



k -نگاشت تکانی و عمل گروه خارج‌قسمتی روی فضای کاهش‌یافته

محمد دارا^۱، اکبر دهقان نژاد^{۲*}

(^۱) گروه ریاضی محض (هندسه)، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه علم و صنعت، تهران، ایران.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۱/۲/۲۲ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۹/۱۴

چکیده

در حوزه دستگاه‌های همیلتونی تقارن‌ها روی فضای فاز از اهمیت زیادی برخوردار هستند که منجر به کمیت‌های پایستگی روی این دستگاه‌ها می‌شود. کمیت‌های پایستار، اشیایی هستند که برای خرد کردن بُعد فضای دستگاه‌های دینامیکی مورد استفاده قرار می‌گیرند. به این روش که با استفاده از تقارن‌های موجود در یک دستگاه راه حل‌های اصلی آن را در یک فضا با بُعد کمتر مورد بررسی قرار می‌دهند، فروکاست گفته می‌شود. نگاشت تکانی یک بیان ریاضی از مفهوم ناوردهای مرتبط با تقارن‌های یک دستگاه همیلتونی و یک ابزار اساسی برای مطالعه نظریه فروکاست روی خمینه‌های هم‌تافته به شمار می‌آید. در این نظریه، با داشتن یک عمل گروه لی روی یک G -خمینه همیلتونی و با در نظر گرفتن یک سطح تراز از نگاشت تکانی و یک عمل آزاد و سره از زیرگروه پایاگر روی آن، یک خمینه خارج‌قسمتی جدید معرفی می‌کند. در نظر گرفتن ملاحظات توپولوژیکی نگاشت تکانی و تعمیم فضای هم‌دامنه‌ی آن منجر به تعریف k -نگاشت تکانی می‌شود که خواص آن را می‌توان در مطالعه k -تانسورهای هم‌مورد ناوردا روی G -خمینه‌ها یافت. در این مقاله ثابت می‌کنیم اگر N یک زیرگروه نرمال گروه لی G و M_μ خمینه کاهش‌یافته توسط k -نگاشت تکانی μ در مقدار منظم V باشد، آنگاه این خمینه به همراه عمل خارج‌قسمتی G_v/N_v دارای یک k -نگاشت تکانی است.

واژه‌های کلیدی: هندسه هم‌تافته، دستگاه‌های همیلتونی، نگاشت تکانی، فروکاست

۱- مقدمه

یکی از نخستین مفاهیم در علم فیزیک، مطالعه‌ی پدیده حرکت است. نخستین فرمول‌بندی ریاضی از قوانین حرکت توسط نیوتون صورت گرفته است که به عنوان مکانیک کلاسیک شناخته می‌شود. در بررسی حرکت اجسام به کمک قوانین نیوتون اجسام به صورت ذره‌هایی در نظر گرفته می‌شوند. این امر سبب می‌شود تا زمانی که تعداد ذرات یک سیستم مکانیکی بیشتر شود، استفاده از قوانین نیوتون به سختی صورت بگیرد. دانشمندان بسیاری از جمله لاگرانژ و همیلتون به این موضوع پرداختند، به گونه‌ای که دستاوردهای آن‌ها فاقد اشکال هندسی باشد و هر دو توانستند فرمول‌بندی جدیدی از مکانیک برای حل این مشکلات پیشنهاد کنند. مکانیک همیلتونی نمایشی جدید از مکانیک کلاسیک است. این رویکرد جدید این امکان را فراهم می‌کند تا بتوان بدون اعتنا به هندسه‌ی اقلیدسی حاکم بر سیستم، معادله‌ی حرکت آن را توصیف کرد. برای جزییات بیشتر می‌توانید به منابع [۲، ۱] مراجعه کنید. تعمیم مفاهیم مکانیک همیلتونی بر روی خمینه‌ها با استفاده از هندسه‌ای به نام هم‌تافته امکان‌پذیر است؛ به عبارت دیگر، فضای فاز یک سیستم همیلتونی یک فضای هم‌تافته می‌باشد. این فضا متناسب با یک فرم دوخطی پادمتقارن، ناتاب‌هیده و وابسته به نقاط است [۴، ۳]. در حوزه دستگاه‌های همیلتونی تقارن‌ها روی فضای فاز از اهمیت زیادی برخوردار هستند که منجر به کمیت‌های پایستگی روی این دستگاه‌ها می‌شود. وجود کمیت‌های پایستار، از دیرباز مورد توجه بنیانگذاران مکانیک کلاسیک بوده و برای کاهش بُعد فضای سیستم‌های دینامیکی مورد استفاده قرار می‌گرفتند. به این شیوه که با استفاده از تقارن‌های موجود در یک سیستم راه حل‌های آن را در یک فضا با بُعد کمتر مورد بررسی قرار می‌دهند، فروکاست گفته می‌شود. نگاشت تکانی یک بیان ریاضی از مفهوم کمیت‌های پایستگی مرتبط با تقارن‌های یک سیستم دینامیکی و یک ابزار اساسی برای مطالعه فروکاست روی خمینه‌های هم‌تافته به شمار می‌آید. برای اطلاعات تکمیلی در رابطه با مفاهیم نگاشت تکانی می‌توان به منابع [۶، ۵] مراجعه کرد. همچنین این نگاشت نقش مهمی در نظریه هندسی ناوردها، کوانتیزه‌سازی هندسی مکانیک کلاسیک و کوهومولوژی ناوردا ایفا می‌کند. برای جزییات بیشتر در رابطه با این مفاهیم می‌توان به منابع [۹، ۸، ۷] مراجعه نمود. مفهوم نگاشت تکانی تعمیمی برای تابع همیلتون است و از لحاظ تاریخی اولین کسی که نگاشت تکانی را بدین صورت معرفی کرد، کسنت در سال ۱۹۶۵ بود [۱۰]. تنها چند هفته بعد سوربو، به طور مستقل آن را معرفی کرد و آن را با مفاهیم تکانه خطی و زاویه‌ای مرتبط ساخت [۱۱]. اشیای معرفی شده مانند فرم هم‌تافته و نگاشت تکانی، به راحتی قابل استفاده هستند ولی در عین حال از پیچیدگی عمیقی برخوردار می‌باشند. برای غلبه بر این پیچیدگی اغلب مجبوریم تمرکز خود را محدود بر ویژگی‌های خاص این اشیاء مانند پایایی نگاشت تکانی و یا داده‌های توپولوژیکی قرار دهیم. در نظر گرفتن ملاحظات توپولوژیکی نگاشت تکانی و تعمیم فضای هم‌دامنه‌ی آن منجر به تعریف k -نگاشت تکانی می‌شود که خواستگاه آن را می‌توان در مطالعه k -تانسورهای همورد ناوردا روی G -خمینه‌ها یافت. برای جزییات بیشتر به منبع [۱۲] مراجعه کنید.

تعریف ۱-۱: فرض کنید M یک G -خمینه هموار با عمل φ باشد. یک k -نگاشت تکانی روی خمینه M ،

نگاشت هموار $\mu: M \rightarrow T^k(g^*)$ است که دارای دو ویژگی زیر می‌باشد:

(۱) نگاشت μ ، G -همورد است. به عبارت دیگر به ازای هر $g \in G$ نمودار زیر جابه‌جایی باشد:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\mu} & T^k(g^*) \\ \varphi_g \downarrow & & \downarrow Ad_g^\# \\ M & \xrightarrow{\mu} & T^k(g^*) \end{array}$$

(۲) به ازای هر زیرگروه لی بسته H از گروه G نگاشت $\mu^H: M \rightarrow T^k(\mathfrak{h}^*)$ که به صورت ترکیب $\mu^H := i^* \circ \mu: M \rightarrow T^k(\mathfrak{h}^*)$ تعریف می‌شود، روی مولفه‌های همبندی M^H ثابت می‌باشد.

ملاحظه ۱-۲: اگر به ازای هر میدان برداری $X \in \mathfrak{g}$ و $q \in M$ تابع $\mu^X: M \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $\mu^X(q) = \mu(q)X$ ، روی مجموعه نقاط صفر میدان برداری X^M (میدان برداری متناظر با X در M) ثابت باشد، آنگاه ویژگی دوم نگاشت تکانی مجرد برقرار است.

اگر به دنبال یک مثال غیر بدیهی از تعریف جدیدمان باشیم، می‌توانیم به ۲-نگاشت‌های تکانی اشاره کنیم که روی G -خمینه‌ها با متریک ریمانی پایا تعریف می‌شوند.

مثال ۱-۳: به ازای هر متر ریمانی پایا مانند $\langle, \rangle$ ، روی G -خمینه M ، خمینه M دارای ۲-نگاشت تکانی $\mu: M \rightarrow T^2(\mathfrak{g}^2)$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \mu(q): \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mu(q)(X, Y) &= \langle X^M, Y^M \rangle_q \end{aligned}$$

گزاره ۱-۴: فرض کنید $f: N \rightarrow G$ یک همسانریختی از گروه‌های لی و G -خمینه M دارای k -نگاشت تکانی μ باشد. در این صورت عمل القا شده روی N دارای k -نگاشت تکانی $i^* \circ \mu$ است.

برهان: فرض کنید φ عمل گروه G روی خمینه M باشد. عمل القای ψ از گروه لی N روی خمینه M توسط گروه G را به ازای هر $q \in M$ و $n \in N$ به صورت عمل $\psi(n, q) = \varphi_{f(n)}(q)$ تعریف می‌کنیم. ابتدا نشان می‌دهیم به ازای هر $n \in N$ ، میدان برداری $X = (X_1, \dots, X_k) \in \underbrace{\mathfrak{n} \times \dots \times \mathfrak{n}}_{k \text{ times}}$ و $q \in M$ نگاشت $\bar{\mu}$

همورد است.

$$\begin{aligned} Ad_n^\# \circ \bar{\mu}(q)(X) &= Ad_n^\# \circ (f^* \circ \mu)(q)(X) \\ &= (Ad_n^\# \circ f^*) \circ \mu(q)(X) \\ &= f^* \circ (Ad_{f(n)}^\# \circ \mu(q))(X) \\ &= f^* \circ (\mu \circ \varphi_{f(n)})(q)(X) \\ &= (f^* \circ \mu) \circ \psi(n, q)(X) \\ &= \bar{\mu} \circ \psi_n(q)(X). \end{aligned}$$

برای ویژگی دوم نگاشت تکانی کافی است ثابت کنیم به ازای هر زیرگروه بسته H از N و $q \in M^H$ ، نگاشت $\bar{\mu}^H(q)$ ثابت است. چون H زیرگروه لی بسته از N است، پس $f(H)$ زیرگروه لی بسته از G خواهد بود و لذا به ازای هر $h \in H$ ، داریم:

$$\psi_h(q) = q \Rightarrow \varphi_{f(h)}(q) = q \Rightarrow q \in M^{f(H)}.$$

بنابراین نگاشت

$$\begin{aligned} \bar{\mu}^H(q) &= i^* \circ (f^* \circ \mu)(q) = i^* \circ (f^* \circ \mu)(q) \\ &= (f \circ i)^* \circ \mu(q) \\ &= \mu^{f(H)} \end{aligned}$$

ثابت است.

نتیجه ۵-۱: فرض کنید G یک گروه لی و N یک زیر گروه لی آن باشد. اگر G روی M عمل کند و دارای k -نگاشت تکانی μ باشد، در این صورت با تحدید این عمل به N روی M ، این عمل نیز دارای k -نگاشت تکانی $\mu \circ i^*$ است.

۲- نظریه فروکاست

نظریه فروکاست یک مفهوم دیرینه است که ریشه آن به مکانیک کلاسیک باز می‌گردد. مفاهیم این نظریه در بسیاری از کتب مکانیک هندسی یا هندسه هممتافته وجود دارد. نظریه فروکاست هممتافته توسط میر در [۱۳]، ماردسن و وینشتین در [۱۴] بیان گردید. در این نظریه، با داشتن یک عمل گروه لی روی یک G -خمینه همیلتونی و با در نظر گرفتن یک سطح تراز از نگاشت تکانی و یک عمل آزاد و سره از زیرگروه پایاگر روی آن، یک خمینه‌ی خارج قسمتی جدید معرفی می‌شود. برای تاریخچه این نظریه می‌توان به منبع [۱۵] مراجعه کرد. فروکاست هممتافته ابتدا برای خمینه‌هایی که دارای دو فرم بسته هستند ولی این دو فرم لزوماً ناتباهیده نیست، گسترش یافت [۱۶]. در ادامه کارشون و همکاران با استفاده از نگاشت تکانی مجرد که در مقاله [۱۷] معرفی نمودند، مفهوم فروکاست را برای خمینه‌هایی که لزوماً مجهز به ۲-فرم بسته و ناتباهیده نیستند، تعمیم بخشیدند [۱۸]. آن‌ها همچنین از این تعریف برای گسترش رابطه هم‌مرزی برای خمینه‌هایی که لزوماً فشرده نیستند، استفاده کردند. مهمترین هدف در تعریف k -نگاشت تکانی تعمیم مفاهیم فروکاست و استفاده از آن برای محاسبه برخی از گروه‌های کوهومولوژی همورد است. در واقع تعمیم قضیه فروکاست به ما کمک می‌کند تا بُعد یک فضا را بیشتر کاهش دهیم و از این رو با استفاده از یکرختی که بین گروه‌های کوهولوژی دورام فضای کاهش یافته و کوهومولوژی همورد سطح تراز k -نگاشت‌های تکانی است، محاسبه ساده تری داشته باشیم. برای اطلاعات بیشتر از مفاهیم کوهومولوژی همورد می‌توانید به منابع [۲۰، ۱۹] مراجعه کنید.

قضیه ۱-۲: خمینه هموار M با k -نگاشت تکانی $\mu: M \rightarrow T^k(g^*)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $v \in T^k(g^*)$ یک مقدار منظم نگاشت μ باشد و زیرگروه پایاگر G_v تحت عمل هم‌الحاقی $Ad^\#$ روی $T^k(g^*)$ به صورت آزاد و سره بر $\mu^{-1}(v)$ عمل کند، آنگاه:

$$(۱) \text{ فضای مداری } M_v := \frac{\mu^{-1}(v)}{G_v} \text{ یک خمینه هموار یا بُعد زیر است.}$$

$$\dim M_v = \dim M - (\dim G)^k - \dim G_v.$$

(۲) نگاشت خارج قسمتی $\mu^{-1}(v) \rightarrow M_v$ یک G -کلاف اساسی است.

(۳) به ازای هر $k \in \mathbb{N}$ داریم:

$$H_G^k(\mu^{-1}(v)) = H_{dR}^k(M_v).$$

برای برهان این قضیه می‌توانید به منبع [۱۲] مراجعه کنید. در حالت خاص اگر v مقدار منظم μ باشد که تحت عمل هم‌الحاق ثابت است، آنگاه M_v یک خمینه هموار با بُعد

$$\dim M - (\dim G)^k - \dim G$$

خواهد بود. توجه کنید صفر تنها نقطه‌ای از $T^k(g^*)$ است که همواره تحت عمل هم‌الحاق ثابت است. در حالت کلی اگر G به صورت سره و موضوعی آزاد روی زیر خمینه $\mu^{-1}(v)$ عمل کند، آنگاه فضای کاهش یافته M_v اربیفلد است و نگاشت π_v نیز یک G -اُربی-کلاف اصلی می‌باشد. (رجوع کنید به منبع [۱۸] پیوست ب). مورد

سوم از قضیه بالا کمک می‌کند تا با استفاده از این یکریختی، محاسبه ساده‌تری برای برخی از گروه‌های کوهومولوژی همورد داشته باشیم.

۳- عمل گروه خارج قسمتی و k -نگاشت تکانی آن

G -خمینه‌ی هموار M را با عمل آزاد و سره φ در نظر بگیرید. فرض کنید این عمل دارای k -نگاشت تکانی $\mu: M \rightarrow T^k(\mathfrak{g}^*)$ است و N زیرگروه نرمال بسته G باشد. یک سوال طبیعی در این رابطه این است که اگر $\nu \in T^k(\mathfrak{n}^*)$ یک مقدار منظم نگاشت $i^* \circ \mu$ (معرفی شده در گزاره ۴,۱) باشد، آیا عمل گروه خارج قسمتی روی G_ν / N_ν خمینه‌ی کاهش یافته M_ν دارای k -نگاشت تکانی است؟ پاسخ به این سوال می‌تواند به این مسئله کمک کند، که آیا می‌توان عملیات فروکاست روی یک خمینه توسط k -نگاشت تکانی را طی دو مرحله انجام داد؟ ابتدا به وسیله N و سپس توسط G/N .

تعریف ۳-۱: فرض کنید $i: N \rightarrow G$ نگاشت شمول باشد. چون N زیرگروه نرمال G است، پس گروه لی G توسط عمل مزدوج $C: L_g \circ L_{g^{-1}}: N \rightarrow N$ بر N عمل می‌کند و لذا مشتق این عمل در نقطه همانی یک عمل از G بر روی $\mathfrak{n}$ است که به ازای هر $g \in G$ به صورت:

$$(C_g)_e(X) := \text{Ad}_g i^*(X)$$

تعریف می‌شود. در این صورت نمایش G روی $\mathfrak{n}^*$ به ازای هر $g \in G$ به صورت زیر خواهد بود:

$$(C_{g^{-1}}^*)_e(\nu) = (C_{g^{-1}})_e(i^*(\eta)) = i^*(\text{Ad}_{g^{-1}}^\# \eta),$$

که در آن $\eta \in \mathfrak{g}^*$ و $i^*(\eta) = \nu$.

لم ۳-۲: k -نگاشت تکانی $\mu_N := i^* \circ \mu$ ، همورد است.

برهان: نشان می‌دهیم به ازای هر $g \in G$ و $q \in M$ نمودار زیر جابه‌جایی است.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\mu_N} & T^k(\mathfrak{n}^*) \\ \varphi_g \downarrow & & \downarrow (C_{g^{-1}}^*)_e \\ M & \xrightarrow{\mu_N} & T^k(\mathfrak{n}^*) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \mu_N \circ \varphi_g(q) &= i^* \circ \mu \circ \varphi_g(q) \\ &= i^*(\mu_N \circ \varphi_g(q)) \\ &= i^*(\text{Ad}_{g^{-1}}^\# \circ \mu(q)) \\ &= (C_{g^{-1}}^*)_e \circ \mu_N(q). \end{aligned}$$

ملاحظه ۳-۳:

(۱) زین پس، عمل هم‌الحاق G روی $\mathfrak{g}^*$ را با نماد $\text{Ad}_{g^{-1},G}^\#$ و عمل هم‌الحاق N روی $\mathfrak{n}^*$ را با نماد $\text{Ad}_{g^{-1},N}^\#$ نمایش می‌دهیم. در این صورت نمایش G روی $\mathfrak{n}^*$ به ازای هر $g \in G$ به صورت $i^*(\text{Ad}_{g^{-1},G}^\# \eta)$ بازنویسی می‌شود. همچنین به ازای هر $n \in N$ و $\eta \in \mathfrak{g}^*$ خواهیم داشت:

$$i^*(\text{Ad}_{n^{-1},G}^\# \eta) = \text{Ad}_{n^{-1},N}^\# i^*(\eta).$$

(۲) چون N زیرگروه نرمال G است، پس عمل الحاقی از G روی جبر لی آن، زیر جبر $\mathfrak{n}$ را ثابت نگه می‌دارد و بنابراین یک عمل دوگان از G روی $\mathfrak{n}^*$ القا می‌کند. از طرفی با توجه به ساختار، نگاشت $i: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{n}$ با عمل G روی دامنه و $\mathfrak{g}$ همورد است. بنابراین نگاشت $i^*: \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{n}^*$ با توجه به دوگان عمل G ، همورد است، زیرا زیرگروه نرمال G است و عمل الحاقی N روی $\mathfrak{n}$ با تحدید عمل G روی $\mathfrak{n}$ به زیرگروه N منطبق است. پس می‌توان نتیجه گرفت که تحدید عمل G روی $\mathfrak{n}^*$ به زیرگروه N منطبق با عمل هم‌الحاقی N روی $\mathfrak{n}^*$ است. اکنون فرض کنید $\nu \in T^k(\mathfrak{n}^*)$ یک مقدار از نگاشت μ_N باشد. این مقدار با توجه به عمل آزاد و سره N منظم خواهد بود. در این صورت خمینه کاهش‌یافته توسط k -نگاشت تکانی μ_N به صورت $M_\nu = \mu_N^{-1}(\nu)/N_\nu$ خواهد بود که در آن N_ν زیرگروه‌های پایاگر از ν برای عمل هم‌الحاقی از N روی دوگان جبر لی خودش باشد. همچنین $\pi_\nu: \mu_N^{-1}(\nu) \rightarrow M_\nu$ را نگاشت تصویر طبیعی و $i_\nu: \mu_N^{-1}(\nu) \rightarrow M$ نگاشت شمول در نظر می‌گیریم.

لم ۳-۴: زیرگروه پایاگر $N_\nu \subseteq G$ در G_ν نرمال است.

برهان: فرض کنید G_ν زیرگروه پایاگر $\nu \in T^k(\mathfrak{n}^*)$ برای عمل G روی $T^k(\mathfrak{n}^*)$ باشد، با توجه به ملاحظه ۳،۳ و نرمال بودن N در G داریم: $N_\nu = G_\nu \cap N$ ، که در آن N_ν زیرگروه پایاگر ν تحت عمل هم‌الحاقی N روی $\mathfrak{n}^*$ است. چون اشتراک یک زیرگروه نرمال N با زیرگروه دیگر، در آن زیرگروه نرمال است، بنابراین $N_\nu \subseteq G_\nu$ در G_ν نرمال است.

اکنون می‌توانیم عمل گروه لی خارج‌قسمتی G_ν/N_ν را بر روی خمینه کاهش‌یافته M_ν در نظر بگیریم. این گروه خارج‌قسمتی در ادامه نقش مهمی در تعریف k -نگاشت تکانی بر روی M_ν ایفا می‌کند.

گزاره ۳-۵: عمل $\Phi: \frac{G_\nu}{N_\nu} \times M_\nu \rightarrow M_\nu$ خوش تعریف است.

برهان: ابتدا با توجه به همورد بودن نگاشت‌های μ و i^* ، درمی‌یابیم که عمل G_ν مجموعه‌ی ناورد $\mu^{-1}(\nu)$ را حفظ می‌کند. این عمل را با φ^ν نشان می‌دهیم. در این صورت به ازای هر $g \in G_\nu$ عمل Φ را به‌گونه‌ای تعریف می‌کنیم که نمودار زیر جابه‌جایی باشد و لذا خوش تعریف نیز خواهد بود.

$$\begin{array}{ccc} \mu^{-1}(\nu) & \xrightarrow{\pi_\nu} & M_\nu \\ \varphi_g^\nu \downarrow & & \downarrow \Phi_{[g]} \\ \mu^{-1}(\nu) & \xrightarrow{\pi_\nu} & M_\nu \end{array}$$

سره و آزاد بودن این عمل در لم ۵،۲،۱ مرجع [۱۵] اثبات شده است. همچنین چون عمل φ^ν تحدید عمل G به G_ν است، پس به ازای هر $g \in G_\nu$ نمودار زیر نیز جابه‌جایی است.

$$\begin{array}{ccc} \mu^{-1}(\nu) & \xrightarrow{i_\nu} & M \\ \varphi_g^\nu \downarrow & & \downarrow \varphi_g \\ \mu^{-1}(\nu) & \xrightarrow{i_\nu} & M \end{array}$$

در ادامه نشان می‌دهیم k -نگاشت تکانی برای عمل Φ روی خمینه کاهش یافته M_ν وجود دارد. این نگاشت را

با $\mu_\nu : M_\nu \rightarrow T^k(\frac{\mathfrak{g}^*}{\mathfrak{n}^*})^*$ نمایش می‌دهیم و به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که نمودار زیر جابه‌جایی باشد،

$$\begin{array}{ccccc} \mu^{-1}(\nu) & \xrightarrow{i_\nu} & M & \xrightarrow{\mu} & T^k(\mathfrak{g}^*) \\ \downarrow \pi_\nu & & \downarrow \mu_N & & \downarrow \kappa_\nu^* \\ & & \nu \in T^k(\mathfrak{n}^*) & & \bar{\nu} \in T^k(\mathfrak{g}_\nu^*) \\ & & & & \uparrow r_\nu'^* \\ M_\nu & \xrightarrow{\mu_\nu} & T^k(\frac{\mathfrak{g}_\nu^*}{\mathfrak{n}_\nu^*})^* & & \end{array}$$

که در آن نگاشت‌های r_ν ، r_ν' و κ_ν به صورت زیر هستند:

$$r_\nu : G_\nu \rightarrow \frac{G_\nu}{N_\nu}$$

$$r_\nu : G_\nu \rightarrow \frac{G_\nu}{N_\nu}$$

$$\kappa_\nu : \mathfrak{g}_\nu \rightarrow \mathfrak{g}$$

همچنین $\bar{\nu}$ توسیع نگاشت $\nu|_{\mathfrak{n}_\nu}$ به $\mathfrak{g}_\nu$ است. به طور معادل می‌توان μ_ν را برای هر $q \in \mu_N^{-1}(\nu)$ ،

$$X = (X_1, \dots, X_k) \in \underbrace{\mathfrak{g}_\nu \times \dots \times \mathfrak{g}_\nu}_{k \text{ times}}$$

و $\nu \in T^k(\mathfrak{n}^*)$ به صورت زیر تعریف کرد:

$$\mu_\nu^{[X]}([q]) = \mu^X(q) - \bar{\nu}(X) \quad (۱)$$

که در آن $[q] = \pi_\nu(q)$ و $[X] = r_\nu'(x)$ است. برای اثبات خوش تعریفی این نگاشت نیاز به لم زیر است که در مرجع [۱۵] اثبات شده است.

لم ۳-۶: فرض کنید G یک گروه لی و N زیرگروه نرمال آن باشد. در این صورت به ازای هر $n \in N$ و $X \in \mathfrak{g}$ داریم:

$$Ad_n(X) - X \in \mathfrak{n}.$$

قضیه ۳-۷: k -نگاشت تکانی μ_ν ، خوش تعریف است.

برهان: ابتدا ثابت می‌کنیم که تعریف μ_ν مستقل از انتخاب X است. برای این کار کافی است ثابت کنیم اگر $X = (X_1, \dots, X_k) \in \underbrace{\mathfrak{n}_\nu \times \dots \times \mathfrak{n}_\nu}_{k \text{ times}}$ ، آنگاه طرف راست فرمول (۱) برابر صفر است. چون به ازای هر

$$q \in \mu_N^{-1}(\nu) \text{ و } X \in \underbrace{\mathfrak{n}_\nu \times \dots \times \mathfrak{n}_\nu}_{k \text{ times}} \text{ داریم } \mu^X(q) = \mu_N^X(q) = \nu(X) \text{ پس:}$$

$$\begin{aligned} \mu^X(q) - \bar{\nu}(X) &= \mu_N^X(q) - \nu(X) \\ &= \nu(X) - \nu(X) = 0 \end{aligned}$$

اکنون ثابت می‌کنیم این تعریف مستقل از انتخاب کلاس $[q]$ است. کافی است نشان دهیم برای هر $n \in N_\nu$ داریم $\mu^X(\varphi_n(q)) = \mu^X(q)$. این تساوی با توجه به G -همورد بودن نگاشت μ معادل است با:

$$\begin{aligned}\mu^X(\varphi_n(q)) &= Ad_n^\# \circ \mu^X(q) \\ &= \mu(q)(Ad_{n^{-1}}(X)) \\ &= \mu^X(q),\end{aligned}$$

یا به عبارت دیگر به ازای هر عضو $n \in N_\nu$

$$\mu(q)(Ad_{n^{-1}}(X) - X) = 0$$

است. چون $X = \underbrace{\mathfrak{g}_\nu \times \dots \times \mathfrak{g}_\nu}_{k \text{ times}}$ و N_ν در G_ν نرمال است، پس با توجه به لم ۳، ۶،

$Ad_{n^{-1}}(X) - X \in \mathfrak{n}_\nu$ خواهد بود. از طرفی چون $q \in \mu_N^{-1}(\nu)$ پس تساوی فوق برابر $\nu(Ad_{n^{-1}}(X) - X) = 0$ خواهد بود. برای اثبات این تساوی با در نظر گرفتن مقدارهای ثابت X و q ، نشان می‌دهیم تابع $f: N_\nu \rightarrow \mathbb{R}$ که به صورت $f(n) = \nu(Ad_{n^{-1}}(X) - X)$ تعریف می‌شود، متحد صفر است. ابتدا توجه داشته باشید که $f(e) = 0$ است. همچنین دیفرانسیل تابع f در نقطه همانی در جهت $\eta \in \mathfrak{n}_\nu$ به دلیل اینکه $ad_\eta^\#(\nu) = 0$ برابر صفر است.

$$(df)_e(\eta) = \nu(-ad_\eta(X)) = -ad_\eta^\#(\nu)(X) = 0.$$

در پایان نشان می‌دهیم تابع f هم‌ریختی گروهی است:

$$\begin{aligned}f(n_1 n_2) &= \nu(Ad_{(n_1 n_2)^{-1}}(X) - X) \\ &= \nu(Ad_{n_2^{-1}} \circ Ad_{n_1^{-1}}(X) - X) \\ &= \nu(Ad_{n_2^{-1}} \circ Ad_{n_1^{-1}}(X) - Ad_{n_2^{-1}}(X) \\ &\quad - Ad_{n_2^{-1}}(X) + Ad_{n_2^{-1}}(X) - X) \\ &= \nu(Ad_{n_2^{-1}} \circ Ad_{n_1^{-1}}(X) - Ad_{n_2^{-1}}(X)) \\ &\quad + \nu(Ad_{n_2^{-1}}(X) - X) \\ &= Ad_{n_2}^\# \nu(Ad_{n_1^{-1}}(X) - X) + f(n_2) \\ &= \nu(Ad_{n_1^{-1}}(X) - X) + f(n_2) \\ &= f(n_1) + f(n_2).\end{aligned}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$(df)_e = (df)_{n_2} \circ T_e R_{n_2} = 0$$

و لذا df بر روی N_ν صفر است. از طرفی چون N_ν همبند است پس تابع f متحد صفر می‌باشد. این محاسبات نشان می‌دهد k -نگاشت تکانی μ_ν ، خوش تعریف است.

۴- نتیجه گیری

در این مقاله با نظر گرفتن ملاحظات توپولوژیکی نگاشت تکانی و تعمیم فضای هم‌دامنه‌ی آن به تعریف k -نگاشت تکانی و فروکاست توسط این نگاشت‌ها پرداختیم. سپس ثابت کردیم اگر N یک زیرگروه نرمال از گروه لی G و M_μ خمینه کاهش یافته توسط k -نگاشت تکانی μ در مقدار منظم ν باشند، آنگاه این خمینه به همراه عمل خارج قسمتی G_ν/N_ν دارای یک k -نگاشت تکانی است. اثبات این موضوع به ما کمک می‌کند، تا این موضوع

را بررسی کنیم که آیا عملیات فروکاست توسط k -نگاشت تکانی را می توان طی دو مرحله، ابتدا به وسیله N و سپس توسط G/N انجام داد؟ همچنین از دیگر موضوعاتی که می توان در این حوزه به آن پرداخت این است که آیا می توان فروکاست توسط k -نگاشت تکانی را به وسیله دو عمل که جابه جایی هستند، انجام داد؟ در حالت کلی تر که دو عمل جابه جایی نباشند، این سوال را می توان مطرح کرد که آیا فروکاست را می توان توسط عمل حاصل ضرب نیم مستقیم این دو گروه طی دو مرحله انجام داد؟

فهرست منابع

- [1] Arnol'd, Vladimir Igorevich. Mathematical methods of classical mechanics, vol. 60. Springer Science & Business Media, 2013.
- [2] Greiner, Walter. Classical mechanics: systems of particles and Hamiltonian dynamics. Springer Science & Business Media, 2009.
- [3] Abraham, Ralph, Marsden, Jerrold E, and Marsden, Jerrold E. Foundations of mechanics, vol. 36. Benjamin/ Cummings Publishing Company Reading, Massachusetts, 1978.
- [4] Audin, Michèle, Da Silva, Ana Cannas, and Lerman, Eugene. Symplectic geometry of integrable Hamiltonian systems. Birkhäuser, 2012.
- [5] Ortega, Juan-Pablo and Ratiu, Tudor S. Momentum maps and Hamiltonian reduction, vol. 222. Springer Science & Business Media, 2013.
- [6] Marsden, Jerrold E and Ratiu, Tudor S. Introduction to mechanics and symmetry: a basic exposition of classical mechanical systems, vol. 17. Springer Science & Business Media, 2013.
- [7] Hofer, Helmut and Zehnder, Eduard. Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics. Birkhäuser, 2012.
- [8] Dwivedi, Shubham, Herman, Jonathan, Jeffrey, Lisa C, and Van den Hurk, Theo. Hamiltonian Group Actions and Equivariant Cohomology. Springer, 2019.
- [9] Ma, Xiaonan and Zhang, Weiping. Geometric quantization for proper moment maps. *Comptes Rendus Mathematique*, 347(7-8):389–394, 2009.
- [10] Kostant, B. Orbits, symplectic structures and representation theory proc. in USJapan Seminar in Differential Geometry (Kyoto, 1965)", Nippon Hyoronsha, Tokyo, p. 71, 1966.
- [11] Souriau, JM. Structure des systèmes dynamiques, dunod, paris, 1970. MR, 41:4866, 1970.
- [12] Dara, M and Dehghan Nezhad, A. On the k -ary moment map. *International Journal of Industrial Mathematics*, 13(1):53–61, 2021.
- [13] Meyer, Kenneth R. Symmetries and integrals in mechanics. in *Dynamical systems*, pp. 259–272. Elsevier, 1973.
- [14] Marsden, Jerrold and Weinstein, Alan. Reduction of symplectic manifolds with symmetry. *Reports on mathematical physics*, 5(1):121–130, 1974.
- [15] Marsden, Jerrold E, Misiolek, Gerard, Ortega, Juan-Pablo, Perlmutter, Matthew, and Ratiu, Tudor S. Hamiltonian reduction by stages. Springer, 2007.
- [16] De Nicola, Antonio and Esposito, Chiara. Reduction of pre-hamiltonian actions. *Journal of Geometry and Physics*, 115:178–190, 2017.
- [17] Karshon, Yael. Moment maps and noncompact cobordisms. *Journal of Differential Geometry*, 49(1):183–201, 1998.
- [18] Guillemin, Victor, Ohsawa, TL, Karshon, Yael, and Ginzburg, Viktor L. Moment maps, cobordisms, and Hamiltonian group actions. no. 98. American Mathematical Soc., 2002.

[19] Guillemin, Victor W and Sternberg, Shlomo. Supersymmetry and equivariant de Rham theory. Springer Science & Business Media, 2013.

[20] Tu, Loring W. Introductory Lectures on Equivariant Cohomology. Princeton University Press, 2020.