دسترسی در سایتِ **http://jnrm.srbiau.ac.ir**
سال چهارم، شماره سیزدهم، بهار ۱۳۹۷
شماره شاپا: ۵۸۸X-۲۵۸۸
پژوهش‌های نوین در ریاضی
دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

یک رویکرد جدید مبتنی بر تحلیل پوششی داده‌ها با مرز دوگانه برای رتبه‌بندی قواعد کشف شده از داده‌کاوی

حسین عزیزی*

استادیار، گروه ریاضی، واحد پارس‌آباد مغان، دانشگاه آزاد اسلامی، پارس‌آباد مغان، ایران.

تاریخ دریافت مقاله: ۹۶/۰۴/۰۸ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۰۳/۱۰

چکیده

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) یک رویکرد نسبتاً جدید با ماهیت داده‌ای برای ارزیابی عملکرد مجموعه‌ای از موجودیت‌های همتا به نام واحدهای تصمیم‌گیری (DMUها) است که چندین ورودی را به چندین خروجی تبدیل می‌کنند. DEA در دوره‌ی زمانی نسبتاً محدودی تبدیل به ابزار کمّی و تحلیلی قدرتمندی برای اندازه‌گیری و ارزیابی عملکرد شده است. در مقاله‌ای به قلم طلوع و همکاران [۵]، آنها یک مدل DEAی جدید برای پیدا کردن کارآترین قاعده‌ی ارتباطی در داده‌کاوی پیشنهاد کردند. آنگاه، با استفاده از این مدل، الگوریتمی برای رتبه‌بندی قواعد ارتباطی با در نظر گرفتن معیارهای متعدد ایجاد کردند. در این مقاله، ما نشان می‌دهیم که مدل آنها تنها یک قاعده‌ی ارتباطی کارآی خوشبینانه را به طور شانسی انتخاب می‌کند و کاملاً وابسته به روش حل یا برنامه‌ی نرم‌افزاری است که برای حل مسئله استفاده می‌شود. به علاوه، نشان داده می‌شود که الگوریتم پیشنهادی آنها تنها می‌تواند قواعد کارآی خوشبینانه را به طور تصادفی رتبه‌بندی کند، و قادر به رتبه‌بندی DMUهای غیرکارآی خوشبینانه نیست. همچنین، به معایب دیگری در این مقاله، اشاره می‌کنیم و رویکرد جدید «DEA با مرز دوگانه» را برای ایجاد یک رتبه‌بندی کامل قواعد ارتباطی پیشنهاد می‌کنیم. یک مثال عددی برخی از محتویات مقاله را توضیح خواهد داد.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها؛ داده‌کاوی؛ کارآیی‌های خوشبینانه و بدبینانه؛ عملکرد کلی.

---

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: azizhossein@gmail.com

۱- مقدمه

در تصمیم‌گیری چندمعیاری، هر گزینه بر مبنای تعدادی معیارهای مختلف ارزیابی می‌شود. یک راه‌حل متداول برای یک مسئله‌ی چندمعیاری به دست آوردن وزن‌های معیارها و استفاده از مجموع وزنی معیارها به عنوان نمره‌ی هر گزینه است. این نمرات را می‌توان برای رتبه‌بندی گزینه‌ها یا انتخاب یکی از آنها که نمره‌ی بزرگ‌تری دارد به عنوان تصمیم نهایی استفاده کرد. سؤال مهم در اینجا آن است که این وزن‌ها را چگونه به دست آوریم. برای این منظور، روش‌های زیادی وجود دارند؛ یکی از آنها تحلیل پوششی داده‌ها[2](DEA) است، یک روش مبتنی بر برنامه‌ریزی ریاضی که به وسیله‌ی Charnes و همکاران [۱] معرفی شده است. DEA از مطلوب‌ترین وزن‌های متناظر با هر واحد تصمیم‌گیری[3](DMU) برای به دست آوردن نمرات استفاده می‌کند.

داده‌کاوی به بهره‌گیری از ابزارهای تجزیه و تحلیل داده‌ها به منظور کشف الگوها و روابط معتبری که تاکنون ناشناخته بوده‌اند اطلاق می‌شود. این ابزارها ممکن است مدل‌های آماری، الگوریتم‌های ریاضی و روش‌های یادگیرنده باشند که کار خود را به صورت خودکار و براساس تجربه‌ای که از طریق شبکه‌های عصبی یا درخت‌های تصمیم‌گیری به دست می‌آورند بهبود می‌بخشد. در یک مقاله، Chen [۲] از DEA در یک مسئله‌ی داده‌کاوی برای ارزیابی قواعد ارتباطی با معیارهای متعدد استفاده کرد. برای این منظور، Chen [۲] از رویکرد Obata و Ishii [۳] استفاده کرد، که برای سیستم رأی‌گیری پیشنهاد شده است. در رویکرد Obata و Ishii [۳]، ابتدا از مدل DEA/AR پیشنهادی Cook و Kress [۴] برای به دست آوردن نمرات کارآیی استفاده می‌شود، و بعد مدل دیگری برای افتراق نامزدهای کاراً استفاده می‌شود. نامزدها در داده‌کاوی قواعد ارتباطی هستند (DMUها در DEA و گزینه‌ها در تصمیم‌گیری چندمعیاری)، که براساس برخی معیارها ارزیابی می‌شوند.

اخیراً، Toloo و همکاران [۵] یک رویکرد DEAی دیگر برای داده‌کاوی پیشنهاد کردند. آنها برخی از مزایای روش خود را برشمردند؛ یکی از این مزیت‌ها، ارائه‌ی یک رتبه‌بندی کامل برای قواعد ارتباطی بود، که نشان خواهیم داد که صحیح نیست. به برخی از معایب روش آنها اشاره خواهیم کرد و نشان داده خواهد شد که آلگوریتم پیشنهادی آنها تنها می‌تواند DMUهای کاراً را به طور تصادفی رتبه‌بندی کند. به علاوه، نشان داده خواهد شد که مدل مورد استفاده در آلگوریتم آنها متناظر با DMUهای غیرکاراً، نشدنی خواهد بود. به طور کلی، مدل آنها برای رتبه‌بندی DMUهای کاراً مناسب نیست، و نخواهد توانست DMUهای غیرکاراً را رتبه‌بندی کند.

به عنوان یک رویکرد مناسب رتبه‌بندی کامل برای این مسئله، ما «DEA با مرز دوگانه» را پیشنهاد می‌کنیم. DEA با مرز دوگانه دو کارآیی را برای تصمیم‌گیری در نظر می‌گیرد: یکی نسبت به مرز تولید کاراً اندازه‌گیری می‌شود و بهترین کارآیی نسبی *یا* کارآیی خوشبینانه نامیده می‌شود، و دیگری نسبت به مرز تولید ناکاراً سنجیده می‌شود و بدترین کارآیی نسبی *یا* کارآیی بدبینانه نامیده می‌شود. DEAی سنتی فقط بهترین کارآیی‌های نسبی گروهی از DMUها را ضمن اجتناب از کارآیی‌های بدبینانه اندازه‌گیری می‌کند، و بنابراین، نمی‌تواند یک سنجش کلی از DMUها ارائه دهد. با در نظر گرفتن همزمان کارآیی‌های نسبی خوشبینانه و بدبینانه، همه‌ی DMUها را می‌توان به طور کامل رتبه‌بندی کرد. مشاهده خواهد شد که رویکرد پیشنهادی رتبه‌بندی کاملی از قواعد را برای مثال تحلیل سبد بازار که توسط Chen [۲] و Toloo و همکاران [۵] استفاده شده است، ارائه می‌کند.

بقیه‌ی مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است: در قسمت ۲، مقالات مربوط به رتبه‌بندی DEA را مرور می‌کنیم. قسمت ۳، مدل DEAی Toloo و همکاران [۵] را تحلیل می‌کند و نارسایی‌های مدل آنها را نشان می‌دهد؛ قسمت ۴ DEA با مرز دوگانه را معرفی می‌کند، و مدل‌های آن را برای اندازه‌گیری کارآیی‌های خوشبینانه و بدبینانه‌ی DMUها بیان می‌کند، و یک اندازه‌ی جدید عملکرد کلی را برای رتبه‌بندی آنها پیشنهاد می‌نماید؛ قسمت ۵ کاربردی را برای نشان دادن سادگی و اثربخشی

[2] Data envelopment analysis (DEA)

[3] Decision-making unit (DMU)

استفاده از DEA با مرز دوگانه برای تحلیل سبد بازار ارائه می‌کند، و نتیجه‌گیری‌ها در قسمت ۶ ارائه می‌شود.

۲- مرور مقالات

برای رتبه‌بندی واحدهای کارآی DEA، تحقیقات زیادی انجام شده و روش‌های رتبه‌بندی متعددی در مقالات DEA پیشنهاد شده است. به عنوان مثال، Andersen و Petersen [۶] روشی را برای رتبه‌بندی واحدهای کارآی DEA پیشنهاد کردند که بعداً به نام سوپرکارآیی شناخته شد. سوپرکارآیی به معنای کارآیی DEA است که با کنار گذاشتن DMUی مورد ارزیابی از قیود مدل DEA محاسبه می‌شود، و تحقیقات زیادی درباره‌ی آن در مقالات گزارش شده است [۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱].

Sexton و همکاران [۱۲] مسئله‌ی کارآیی متقابل را برای رتبه‌بندی DMUها مورد بررسی قرار دادند. کارآیی متقابل به معنای کارآیی است که با وزن‌های مطلوب‌تر برای DMUهای دیگر ارزیابی می‌شود، و از نظر ریاضی و شهودی به طور مفصل توسط Doyle و Green [۱۳، ۱۴] مورد بررسی قرار گرفته است. یک تفسیر دیگر از کارآیی متقابل از دیدگاه تحلیل اسلک توسط Bao و همکاران [۱۵] ارائه شده است.

Sinuany-Stern و همکاران [۱۶] یک روش AHP/DEA را برای رتبه‌بندی DMUها معرفی کرده است، که در آن DEA و فرآیند تحلیل سلسله‌مراتبی (AHP)، که یک روش مشهور تصمیم‌گیری چندمعیاری ابداع شده توسط Saaty [۱۷] است، با هم ادغام شده‌اند. در این روش AHP/DEA، ابتدا DEA یک بار برای هر جفت از DMUها به صورت جداگانه اجرا می‌شود، تا یک ماتریس مقایسه‌ی دو به دو به دست آید، و سپس با استفاده از روش بردار ویژه حل می‌شود، تا یک رتبه‌بندی کامل برای همه‌ی DMUها، چه کاراً و چه غیرکاراً، حاصل شود. نشان داده شده است که رتبه‌بندی AHP/DEA و نتایج DEA برای موارد ورودی منفرد و خروجی منفرد کاملاً سازگار است.

جهانشاهلو و همکاران [۱۸] یک روش رتبه‌بندی را برای رتبه‌بندی واحدهای کارآی DEA از حیث تأثیر آنها بر واحدهای غیرکارآی DEA پیشنهاد کردند. تأثیر یک واحد کارآی DEA بر واحدهای غیرکارآی DEA با میزان تغییر کارآیی واحدهای غیرکارآی DEA قبل و بعد از کنار گذاشتن واحد کارآی DEA از مجموعه‌ی مرجع آنها اندازه‌گیری می‌شود. واحد کارآی DEA که بیشترین میزان تغییر کارآیی واحدهای غیرکارآی DEA را با حذف شدن از مجموعه‌ی مرجع آنها ایجاد می‌کند، مهم‌ترین DMU به شمار می‌رود.

از وزن‌های مشترک نیز به صورت گسترده‌ای برای رتبه‌بندی استفاده شده است. به عنوان مثال، Ganley و Cubbin [۱۹] یک مجموعه‌ی مشترک وزن‌ها را برای همه‌ی DMUها با ماکزیموم‌سازی مجموعه کارآیی‌های آنها ایجاد کردند. Roll و همکاران [۲۰، ۲۱] رویکردهای متعددی را برای تعیین یک مجموعه‌ی مشترک وزن‌ها برای همه‌ی DMUها پیشنهاد کردند، که از آن جمله است: اجرا کردن یک مدل عمومی DEA (که بدون کران است) برای به دست آوردن مجموعه‌ی وزن‌ها و سپس منظور کردن میانگین یا میانگین وزنی آنها با کارآیی‌های DEA به عنوان وزن، ماکزیموم‌سازی کارآیی میانگین برای همه‌ی DMUها، ماکزیموم‌سازی تعداد واحدهای کارآی DEA، رتبه‌بندی عوامل مختلف بر حسب یک مرتبه‌ی اهمیت، و سپس اختصاص دادن وزن‌های پایین‌تر به عوامل کم‌اهمیت‌تر و بیشترین وزن‌های ممکن به عوامل مهم.

Sinuany-Stern و همکاران [۲۲] یک رویکرد تحلیل تفکیک‌کننده‌ی خطی دومرحله‌ای را برای ایجاد وزن‌های مشترک پیشنهاد کردند. در مرحله‌ی اول، با اجرای DEA، واحدهای کارآی DEA و غیرکارآی DEA از یکدیگر افتراق داده می‌شوند. در مرحله‌ی دوم، تحلیل تفکیک کننده انجام می‌شود تا یک تابع نمره برای دو مجموعه‌ی کاراً و غیرکاراً، بر اساس ترکیب خطی همه‌ی ورودی‌ها و خروجی‌ها حاصل شود.

Friedman و Sinuany-Stern [۲۳] با استفاده از تحلیل همبستگی استاندارد برای به دست آوردن یک بردار وزن ورودی و خروجی مشترک برای همه‌ی DMUها استفاده کردند. آنها ابتدا یک متغیر مرکب ورودی را به عنوان یک ترکیب خطی از ورودی‌ها و یک متغیر مرکب خروجی را به عنوان یک ترکیب خطی از خروجی‌ها تشکیل

دادند، و سپس ضریب همبستگی بین ورودی مرکب و خروجی مرکب را ماکزیموم‌سازی کردند، و یک مجموعه‌ی مشترک وزن‌ها را به دست آوردند. کارآیی DMUها با وزن‌های مشترک به دست آمده به صورت نسبت خروجی مرکب به ورودی مرکب تعریف شد. سپس همه‌ی DMUها براساس کارآیی‌های حاصل از وزن‌های مشترک رتبه‌بندی شدند.

Sinuany-Stern و Friedman [۲۴] یک تحلیل تفکیک‌کننده‌ی غیرخطی را برای تعیین وزن‌های مشترک برای همه‌ی DMUها ارائه کردند. آنها با استفاده از DEA همه‌ی DMU را به دسته‌های کارآ و غیرکارآ تقسیم‌بندی کردند، و سپس برای جدا کردن دو گروه، یک تابع نسبت را بین ترکیب خطی خروجی‌ها و ترکیب خطی ورودی‌ها ایجاد کردند. سپس آنها با ماکزیموم‌سازی نسبت واریانس بین‌گروهی به واریانس درون‌گروهی، مجموعه‌ی مشترکی از وزن‌ها را برای همه‌ی DMUها به دست آوردند، و براساس آن، حداکثر جدایی را بین دو گروه ایجاد کردند. در نهایت، براساس وزن‌های مشترک به دست آمده، یک نمره‌ی کارآیی برای هر DMU به صورت نسبت خروجی مرکب به ورودی مرکب محاسبه شد. براساس نمرات کارآیی جدید، همه‌ی DMUها رتبه‌بندی شدند.

Liu و Peng [۲۵] یک روش تحلیل وزن‌های مشترک را ابداع کردند که هدف آن، پیدا کردن یک مجموعه‌ی مشترک وزن‌ها برای مینیمم کردن مجموع کل فاصله‌های مجازی واحدهای کارآی DEA با خط محک کارآیی، و یا ماکزیموم کردن کارآیی واحدهای کارآی DEA است، که به صورت کل مجموع وزنی خروجی‌های واحدهای کارآی DEA منهای مجموع وزنی ورودی‌های آنها تعریف می‌شود. سپس، مجموعه‌ی مشترک وزن‌ها برای محاسبه‌ی کارآیی مطلق واحدهای کارآی DEA مورد استفاده قرار گرفت، و واحدهای کارآی DEA براساس آن رتبه‌بندی شدند. در حالتی که واحدهای کارآی DEA امکان رتبه‌بندی کامل نداشتند، قیمت‌های سایه‌ی به دست آمده از یک مدل دوال برای رتبه‌بندی بیشتر مورد استفاده قرار گرفتند.

بررسی کامل‌تری از روش‌های رتبه‌بندی در DEA توسط Adler و همکاران [۲۶] ارائه شده است. بررسی این مؤلفان نشان داد که هیچکدام از روش‌های رتبه‌بندی DEA را نمی‌توان به عنوان یک راه‌حل کامل برای مسئله‌ی رتبه‌بندی و یا به عنوان علاجی برای همه‌ی مشکلات تجویز کرد.

۳- رویکرد طلوع و همکاران [۵]

با در نظر گرفتن معیارها به عنوان خروجی و قواعد ارتباطی به عنوان DMU، فرض کنید y_{rj} $(r=1,\dots,s)$ داده‌های DMUی شماره‌ی j $(j=1,\dots,n)$ و u_r $(r=1,\dots,s)$ توالی وزن‌های داده شده به معیارها باشد. مدل پیشنهادی Toloo و همکاران [۵] برای شناسایی کارآترین DMU به صورت زیر است:

(۱)

$$
\begin{aligned}
& M^* = \min M \\
& \text{s.t. } M - d_j \geq 0, \quad j=1,\dots,n, \\
& \textstyle\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} + d_j - \beta_j = 1, \quad j=1,\dots,n, \\
& \textstyle\sum_{j=1}^{n} d_j = n-1, \\
& 0 \leq \beta_j \leq 1, \quad d_j \in \{0,1\}, \quad j=1,\dots,n, \\
& u_r \geq \varepsilon, \quad r=1,\dots,s.
\end{aligned}
$$

که در اینجا ε یک مقدار بی‌نهایت‌کوچک مثبت برای جلوگیری از انتخاب وزن‌های صفر است. در اینجا، d_j یک متغیر دوگانی است و آنها ادعا می‌کنند: DMU_j کارآترین واحد است، اگر و تنها اگر $d_j = 0$. نشان خواهیم داد که متناظر با هر DMU_j کارآی خوشبینانه، می‌توانیم یک جواب بهینه برای مدل (۱) با $d_j = 0$ به دست آوریم، یعنی هر DMUی کارآی خوشبینانه را می‌توان کارآترین DMU در نظر گرفت. لذا مفهوم کارآترین DMU در مقاله‌ی آنها به خوبی تعریف نشده است.

قبل از اینکه ادعای خود را ثابت کنیم، و برای مقاصد بعدی، ابتدا مدل را ساده می‌کنیم. از قید مدل (۱)، در هر جواب شدنی، یک d_j مساوی صفر است و دیگران مساوی یک هستند. لذا از قیود $M - d_j \geq 0$ $(j=1,\dots,n)$، مقدار بهینه‌ی این مسئله برابر با یک است.

حال، باز براساس قیود، داریم $\beta_j = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} + d_j - 1$ ($j=1,\dots,n$). با جایگزین کردن β_j در مدل، حل کردن مدل (۱) معادل با تعیین یک جواب شدنی برای دستگاه زیر است:

(۲)

$$
\begin{aligned}
&0 \le \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} + d_j - 1 \le 1, \quad j=1,\dots,n,\\
&\sum_{j=1}^{n} d_j = n-1,\\
&d_j \in \{0,1\}, \quad j=1,\dots,n,\\
&u_r \ge \varepsilon, \quad r=1,\dots,s.
\end{aligned}
$$

و یا به طور معادل:

(۳)

$$
\begin{aligned}
&1-d_j \le \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} \le 2-d_j, \quad j=1,\dots,n,\\
&\sum_{j=1}^{n} d_j = n-1,\\
&d_j \in \{0,1\}, \quad j=1,\dots,n,\\
&u_r \ge \varepsilon, \quad r=1,\dots,s.
\end{aligned}
$$

با استفاده از بحث‌های قبلی، نتیجه‌ی زیر را ثابت کرده‌ایم.

نتیجه‌ی ۱: هر جواب شدنی دستگاه (۳) متناظر با یک جواب بهینه برای مدل (۱) است، و بر عکس.

اکنون، فرض کنید DMU_o یک DMUی دلخواه کارآی خوشبینانه باشد و مدل DEAی زیر را در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
&\max Z_o = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}\\
&\text{s.t.} \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} \le 1, \quad j=1,\dots,n, \qquad (۴)\\
&u_r \ge \varepsilon, \quad r=1,\dots,s.
\end{aligned}
$$

فرض کنید u_r^* ($r=1,\dots,s$) یک جواب بهینه برای این مدل باشد. از آنجا که DMU_o کارآی خوشبینانه است، برای این جواب بهینه داریم $Z_o^* = \sum_{r=1}^{s} u_r^* y_{ro} = 1$، و $\sum_{r=1}^{s} u_r^* y_{rj} \le 1$، برای j دیگر. اکنون قرار می‌دهیم $d_o = 0$، و $d_j = 1$، برای هر $j \ne o$ ، $j=1,\dots,n$. این مشخصاً یک جواب شدنی دستگاه (۳) است و بنابراین، بنا به نتیجه‌ی ۱، یک جواب بهینه برای مدل (۱) است، با قرار دادن $\beta_j = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} + d_j - 1$، $j=1,\dots,n$ ، و $M=1$. این نشان می‌دهد که بنا به مدل پیشنهادی Toloo و همکاران [۵]، همه‌ی DMUهای کارآی خوشبینانه، کارآترین DMU هستند. در واقع، ما نتیجه‌ی زیر را ثابت کرده‌ایم.

نتیجه‌ی ۲: متناظر با هر DMU_o کارآی خوشبینانه، می‌توانیم یک جواب بهینه برای مدل (۱) با $d_o = 0$ به دست آوریم. لذا بنا به تعریف Toloo و همکاران [۵]، همه‌ی DMUهای کارآی خوشبینانه را می‌توان کارآترین DMU در نظر گرفت که تعریف مناسبی نیست.

بحث‌های قبل ثابت می‌کند که روش پیشنهادی Toloo و همکاران [۵] نمی‌تواند بین DMUهای کارآی خوشبینانه افتراق قایل شود و افتراق در مقاله‌ی آنها تنها بستگی به جواب بهینه‌ی انتخاب شده از میان جواب‌های بهینه‌ی قابل انتخاب دارد. در حقیقت، اگر از نرم‌افزار متفاوتی استفاده شود یا حتی مدل یک بار دیگر به وسیله‌ی همان نرم‌افزار بررسی شود، ممکن است نتایج متفاوتی به دست آید.

اکنون به یک ایراد دیگر در این مقاله اشاره می‌کنیم. آنها الگوریتم زیر را برای رتبه‌بندی e DMUی برتر پیشنهاد کرده‌اند.

مرحله‌ی۰: فرض کنید $T = \varphi$ و e = تعداد DMUهایی که باید رتبه‌بندی شوند.

مرحله‌ی ۱: مدل زیر را حل کنید:

(۵)

$$
\begin{aligned}
&M^* = \min M\\
&\text{s.t.} \quad M - d_j \ge 0, \quad j=1,\dots,n,\\
&\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} + d_j - \beta_j = 1, \quad j=1,\dots,n,\\
&\sum_{j=1}^{n} d_j = n-1,\\
&d_j = 1, \quad \forall j \in T,\\
&0 \le \beta_j \le 1, \quad d_j \in \{0,1\}, \quad j=1,\dots,n,\\
&u_r \ge \varepsilon, \quad r=1,\dots,s.
\end{aligned}
$$

فرض کنید در جواب بهینه $d_p^* = 0$.

مرحله‌ی ۲: فرض کنید $T = T \cup \{p\}$.

مرحله‌ی ۳: اگر $|T| = e$، آنگاه توقف کنید؛ در غیر این صورت، به مرحله‌ی ۱ بروید.

حال فرض کنید که تعداد DMUهای کارآی خوشبینانه که به مقدار ε نیز بستگی دارد، k است. به طوری که قبلاً توضیح داده شد، یکی از DMUهای کارآی خوشبینانه (بسته به نرم‌افزار و در حقیقت، بسته به خوش‌شانسی آن) در دور اول به عنوان کارآترین DMU انتخاب می‌شود. بعد به طور مشابه می‌توان دید که DMUهای کارآی خوشبینانه‌ی دیگری یکی پس از دیگری انتخاب می‌شوند تا این‌که همه‌ی DMUهای کارآی خوشبینانه به طور تصادفی پس از دور $l = \min\{e,k\}$ رتبه‌بندی می‌شوند. حال اگر فرض کنیم $l = k < e$، آنگاه در دور $k+1$، باید مدل (۵) را زمانی که $d_j = 1, \forall j \in E$ حل کنیم، که در اینجا E مجموعه‌ی اندیس‌های همه‌ی DMUهای کارآی خوشبینانه است. در این حالت، مدل (۵) نشدنی است. در واقع، براساس تناقض، اگر فرض کنیم که شدنی است، آنگاه باید یک جواب شدنی برای (۵) با $d_p^* = 0$ داشته باشیم، که $p \notin E$. این بدان معنا است که ما وزن‌های مثبت برای $\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rp} \geq 1$ و $\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} \leq 1$ برای همه‌ی j دیگر داریم، که غیرممکن است، زیرا DMU_p غیرکارآی خوشبینانه است. لذا نتیجه‌ی زیر را داریم.

نتیجه‌ی ۳: آلگوریتم پیشنهادی Toloo و همکاران [۵] بعد از k دور با شکست مواجه می‌شود، که k تعداد DMUهای کارآی خوشبینانه است.

توجه: یک خطای دیگر هم در تعیین ناحیه‌ی اطمینان برای اپسیلون در مدل (۵) در Toloo و همکاران [۵] وجود دارد. در حقیقت، آن مدل باید به مدل زیر تغییر یابد:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^* = \max \varepsilon \\
&\text{s.t.} \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} \leq 1, \quad j = 1,\dots,n, \\
&u_r \geq \varepsilon, \quad r = 1,\dots,s.
\end{aligned} \tag{۶}
$$

که مقدار بهینه‌ی آن را می‌توان به آسانی به صورت $\varepsilon^* = \min_j (1/\sum_{r=1}^{s} y_{rj})$، $j = 1,\dots,n$، به دست آورد.

به طوری که توضیح داده شد، رویکرد Toloo و همکاران [۵] نمی‌تواند DMUهای کارآی خوشبینانه را به درستی رتبه‌بندی کند و در رتبه‌بندی DMUهای غیرکارآی خوشبینانه با شکست مواجه خواهد شد و در قسمت بعد، روش دیگری را برای ارائه‌ی رتبه‌بندی کامل DMUها ارائه می‌کنیم.

۴- DEA با مرز دوگانه

۴-۱- مدل DEA برای اندازه‌گیری کارآیی خوشبینانه

کارآیی خوشبینانه‌ی DMU_j نسبت به DMUهای دیگر با مدل CCR زیر سنجیده می‌شود [۱]:

(۷)

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \theta_o = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}} \\
\text{s.t.} \quad & \theta_j = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \leq 1, \quad j = 1,\ldots,n, \\
& u_r, v_i \geq 0, \quad r = 1,\ldots,s; \quad i = 1,\ldots,m,
\end{aligned}
$$

که در اینجا DMU_o به DMU تحت ارزیابی اشاره دارد، و u_r و v_i متغیرهای تصمیم هستند. با استفاده از تبدیل Charnes و Cooper [۲۷]، مدل برنامه‌ی کسری فوق را می‌توان به برنامه‌ریزی خطی (LP) زیر تبدیل کرد:

(۸)

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \theta_o = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \leq 0, \quad j = 1,\ldots,n, \\
& \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} = 1, \\
& u_r, v_i \geq 0, \quad r = 1,\ldots,s; \quad i = 1,\ldots,m.
\end{aligned}
$$

اگر مجموعه‌ای از وزن‌های مثبت u_r^* ($r = 1,\ldots,s$) و v_i^* ($i = 1,\ldots,m$) وجود داشته باشند تا $\theta_o^* = 1$ را تأمین کنند، آنگاه DMU_o کارآی DEA یا کارآی خوشبینانه نامیده می‌شود؛ در غیر این صورت، به آن غیرکارآی خوشبینانه می‌گویند. کارآیی خوشبینانه، در

مقالات DEA، کارآیی CCR نیز نامیده می‌شود. برای n DMU مختلف، مدل LP (۸) جمعاً n بار، هر بار برای یک DMU، حل می‌شود. همه‌ی DMUهای کارآی خوشبینانه یک مرز کارآیی را تشکیل می‌دهند.

۲-۴- مدل DEA برای اندازه‌گیری کارآیی بدبینانه

کارآیی بدبینانه‌ی DMU_j نسبت به DMUهای دیگر با مدل کارآیی بدبینانه‌ی زیر اندازه‌گیری می‌شود [۲۸، ۲۹]:
(۹)

$$\begin{aligned}
\min \quad & \varphi_o = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}} \\
\text{s.t.} \quad & \varphi_j = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \ge 1, \quad j = 1, \ldots, n, \\
& u_r, v_i \ge 0, \quad r = 1, \ldots, s; \quad i = 1, \ldots, m,
\end{aligned}$$

که تفاوت آن با مدل مشهور CCR (۷) در این است که در اینجا، کارآیی DMU_j نسبت به دیگران در محدوده‌ی یک یا بالاتر کمینه‌سازی می‌شود، در حالی که در آن مدل، کارآیی آن در محدوده‌ی صفر و یک بیشینه‌سازی می‌شود. با استفاده از تبدیل Charnes و Cooper [۲۷]، برنامه‌ریزی کسری (۹) فوق را می‌توان به طور هم‌ارز به مدل LP زیر تبدیل کرد:
(۱۰)

$$\begin{aligned}
\min \quad & \varphi_o = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \ge 0, \quad j = 1, \ldots, n, \\
& \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} = 1, \\
& u_r, v_i \ge 0, \quad r = 1, \ldots, s; \quad i = 1, \ldots, m.
\end{aligned}$$

زمانی که مجموعه‌ای از وزن‌های مثبت u_r^* ($r=1,\ldots,s$) و v_i^* ($i=1,\ldots,m$) وجود داشته باشد تا $\varphi_o^*=1$ را تأمین کند، می‌گوییم که DMU_o ناکارآی DEA یا ناکارآی بدبینانه است. در غیر این صورت، می‌گوییم که DMU_o غیرناکارآی بدبینانه است. مدل LP (۱۰) نیز n بار، هر بار برای یک DMU، حل می‌شود. همه‌ی DMUهای ناکارآی بدبینانه یک مرز ناکارآیی را تشکیل می‌دهند.

۳-۴- اندازه‌ی عملکرد کلی

کارآیی‌های خوشبینانه و بدبینانه از دیدگاه‌های مختلفی اندازه‌گیری می‌شوند، که منجر به دو رتبه‌بندی متفاوت برای DMUها می‌شود. لذا یک اندازه‌ی عملکرد کلی مورد نیاز است تا رتبه‌بندی کلی DMUها به دست آید. در اینجا، ما یک اندازه‌ی عملکرد کلی جدید را برای رتبه‌بندی DMUها پیشنهاد می‌کنیم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H_j = \theta_j^{*1-\alpha}\varphi_j^{*\alpha} + \theta_j^{*\alpha}\varphi_j^{*1-\alpha}, \quad j=1,\ldots,n \qquad (۱۱)$$

که در اینجا θ_j^* و φ_j^* به ترتیب کارآیی‌های خوشبینانه و بدبینانه‌ی DMU_j هستند، و $0 \le \alpha \le 1$ یک پارامتر می‌باشد. برای تعیین مقدار پارامتر α قرار می‌دهیم: $\alpha = 1/(m+s)$، که در اینجا m و s به ترتیب تعداد ورودی‌ها و خروجی‌ها هستند. روشن است که اندازه‌ی عملکرد کلی تعریف شده در (۱۱) بزرگی دو کارآیی را همزمان در نظر می‌گیرد.

برای راحتی، روشی را که عملکرد کلی هر DMU را نسبت به هر دو کارآیی خوشبینانه و بدبینانه تعیین می‌کند، روش «DEA با مرز دوگانه» می‌نامیم. مرز کارآیی مجموعه‌ای از DMUهای کارآی خوشبینانه را مشخص می‌کند که عملکرد نسبتاً خوبی دارند، در حالی که مرز ناکارآیی مجموعه‌ای از DMUهای ناکارآی بدبینانه را مشخص می‌کند که به نسبت، عملکرد ضعیف‌تری دارند. بهترین DMU را معمولاً می‌توان از میان DMUهای کارآی خوشبینانه انتخاب کرد. این را در قسمت بعد با مثال عددی نشان می‌دهیم.

۵- مثال عددی

برای نشان دادن رویکرد پیشنهادی، مثال داده‌های سبد بازار را که توسط Chen [۲] و Toloo و همکاران [۵] بررسی شده است، در نظر می‌گیریم. ما رویکرد پیشنهادی در این مقاله را به کار می‌بریم تا رتبه‌بندی کاملی از قواعد ارائه کنیم. داده‌ها در جدول ۱ خلاصه شده‌اند. در این مثال مقدار بی‌نهایت کوچک غیرارشمیدسی $\varepsilon = 10^{-4}$ منظور شده است.

۵- مثال عددی

برای نشان دادن رویکرد پیشنهادی، مثال داده‌های سبد بازار را که توسط Chen [۲] و Toloo و همکاران [۵] بررسی شده است، در نظر می‌گیریم. ما رویکرد پیشنهادی در این مقاله را به کار می‌بریم تا رتبه‌بندی کاملی از قواعد ارائه کنیم. داده‌ها در جدول ۱ خلاصه شده‌اند. در این مثال مقدار بی‌نهایت کوچک غیرارشمیدسی $\varepsilon = 10^{-4}$ منظور شده است.

تذکر: در این مثال، داریم $\varepsilon^* = \min_j \{1/\sum_{r=1}^{s} y_{rj}\} = 1/\sum_{r=1}^{s} y_{r26} = 1/780.09$. لذا در تمام مدل‌های ذکر شده در این مقاله، باید داشته باشیم $0 \le \varepsilon \le \varepsilon^*$. اگر قرار دهیم $\varepsilon = \varepsilon^*$، آنگاه به آسانی می‌توان دید که تنها DMUی کارآی خوشبینانه، DMU_{26} است. برای این مورد، مدل (۱) یک جواب شدنی یکتا (و بنابراین، بهینه) دارد: $u_r^* = \varepsilon^*$، $r = 1, \ldots, s$، $d_{26}^* = 0$، $d_j^* = 1$، $j \neq 26$، و $M^* = 1$. بنابراین، در دور دوم آلگوریتم پیشنهادی Toloo و همکاران [۵]، آنها می‌خواهند یک جواب بهینه‌ی $d_{26}^* = 1$ به دست آورند، که غیرممکن است.

جدول ۱ – داده‌های قواعد ارتباطی.

شماره‌ی قاعده‌ی ارتباطی (DMU)	خروجی‌ها				ورودی
	پشتیبانی (٪)	اطمینان (٪)	ارزش مجموعه‌ی فقرات	سود فروش متقاطع	
۱	۳,۸۷	۴۰,۰۹	۳۳۷,۰۰	۲۵,۶۶	۱
۲	۱,۴۲	۱۸,۱۷	۵۰۱,۰۰	۱۱,۶۳	۱
۳	۲,۸۳	۱۷,۶۴	۳۴۵,۰۰	۱۱,۲۹	۱
۴	۲,۳۴	۳۰,۸۳	۱۶۳,۰۰	۱۹,۷۳	۱
۵	۲,۶۳	۲۳,۹۰	۳۲۵,۰۰	۱۵,۳۰	۱
۶	۱,۱۹	۵۵,۶۵	۴۳۶,۰۰	۳۵,۶۱	۱
۷	۱,۱۹	۴۷,۴۲	۵۹۸,۰۰	۳۰,۳۵	۱
۸	۱,۱۹	۱۵,۷۰	۴۳۶,۰۰	۵۲,۹۱	۱
۹	۱,۱۹	۱۰,۸۲	۵۹۸,۰۰	۳۶,۴۵	۱
۱۰	۱,۱۹	۱۲,۳۲	۴۳۶,۰۰	۲۰,۰۸	۱
۱۱	۱,۱۹	۱۲,۳۲	۵۹۸,۰۰	۴۰,۰۴	۱
۱۲	۳,۸۷	۳۸,۰۸	۳۳۷,۰۰	۱۰۳,۹۷	۱
۱۳	۱,۱۸	۱۵,۰۹	۷۱۰,۰۰	۴۱,۱۹	۱
۱۴	۲,۴۴	۱۵,۲۲	۵۵۴,۰۰	۴۱,۵۶	۱
۱۵	۲,۱۴	۲۸,۲۱	۳۷۲,۰۰	۷۷,۰۲	۱
۱۶	۲,۵۱	۲۲,۸۱	۵۳۴,۰۰	۶۲,۲۶	۱
۱۷	۱,۱۹	۵۰,۹۲	۴۳۶,۰۰	۱۳۹,۰۲	۱
۱۸	۱,۱۹	۴۵,۲۵	۵۹۸,۰۰	۱۲۳,۵۲	۱
۱۹	۱,۱۹	۱۱,۷۰	۴۳۶,۰۰	۴۳,۵۴	۱
۲۰	۱,۱۹	۱۱,۷۰	۵۹۸,۰۰	۶۲,۵۰	۱
۲۱	۱,۴۲	۱۳,۹۹	۵۰۱,۰۰	۶۱,۱۶	۱
۲۲	۱,۱۸	۱۲,۲۳	۷۱۰,۰۰	۵۳,۴۵	۱
۲۳	۱,۵۰	۱۳,۶۴	۶۹۸,۰۰	۵۹,۵۹	۱
۲۴	۲,۸۳	۲۷,۸۲	۳۴۵,۰۰	۷۸,۱۷	۱
۲۵	۲,۴۴	۲۵,۲۷	۵۵۴,۰۰	۷۱,۰۰	۱
۲۶	۱,۲۵	۱۵,۹۷	۷۱۸,۰۰	۴۴,۸۷	۱
۲۷	۱,۲۲	۳۴,۸۹	۳۳۹,۰۰	۹۸,۰۴	۱
۲۸	۱,۳۰	۳۵,۱۲	۴۳۵,۰۰	۹۸,۶۸	۱
۲۹	۱,۴۲	۳۳,۸۱	۵۳۴,۰۰	۹۵,۰۱	۱
۳۰	۱,۹۱	۲۵,۲۶	۳۸۰,۰۰	۷۰,۹۷	۱
۳۱	۱,۴۳	۳۷,۱۴	۶۱۸,۰۰	۱۰۴,۳۵	۱
۳۲	۲,۳۸	۲۱,۶۳	۵۴۲,۰۰	۶۰,۷۸	۱
۳۳	۱,۱۸	۳۰,۲۴	۳۶۶,۰۰	۸۴,۹۸	۱
۳۴	۱,۲۳	۲۹,۳۶	۶۲۶,۰۰	۸۲,۵۱	۱
۳۵	۱,۵۸	۲۲,۶۵	۳۵۴,۰۰	۶۳,۶۴	۱
۳۶	۲,۳۴	۲۲,۹۹	۱۶۳,۰۰	۲۲,۷۶	۱
۳۷	۲,۱۴	۲۲,۱۴	۳۷۲,۰۰	۲۱,۹۲	۱
۳۸	۱,۹۱	۱۱,۹۴	۳۸۰,۰۰	۱۱,۸۲	۱
۳۹	۲,۰۳	۱۸,۴۲	۳۶۰,۰۰	۱۸,۲۳	۱
۴۰	۱,۱۹	۳۰,۷۳	۴۳۶,۰۰	۳۰,۴۳	۱
۴۱	۲,۶۳	۲۵,۸۷	۳۲۵,۰۰	۶۷,۵۲	۱
۴۲	۲,۵۱	۲۵,۹۸	۵۳۴,۰۰	۶۷,۸۱	۱
۴۳	۱,۵۰	۱۹,۱۶	۶۹۸,۰۰	۵۰,۰۲	۱
۴۴	۲,۳۸	۱۴,۸۵	۵۴۲,۰۰	۳۸,۷۵	۱
۴۵	۲,۰۳	۲۶,۷۳	۳۶۰,۰۰	۶۹,۷۸	۱
۴۶	۱,۱۹	۳۰,۷۳	۵۹۸,۰۰	۸۰,۲۲	۱

با اجرای مدل‌های DEAی (۸) و (۱۰) به ترتیب برای هر قاعده‌ی ارتباطی، کارآیی‌های خوشبینانه و بدبینانه‌ی ۴۶ قاعده‌ی ارتباطی را به دست می‌آوریم، و سپس آنها را با استفاده از معادله‌ی (۱۱) تجمعی می‌کنیم تا نمره‌ی عملکرد کلی هر قاعده‌ی ارتباطی به دست آید. نتایج در جدول ۲ نشان داده شده است، که با مراجعه به آن، مشاهده می‌شود که قاعده‌ی ارتباطی شماره‌ی ۱۲ بهترین عملکرد کلی را دارد. این نشان می‌دهد که اندازه‌ی عملکرد کلی تعریف شده با معادله‌ی (۱۱) توجیه خوبی برای رتبه‌بندی قاعده‌ی ارتباطی بدون نیاز به محاسبات زیاد است. این بزرگ‌ترین مزیت DEA با مرز دوگانه نسبت به روش‌های دیگر برای رتبه‌بندی قاعده‌ی ارتباطی است. مزیت دیگر روش پیشنهادی ما آن است که این روش می‌تواند همه‌ی قواعد ارتباطی را رتبه‌بندی کند.

این نکته نیز شایان توجه است که همیشه نمی‌توان همه‌ی واحدهای کارآی خوشبینانه را بالاتر از واحدهای غیرکارآی خوشبینانه رتبه‌بندی کرد. وقتی که کارآیی بدبینانه در نظر گرفته می‌شود، برخی از واحدهای کارآی خوشبینانه ممکن است نمره‌ی کارآیی پایین‌تری نسبت به واحدهای غیرکارآی خوشبینانه دریافت کنند. این امر بر اساس تحقیقات قبلی صحیح است [۲۳–۲۵، ۳۰].

جدول ۲ - ارزیابی ۴۶ قاعده‌ی ارتباطی با استفاده از DEA با مرز دوگانه.

شماره‌ی قاعده‌ی ارتباطی (DMU)	کارآیی خوشبینانه	کارآیی بدبینانه	عملکرد کلی	رتبه‌بندی
۱	۱٫۰۰۰۰	۱٫۵۱۳	۲٫۴۷۹۰	۵
۲	۰٫۷۷۶۸	۱٫۰۰۰۰	۱٫۷۷۰۷	۳۶
۳	۰٫۸۲۹۸	۱٫۰۰۰۰	۱٫۸۳۳۱	۳۴
۴	۰٫۷۰۰۹	۱٫۰۰۰۰	۱٫۶۹۴۱	۴۱
۵	۰٫۷۷۷۱	۱٫۰۸۸۷	۱٫۸۵۵۶	۳۲
۶	۱٫۰۰۰۰	۱٫۰۰۷۵	۲٫۰۰۲۳	۲۳
۷	۱٫۰۰۰۰	۱٫۰۲۱۸	۲٫۰۰۴۱	۱۹
۸	۰٫۶۸۵۴	۱٫۰۰۴۹	۱٫۶۶۸۴	۴۳
۹	۰٫۸۴۶۴	۱٫۰۰۰۰	۱٫۸۴۳۴	۳۳
۱۰	۰٫۶۶۴۱	۱٫۰۰۰۰	۱٫۶۴۴۶	۴۵
۱۱	۰٫۸۴۶۹	۱٫۰۱۸۲	۱٫۸۴۸۰	۳۱
۱۲	۱٫۰۰۰۰	۱٫۷۵۴۰	۲٫۶۸۱۴	۱
۱۳	۰٫۹۸۸۵	۱٫۰۲۲۹	۱٫۹۸۸۸	۲۱
۱۴	۰٫۹۹۴۷	۱٫۳۰۲۴	۲٫۲۸۶۹	۷
۱۵	۰٫۷۸۲۳	۱٫۲۶۵۶	۲٫۰۰۹۵	۲۲
۱۶	۰٫۹۸۷۳	۱٫۵۳۰۳	۲٫۴۸۰۵	۴
۱۷	۱٫۰۰۰۰	۱٫۰۲۲۵	۲٫۰۰۸۵	۱۸
۱۸	۱٫۰۰۰۰	۱٫۰۳۶۶	۲٫۰۰۸۵	۱۶
۱۹	۰٫۶۶۷۷	۱٫۰۰۰۰	۱٫۶۴۶۳	۴۴
۲۰	۰٫۸۷۸۱	۱٫۰۱۸۱	۱٫۸۷۹۵	۳۰
۲۱	۰٫۷۹۴۱	۱٫۱۶۷۷	۱٫۹۳۸۳	۲۵
۲۲	۱٫۰۰۰۰	۱٫۰۲۲۷	۲٫۰۰۰۰	۱۷
۲۳	۱٫۰۰۰۰	۱٫۲۴۰۶	۲٫۲۳۱	۹
۲۴	۰٫۸۳۷۶	۱٫۴۱۹۰	۲٫۲۰۴۶	۱۲
۲۵	۰٫۹۹۸۸	۱٫۵۸۵۲	۲٫۵۴۰۳	۲
۲۶	۱٫۰۰۰۰	۱٫۰۸۰۲	۲٫۰۵۸۱	۱۴
۲۷	۰٫۷۵۱۷	۱٫۰۰۰۰	۱٫۷۴۰۵	۳۷
۲۸	۰٫۸۰۷۳	۱٫۱۰۵۶	۱٫۸۹۴۵	۲۹
۲۹	۰٫۸۹۶۰	۱٫۲۱۰۸	۲٫۰۸۵۰	۱۳
۳۰	۰٫۷۵۰۴	۱٫۱۹۶۶	۱٫۹۱۲۷	۲۷
۳۱	۱٫۰۰۰۰	۱٫۲۲۹۵	۲٫۲۰۵۴	۱۱
۳۲	۰٫۹۷۴۷	۱٫۵۰۰۶	۲٫۴۳۹۹	۶
۳۳	۰٫۶۹۶۲	۱٫۰۰۰۰	۱٫۶۷۸۷	۴۲
۳۴	۰٫۹۵۷۸	۱٫۰۶۵۲	۱٫۹۹۹۱	۲۰
۳۵	۰٫۶۷۰۸	۱٫۰۵۴۳	۱٫۶۹۶۹	۴۰
۳۶	۰٫۵۹۶۶	۱٫۰۰۰۰	۱٫۵۷۲۹	۴۶
۳۷	۰٫۷۴۹۴	۱٫۱۸۳۷	۱٫۹۰۶۰	۲۸
۳۸	۰٫۷۱۸۹	۱٫۰۰۰۰	۱٫۷۱۰۰	۳۹
۳۹	۰٫۷۱۷۹	۱٫۰۹۴۲	۱٫۷۹۱۹	۳۵
۴۰	۰٫۷۴۶۰	۱٫۰۰۳۹	۱٫۷۳۷۱	۳۸
۴۱	۰٫۷۸۲۶	۱٫۳۲۴۳	۲٫۰۵۹۷	۱۵
۴۲	۰٫۹۸۸۳	۱٫۵۸۰۴	۲٫۵۲۴۶	۳
۴۳	۱٫۰۰۰۰	۱٫۲۷۹۵	۲٫۲۵۶۵	۸
۴۴	۰٫۹۷۱۹	۱٫۲۷۱۱	۲٫۲۳۳۴	۱۰
۴۵	۰٫۷۴۹۰	۱٫۲۱۰۰	۱٫۹۲۲۷	۲۶
۴۶	۰٫۹۲۵۹	۱٫۰۳۰۳	۱٫۹۳۳۳	۲۴

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، ما ابتدا به برخی از ایرادات و خطاهای مقاله‌ی Toloo و همکاران [۵] اشاره کردیم. نشان دادیم که مدل پیشنهادی آنها برای به دست آوردن کارآترین DMU فقط می‌تواند یک DMU را از میان DMUهای کارآی خوشبینانه به طور شانسی انتخاب کند. در نتیجه، الگوریتم آنها تنها می‌تواند DMUهای کارآی خوشبینانه را به طور تصادفی رتبه‌بندی کند. به علاوه، آنها ادعا کردند که الگوریتم آنها می‌تواند همه‌ی DMUها را رتبه‌بندی کند، و این را به عنوان مزیت مدل خود در مقایسه با رویکرد Chen [۲] ذکر کردند. ما این را نیز نشان دادیم که این مطلب صحیح نیست و مدل استفاده شده در الگوریتم آنها پس از رتبه‌بندی تصادفی همه‌ی DMUهای کارآی خوشبینانه، نشدنی خواهد بود، و بنابراین، نخواهد توانست DMUهای غیرکارآی خوشبینانه را رتبه‌بندی کند. برای غلبه بر این مشکلات، ما رویکرد DEA با مرز دوگانه را پیشنهاد کردیم. مثال عددی نشان می‌دهد که رویکرد پیشنهادی می‌تواند همه‌ی قواعدی ارتباطی در مثال Chen [۲] برای داده‌کاوی را رتبه‌بندی کند.

فهرست منابع

[1] Charnes A, Cooper W.W, & Rhodes E, (1978). Measuring the efficiency of decision-making units, European Journal of Operational Research.

[2] Chen M.C. (2007). Ranking discovered rules from data mining with multiple criteria by data envelopment analysis, Expert Systems with Applications.

[3] Obata T, & Ishii H, (2003). A method for discriminating efficient candidates with ranked voting data, European Journal of Operational Research.

[4] Cook W.D, & Kress M, (1990). A data envelopment model for aggregating preference rankings,Management Science.

[5] Toloo M, Sohrabi, B, & Nalchigar S, (2009). A new method for ranking discovered rules from data mining by DEA, Expert Systems with Applications.

[6] Andersen P, & Petersen N.C. (1993). A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis, Management Science.

[7] Chen Y, (2004). Ranking efficient units in DEA, Omega.

[8] Banker R.D, & Chang H, (2006). The super-efficiency procedure for outlier identification, not for ranking efficient units, European Journal of Operational Research.

[9] Li S, Jahanshahloo G.R, & Khodabakhshi M, (2007). A super-efficiency model for ranking efficient units in data envelopment analysis, Applied Mathematics and Computation.

[10] Lovell C.A.K & Rouse A.P.B, (2003). Equivalent standard DEA models to provide superefficiency scores, Journal of the Operational Research Society.

[11] Seiford L.M, & Zhu J, (1999). Infeasibility of super-efficiency data envelopment analysis models, INFOR.

[12] Sexton T.R, Silkman R.H, & Hogan A.J, (1986). Data envelopment analysis: Critique and extensions, in: R.H. Silkman (Ed.), Measuring Efficiency: An Assessment of Data Envelopment Analysis, Jossey-Bass, San Francisco.

[13] Doyle J.R, & Green R.H, (1994). Efficiency and cross-efficiency in DEA: Derivations, meanings and uses, Journal of the Operational Research Society.

[14] Doyle J.R, & Green R.H. (1995). Cross-evaluation in DEA: Improving discrimination among DMUs, INFOR.

[15] Bao C.P, Chen T.H, & Chang S.Y, (2008). Slack-based ranking method: An interpretation to the cross-efficiency method in DEA, Journal of the Operational Research Society.

[16] Sinuany-Stern Z, Mehrez A, & Hadad Y, (2000). An AHP/DEA methodology for ranking decision making units, International Transactions in Operational Research.

[17] Saaty T.L, (1980). The Analytic Hierarchy Process, McGraw-Hill, New York.

[18] Jahanshahloo G.R, Junior H.V, Hosseinzadeh Lotfi F, & Akbarian D, (2007). A new DEA ranking system based on changing the reference set, European Journal of Operational Research.

[19] Ganley J.A, & Cubbin S.A, (1992). Public Sector Efficiency Measurement: Applications of Data Envelopment Analysis, North-Holland, Amsterdam.

[20] Roll Y, Cook W.D, & Golany B, (1991). Controlling factor weights in data envelopment analysis, IIE Transactions.

[21] Roll Y, & Golany B, (1993). Alternate methods of treating factor weights in DEA. OMEGA.

[22] Sinuany-Stern Z, Mehrez A, & Barboy A, (1994). Academic departments' efficiency in DEA, Computers & Operations Research.

[23] Friedman L, & Sinuany-Stern Z, (1997). Scaling units via the canonical correlation analysis in the DEA context, European Journal of Operational Research.

[24] Sinuany-Stern Z, & Friedman L, (1998). DEA and the discriminant analysis of ratios for ranking units, European Journal of Operational Research.

[25] Liu F.H.F, & Peng H.H, (2008). Ranking of units on the DEA frontier with common weights. Computers & Operations Research.

[26] Adler N, Friedman L, & Sinuany-Stern Z, (2002). Review of ranking methods in the data envelopment analysis context. European Journal of Operational Research.

[27] Charnes A, & Cooper W.W, (1962). Programming with linear fractional functionals, Naval Research Logistics Quarterly.

[28] WangY.M, Chin K.S, & Yang J.B, (2007). Measuring the performances of decision making units using geometric average efficiency, Journal of the Operational Research Society,

[29] Azizi H, (2011). The interval efficiency based on the optimistic and pessimistic points of view, Applied Mathematical Modelling.

[30] Wang Y.M, Luo Y, & Liang L, (2009). Ranking decision making units by imposing a minimum weight restriction in the data envelopment analysis, Journal of Computational and Applied Mathematics.