash \varphi\}$$

در این صورت می‌گوییم φ مجموعه‌ی $D_{\boldsymbol{K}}(\varphi)$ را تعریف می‌کند. مجموعه‌ی $X \subseteq K$ را تعریف‌پذیر گوییم هرگاه برای فرمولی مانند φ تساوی زیر را داشته باشیم: $X = D_{\boldsymbol{K}}(\varphi)$.
گاهی برای راحتی به جای $D_K(\varphi)$ از $D(\varphi)$ استفاده می‌کنیم. دقت داریم که هر مجموعه‌ی X تعریف‌پذیر $R-$بسته است (یعنی برای هر $p \in X$ اگر pRq آنگاه $q \in X$).

قضیه ۳،۳. در منطق گودل G، رابط فصل با استفاده از استلزام و نقیض تعریف شدنی نیست.
اثبات. مدل کریپکی $\boldsymbol{K} = \langle K, R, \vDash\rangle$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:
- $K = \{k_1, k_2, k_3, k_4\}$،
- $R = \{\langle k_1, k_3\rangle, \langle k_2, k_4\rangle\} \cup \{\langle k_i, k_i\rangle | i = 1,2,3,4\}$
- $D(q) = \{k_4\}, D(p) = \{k_3\}$.

$$\begin{array}{cc} k_3(p) & k_4(q) \\ \uparrow & \uparrow \\ k_1(\ ) & k_2(\ ) \end{array}$$

لذا با تعریف فوق $D(p\vee q) = \{k_3, k_4\}$. با استقرا روی فرمول‌های $\theta \in \mathcal{L}(\to, 0, p, q)$ نشان می‌دهیم که رابطه‌ی زیر برقرار است:
$$k_3, k_4 \in D(\theta) \Rightarrow k_1 \in D(\theta) \text{ or } k_2 \in D(\theta) \quad (\times)$$

پس برای هیچ فرمول $\theta \in \mathcal{L}(\to, 0, p, q)$ نمی‌توانیم داشته باشیم $D(\theta) = \{k_3, k_4\}$ و بنابراین $p\vee q \notin \mathcal{L}(\to, 0, p, q)$. به وضوح $(\times)$ برای $\theta = p, q, 0$ برقرار است، پس فرض می کنیم $(\times)$ برای φ و ψ برقرار باشد و نشان می‌دهیم که در اینصورت برای $\varphi \to \psi$ نیز برقرار است. اگر $(\times)$ برای $\varphi \to \psi$ برقرار نباشد در اینصورت بایستی داشته باشیم $k_3, k_4 \vDash \varphi \to \psi$ ولی $k_1 \nvDash \varphi \to \psi$ و $k_2 \nvDash \varphi \to \psi$. پس باید یک $k \in K$ وجود داشته باشد که $k_1 R k$ و $k \vDash \varphi$ و $k \nvDash \psi$. این k بایستی یا خود k_1 باشد یا k_3. حالت دوم بنا بر $k_3 \vDash \varphi \to \psi$ مطرود است پس حتما $k = k_1$؛ بنابراین $k_1 \vDash \varphi$ و $k_1 \nvDash \psi$. استدلالی مشابه نشان می‌دهد که $k_2 \vDash \varphi$ و $k_2 \nvDash \psi$. توجه داریم که $k_1, k_2 \vDash \varphi$ نتیجه می‌دهند که $k_3, k_4 \vDash \varphi$ پس از فرض $k_3, k_4 \vDash \varphi \to \psi$ خواهیم داشت $k_3, k_4 \vDash \psi$.
حال بنا بر فرض استقراء، شرط $(\times)$ برای ψ برقرار است. پس باید یکی از احکام $k_1 \vDash \psi$ یا $k_2 \vDash \psi$ درست باشند؛ این یک تناقض است. ■
توجه داریم که مدل کریپکی ارایه شده در برهان قضیه ۳،۳ همبند است، پس مدلی مناسب برای منطق گودل G می‌باشد. ولی مدل کریپکی ارایه شده در برهان قضیه ۳،۲ همبند نیست؛ با اینحال مناسب برای منطق شهودی است.

پیوست: برهانی فازی برای قضیه ۳،۳

اثبات. به استقراء روی فرمول‌های θ در زبان منطقی $\mathcal{L}(\to, 0, p, q)$ نشان می‌دهیم که هیچ کدام از آنها معادل با فرمول $p\vee q$ (برای $p, q < 1$) نیستند؛ این مطلب برای $p, q, 0$ واضح است. پس فرض می‌کنیم که برای فرمول‌های φ, ψ داریم $\varphi \not\equiv (p\vee q)$ و $\psi \not\equiv (p\vee q)$؛ و نشان می‌دهیم که حکم زیر نیز برقرار است: $(\varphi \to \psi) \not\equiv (p\vee q)$. فرض (خلف) می‌کنیم که $(\varphi \to \psi) \equiv (p\vee q)$ و دو حالت زیر را تشخیص می‌دهیم:

۱. $p \le q < 1$: در اینصورت $(p\vee q) = q$.
پس باید داشته باشیم $\psi \equiv (\varphi \to \psi)$. در نتیجه در این حالت باید $\psi \equiv (p\vee q)$ برقرار باشد.

۲. $q \le p < 1$: در اینصورت $(p\vee q) = p$.
پس باز هم باید داشته باشیم $\psi \equiv (\varphi \to \psi)$. در نتیجه در این حالت نیز باید $\psi \equiv (p\vee q)$ برقرار باشد. حال فرض استقراء، تناقض مطلوب را به دست می‌دهد. ■

فهرست منابع

[1] K. BENDOVA, A Note on Gödel Fuzzy *Logic, Soft Computing 2* (1999) 167.

[2] M. DUMMET, A Propositional Calculus with Denumerable Matrix, *The Journal of Symbolic Logic* 24 (1959) 97—106.

[3] K. GÖDEL, Zum Intuitionistischen Aussagenkalkül, *Anzeiger Akademie der Wissenschaften Wien* 69 (1932) 65—66. Translated as ‘On the Intuitionistic Propositional Calculus', in: *Kurt Cödel Collected Works: Volume I: Publications 1929-1936,* eds.: S. Feferman et al. (Oxford University Press 1986).

[4] G. MINTS, *A Short Introduction to Intuitionistic Logic* (Kluwer 2002).

[5] P. SAFARI & S. SALEHI, Kripke Semantics for Fuzzy Logics, *Soft Computing* 22 (2018) 839—844.

[6] V. ŠVEJDAR & K. BENDOVA, On Inter—Expressibility of Logical Connectives in Gödel Fuzzy Logic, *Soft Computing* 4 (2000) 103—105.

[۷] پ. صفری، بررسی معناشناسی کریپکی برای منطق‌های فازی، رساله دکتری (دانشگاه تبریز ۱۳۹۵).