دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال چهارم، شماره سیزدهم، بهار ۱۳۹۷
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش های نوین در ریاضی

ویژگی آشوب برای دستگاه‌های دینامیکی ناخودگردان تابع تکرار

منا عفتی[۱]، علیرضا زمانی بهابادی[۲]*، بهمن هنری[۳].

[۱] دانشجوی دکترای دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد.
[۲] استادیار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد (نویسنده مسؤول).
[۳] استاد، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد.

تاریخ دریافت مقاله: ۹۶/۰۹/۲۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۰۳/۲۸

چکیده

در این مقاله مفهوم جدید دستگاه دینامیکی ناخودگردان تابع تکرار را معرفی می‌کنیم و نشان می‌دهیم برای فضای متریک فشرده‌ی X، دستگاه دینامیکی ناخودگردان تابع تکرار $IFS(f_{1,\infty}^0, f_{1,\infty}^1)$ متعدی توپولوژیکی است، هرگاه دستگاه دارای ویژگی سایه‌زنی میانگین باشد و نقاط کمینه‌ی آن در X چگال باشند. علاوه بر این، چنین دستگاهی متعدی توپولوژیکی است، هرگاه برای هرمجموعه‌ی باز و پایای U از X، نقطه‌ای مانند $z \in U$ موجود باشد به طوری‌که $N(z,U)$ دارای چگالی بالایی مثبت باشد. همچنین نشان می‌دهیم ویژگی سایه‌زنی و تعدی زنجیری، متعدی توپولوژیکی بودن این دستگاه را نتیجه می‌دهد. نشان می‌دهیم دو شرط اول تعریف آشوب دوانی*، شرط سوم را نتیجه می‌دهد، به علاوه آشوبناک بودن این دستگاه تحت شرایطی به‌دست خواهد آمد. آمیخته‌ی توپولوژیکی بودن چنین دستگاهی از شرایط سایه‌زنی و آمیختگی زنجیری به دست می‌آید. در انتها به بررسی شرایطی پرداخته‌ایم که تحت آنها دستگاه دینامیکی $(X.f)$ دارای آشوب لی – یورک† خواهد بود.

واژه‌های کلیدی: دستگاه دینامیکی ناخودگردان تابع تکرار، آشوب، متعدی توپولوژیکی بودن، سایه‌زنی میانگین.

عهده‌دار مکاتبات Email: zamany@um.ac.ir

* Devaney
† Li-Yorke

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر دستگاه‌های دینامیکی ناخودگردان و تابع تکرار از جنبه‌های مختلفی مورد مطالعه قرار گرفته اند. یکی از مفاهیمی که در دستگاه‌های دینامیکی ناخودگردان مورد توجه بسیاری قرار می‌گیرد، بحث آشوب است. تعاریف مختلفی برای مفهوم آشوب در دستگاه‌های دینامیکی وجود دارد. ابتدا لی - یورک در سال ۱۹۷۵ مفهوم آشوب را عنوان کردند [12]. یک توصیف جدید از آشوب در دستگاه دینامیکی توسط دوانی به صورت زیر بیان شد [5]. نگاشت f روی فضای متریک X، آشوب دوانی دارد اگر متعدی توپولوژیکی باشد، مجموعه‌ی نقاط تناوبی آن در فضای X چگال باشد و نسبت به شرایط اولیه حساس باشد. پس از آن، بنکس[3] و همکاران نشان دادند که تعدی توپولوژیکی و چگال بودن نقاط تناوبی، حساس بودن نسبت به شرایط اولیه را نشان می‌دهد [1]. همچنین هوانگ[4] و یی[5] نشان دادند که آشوب در حالت دوانی از آشوب لی - یورک قویتر است [9]. ژو[6] و همکاران در [18] ثابت کردند که برای دستگاه‌های دینامیکی ناخودگردان نیز تحت شرایطی، دو شرط اول در آشوب‌دوانی، حساس بودن نسبت به شرایط اولیه را نتیجه می‌دهند. بعضی شرایط که منجر به وجود آشوب در یک دستگاه دینامیکی می‌شوند، عبارتند از تعدی توپولوژیکی، آمیختگی، آمیختگی ضعیف، سایه‌زنی، سایه‌زنی میانگین و حساس بودن به شرایط اولیه. تعدی توپولوژیکی از مفاهیم مهم در دستگاه‌های دینامیکی به شمار می‌رود. این مفهوم توسط بیرخوف[7] در سال ۱۹۲۰ مطرح شده است [3]. همچنین مفهوم سایه‌زنی میانگین توسط بلنک [4] شد که طبق آن ویژگی سایه‌زنی میانگین یک ابزار قوی برای مطالعه‌ی آشوب در دستگاه‌های دینامیکی است .مفهوم سایه‌زنی میانگین در ارتباط با مفاهیم دیگر توپولوژیکی، توسط چندین محقق مورد بررسی قرار گرفته است. گیو[9] ثابت کرد که دستگاه‌های دینامیکی خودگردان که در ویژگی سایه‌زنی میانگین صدق می‌کنند، به‌صورت توپولوژیکی ارگودیک هستند [8]. وانگ[10] و نیو[11] نشان دادند که برای دستگاه دینامیکی خودگردان (X, f) که در آن X یک فضای متریک فشرده و $f : X \to X$ نگاشتی پیوسته است، اگر f دارای ویژگی سایه‌زنی میانگین باشد و برای هر زیر مجموعه‌ی باز $U \subset X$، نقطه‌ای مانند $z \in U$ موجود باشد که $N_f(z,U)$ دارای چگالی بالایی مثبت باشد، آنگاه دستگاه (X, f) متعدی است[16]. همچنین نیو نشان داده که اگر f دارای ویژگی سایه‌زنی میانگین باشد و نقاط کمینه‌ی آن در X چگال باشند، آنگاه f آمیخته‌ی ضعیف و بطور قوی ارگودیک است [13]. پارک[12] و ژانگ[13] ثابت کرده‌اند که اگر یک نگاشت پیوسته و پوشا روی یک فضای متریک فشرده دارای ویژگی سایه‌زنی میانگین باشد، آنگاه هر نقطه از فضا برگشت‌پذیر زنجیری است [14]. رابطه‌ی بین ویژگی سایه‌زنی و آشوب توسط ماژور[14] مورد بررسی قرارگرفته است [10]. دستگاه‌های دینامیکی تابع تکرار برای شناخت ساختارهای فراکتالی و کاربردهای آنها خصوصا در فشرده‌سازی و پردازش تصاویر مورد استفاده قرار گرفته اند [2]. مفاهیم مهمی در دستگاه‌های دینامیکی مانند سایه‌زنی و سایه‌زنی میانگین، به دستگاه تابع تکرار گسترش یافته‌اند [6],[7],[17]. فاتحی‌نیا[15] نشان داده است که اگر یک دستگاه دینامیکی تابع تکرار پیوسته و پوشا روی یک فضای متریک فشرده دارای ویژگی سایه زنی میانگین باشد آنگاه هر نقطه‌ی این فضا برگشت‌پذیر زنجیری است [6]. زمانی بهابادی[16]، مفهوم سایه‌زنی و سایه‌زنی میانگین را برای دستگاه تابع تکرار بیان کرده و نتایجی

---

[3] Banks
[4] Huang
[5] Ye
[6] Zhu
[7] Birkhoff
[8] Blank
[9] Gu
[10] Wang
[11] Niu
[12] Park
[13] Zhang
[14] Mazur
[15] Fatehi nia
[16] Zamani Bahabadi

در مورد تعدی توپولوژیکی، تعدی زنجیری، آمیختگی زنجیری و آمیختگی برای دستگاه تابع تکرار را به‌دست آورد [17].

در این مقاله مفهومی جدید تحت عنوان دستگاه دینامیکی ناخودگردان تابع تکرار را ارایه می‌دهیم و مفاهیمی چون تعدی توپولوژیکی، سایه‌زنی میانگین و آمیختگی برای چنین دستگاهی را تعریف می‌کنیم. هدف این مقاله تعمیم قضیه‌های بیان شده از وانگ و نیو برای دستگاه دینامیکی ناخودگردان تابع تکرار و به دست آوردن ویژگی تعدی توپولوژیکی و همچنین نتیجه‌گیری آشوبناک بودن این دستگاه است. بعلاوه تحت شرایطی آشوب لی –یورک را برای دستگاه دینامیکی $(X.f)$ که در آن X یک فضای متریک فشرده با متریک d و f نگاشتی پیوسته روی X است، به‌دست می‌آوریم.

در بخش بعدی، برخی مفاهیم اساسی مورد نیاز برای دستگاه‌های دینامیکی ناخودگردان و همچنین دستگاه های دینامیکی تابع تکرار بیان شده و سپس مفهوم دستگاه دینامیکی ناخودگردان تابع تکرار مطرح گشته است. در ادامه، رابطه‌ی بین ویژگی سایه‌زنی میانگین و تعدی توپولوژیکی و آشوبناک بودن دستگاه دینامیکی ناخودگردان تابع تکرار و همچنین سایه‌زنی و تعدی توپولوژیکی با شرایط متعدی زنجیری و آمیختگی زنجیری بررسی شده است.

در بخش انتهایی، به بررسی شرایطی پرداخته‌ایم که تحت آنها دستگاه دینامیکی (X,f) دارای آشوب لی – یورک خواهد بود.

۲. پیش نیازها

در این بخش برخی مفاهیم اساسی مربوط به دستگاه‌های دینامیکی ناخودگردان و تابع تکرار را با استفاده از منابع [16]، [17] و [18] بیان می‌کنیم و سپس به معرفی مفهوم جدید دستگاه دینامیکی ناخودگردان تابع تکرار می پردازیم.

فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک فشرده و $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از همسانریختی‌های روی X باشد. برای $k.n \in \mathbb{N}$ قرار می‌دهیم.

$$f_k^0 := id.\ f_k^n := f_{k+n-1}\ o\ f_{k+n-2} o \dots o\ f_{k+1}\ o\ f_k$$

که در آن id نگاشت همانی روی X است. مدار یک نقطه‌ی $x \in X$ عبارتست از دنباله‌ای به شکل $\{f_1^n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$. دنباله‌ی $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ را با نماد $f_{1,\infty}$ نمایش می‌دهیم و $(X, f_{1,\infty})$ را یک دستگاه دینامیکی ناخودگردان می‌نامیم که به طور خلاصه به شکل NDS نمایش داده می‌شود. یک دستگاه دینامیکی ناخودگردان $(X, f_{1,\infty})$ را متعدی توپولوژیکی خوانیم هرگاه برای هر دو زیر مجموعه‌ی باز ناتهی U و V از X، $n \in \mathbb{Z}_+$ای وجود داشته باشد به طوری که $f_1^n(U) \cap V \neq \emptyset$. اگر قرار دهیم.

$$N_{f_{1.\infty}}(U.V) = \{n \in \mathbb{Z}_+ | f_1^n(U) \cap V \neq \emptyset\}$$

آنگاه $f_{1,\infty}$ متعدی توپولوژیکی است هرگاه برای هر دو مجموعه‌ی بازناتهی U و V از X داشته باشیم $N_{f_{1,\infty}}(U,V) \neq \emptyset$ [18]. زیر مجموعه‌ی $I \subset \mathbb{Z}_+$ هم‌چسب نامیده می‌شود هرگاه $m \in \mathbb{N}$ای وجود داشته باشد که $[n,n+m] \cap I \neq \emptyset$ برقرار باشد [16]. دستگاه دینامیکی ناخودگردان $f_{1,\infty}$ را هم‌چسب خوانیم در صورتی که برای هر دو زیر مجموعه‌ی باز ناتهی $U,V \subset X$، $N_{f_{1,\infty}}$ مجموعه‌ای هم‌چسب باشد [18]. زیر مجموعه‌ی I از $\mathbb{Z}_+$را دارای چگالی بالایی مثبت خوانیم هرگاه

$$\lim_{n\to\infty} sup \frac{Card(I \cap \{0.1. \dots . n-1\}}{n} > 0$$

برقرار باشد [16]. نقطه‌ی $x \in X$ نقطه‌ی کمینه نامیده می‌شود هرگاه برای هر همسایگی U از x مجموعه‌ی $N_{f_{1,\infty}}(x,U)$ هم‌چسب باشد. مجموعه‌ی همه‌ی نقاط کمینه‌ی $f_{1,\infty}$ را با $AP(f_{1,\infty})$ نشان می دهیم. فرض کنیم $\delta > 0$ داده شده است. دنباله‌ی $\{x_n\}_{n\in Z}$ یک δ- مدارنما برای دستگاه دینامیکی ناخودگردان $f_{1,\infty}$ نامیده می‌شود هرگاه برای هر

$$i \in \mathbb{Z}_+ \quad d(f_{i+1}(x_i), x_{i+1}) < \delta.$$

فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده است. نقطه‌ی $x \in X$، δ- مدارنمای $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ را ε - سایه می‌زند هرگاه برای هر $n \geq 0$ داشته باشیم

$$d(f_1^n(x), x_n) < \varepsilon.$$

گوییم یک دستگاه دینامیکی ناخودگردان دارای ویژگی سایه‌زنی است، هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که هر δ- مدارنما توسط نقطه‌ای از X، ε- سایه شود.

فرض کنیم $\delta > 0$ داده شده است. دنباله‌ی $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ از نقاط X یک δ- مدارنمای میانگین برای $f_{1,\infty}$ خوانده می‌شود، هرگاه عدد صحیحی مانند $N = N(\delta) > 0$ موجود باشد به قسمی که برای هر $n \geq N$ و هر $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} d(f_{i+k}(x_{i+k}).\, x_{i+k+1}) < \varepsilon$$

بعلاوه دستگاه دینامیکی ناخودگردان را دارای ویژگی سایه زنی میانگین خوانیم هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$، عددی مانند $\delta > 0$ موجود باشد به طوری که هر δ- مدارنمای میانگین $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ به صورت میانگین توسط نقطه‌ای مانند $z \in X$، ε- سایه شود، یعنی هرگاه داشته باشیم:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} d(f_1^i(z), x_i) < \varepsilon.$$

فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک و f_0 و f_1 دو نگاشت پیوسته روی X باشند. دستگاه دینامیکی تابع تکرار $IFS(f_0, f_1)$ عبارت است از عمل نیم گروه تولید شده توسط $\{f_0, f_1\}$ روی X. مدار نقطه‌ی $x \in X$ تحت دستگاه تابع تکرار $IFS(f_0, f_1)$ دنباله ای به شکل $\{f_\omega^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ است که $\omega = \omega_0\omega_1\omega_2 \ldots \in \sum^2$ که در آن

$$\sum^2 = \{s = s_0 s_1 s_2 \ldots \mid s_i \in \{0.1\}\}$$

تعریف می‌شود و برای هر $n \in \mathbb{N}$

$$f_\omega^n(x) = f_{\omega_n} o \Lambda\, o f_{\omega_1} o f_{\omega_0}(x).$$

یک دستگاه تابع تکرار $IFS(f_0, f_1)$ متعدی توپولوژیکی نامیده می‌شود هرگاه برای هر دو مجموعه‌ی باز ناتهی U و V از X، $\omega \in \sum^2$ای و $n \in \mathbb{N}$ای وجود داشته باشند به طوری که $f_\omega^n(U) \cap V \neq \varnothing$.

برای $\delta > 0$ دنباله‌ی $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ یک δ- مدارنما برای $IFS(f_0, f_1)$ است هرگاه برای هر $i \geq 0$

$$\min\{d(f_0(x_i).\, x_{i+1}).\, d(f_1(x_i).\, x_{i+1})\} < \delta$$

می‌توانیم برای هر $i \geq 0$ و $\omega = \omega_0\omega_1\omega_2$ تعریف بالا را به صورت

$$d(f_{\omega i}((x_i).\, x_{i+1}) < \delta$$

بنویسیم که در آن

$$\omega_i = \begin{cases} 0.\ d(f_0(x_i).\, x_{i+1}) < \delta \\ 1.\ d(f_0(x_i).\, x_{i+1}) \geq \delta. \end{cases}$$

توجه داریم که اگر $\omega_i = 1$ آنگاه $d(f_1(x_i).\, x_{i+1}) < \delta$) [17].

دنباله‌ی $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ از عناصر X یک δ- زنجیر از x_0 به x_n است اگر $\omega \in \sum^2$ای وجود داشته باشد که $d(f_\omega^n(x_i), x_{i+1}) < \delta$. $IFS(f_0, f_1)$ را متعدی زنجیری می‌نامیم، هرگاه برای هر دو نقطه‌ی $x, y \in X$ و هر $\varepsilon > 0$، یک ε- زنجیر از x به y وجود داشته باشد [17]. یک δ- مدارنما $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ توسط نقطه‌ی $z \in X$، ε- سایه می‌شود، هرگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $d(f_\omega^n(z), x_n) < \varepsilon$ که در آن $\omega = \omega_0\omega_1\omega_2\Lambda$. دستگاه تابع تکرار $IFS(f_0, f_1)$ دارای ویژگی سایه‌زنی است هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$، عددی مانند $\delta > 0$ و $\omega \in \sum^2$ای موجود باشد به طوری که هر δ- مدارنما توسط نقطه‌ای از X، ε- سایه شود. همچنین دنباله‌ی $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ یک δ- مدارنمای میانگین نامیده می‌شود، هرگاه عدد صحیح و مثبتی مانند N موجود باشد به قسمی که برای هر $n \geq N$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \min\{d(f_0(x_i).\, x_{i+1}.\, d(f_1(x_i).\, x_{i+1})\} < \delta$$

دستگاه تابع تکرار $IFS(f_0, f_1)$ را دارای ویژگی سایه زنی میانگین خوانیم هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$، عددی مانند $\delta > 0$ موجود باشد به طوری که هر δ- مدارنمای

میانگین $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ به طور میانگین توسط نقطه‌ی $z \in X$ ، ε- سایه شود یعنی هرگاه $\omega \in \sum^2$ای موجود باشد به طوری که

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} d(f_\omega^i(z), x_i) < \varepsilon$$

برقرار باشد.

در این قسمت مفهوم جدید دستگاه دینامیکی ناخودگردان تابع تکرار را در تعریفی جداگانه مطرح و برخی مفاهیم مورد نیاز را برای چنین دستگاهی بیان می‌کنیم.

تعریف: فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک است. دو دستگاه دینامیکی ناخودگردان $f_{1,\infty}^0$ و $f_{1,\infty}^1$ را روی X در نظر می‌گیریم که:

$$f_{1,\infty}^0 = \{f_1^0, f_2^0, \Lambda\},\ f_{1,\infty}^1 = \{f_1^1, f_2^1, \Lambda\}$$

مدار یک نقطه‌ی $x \in X$ تحت دستگاه ناخودگردان تابع تکرار $IFS(f_{1,\infty}^0, f_{1,\infty}^1)$ دنباله‌ای به صورت $\{F_\omega^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$است که در آن $\omega = \omega_1\omega_2\omega_3 \ldots \in \sum^2$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$

$$F_\omega^n(x) = f_{n'}^{\omega_n}\ o\ f_{(n-1)'}^{\omega_{n-1}}\ o\Lambda\ o\ f_{2'}^{\omega_2}\ o\ f_1^{\omega_1}(x),$$

که در آن n' به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$n' = \begin{cases} 1 & .\ \omega_n \neq \omega_{n-1} \\ 2 & .\ \omega_n = \omega_{n-1}.\ \omega_{n-1} \neq \omega_{n-2} \\ \vdots & \\ n-1 & .\ \omega_n = \omega_{n-1}.\ \omega_{n-1} = \omega_{n-2}.\cdots.\ \omega_2 \neq \omega_1 \\ n & .\ \omega_n = \omega_{n-1}.\ \omega_{n-1} = \omega_{n-2}.\cdots.\ \omega_2 = \omega_1. \end{cases}$$

وارون دنباله‌ی $\{F_\omega^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(F_\omega^n(x))^{-1} = F_\omega^{-n}(x) = (f_{n'}^{\omega_n}\ o\ f_{(n-1)'}^{\omega_{n-1}}\ o\Lambda\ o\ f_{2'}^{\omega_2}\ o\ f_1^{\omega_1})^{-1}(x)$$
$$= f_1^{-\omega_1} o f_{2'}^{-\omega_2} o\Lambda\ o f_{n'}^{-\omega_n}(x).$$

نقطه‌ی $x_0 \in X$ نقطه‌ای متناوب برای دستگاه دینامیکی ناخودگردان تابع تکرار $IFS(f_{1,\infty}^0, f_{1,\infty}^1)$ نامیده می‌شود، هرگاه مدار x_0 متناوب باشد یعنی عدد صحیح $k > 0$ای و $\omega \in \sum^2$ای موجود باشند به طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $0 \leq m < k$ داشته باشیم

$$F_\omega^{nk+m}(x_0) = F_\omega^m(x_0).$$

مجموعه‌ی همه‌ی نقاط تناوبی دستگاه دینامیکی ناخودگردان تابع تکرار را با $P(IFS(f_{1,\infty}^0, f_{1,\infty}^1))$ نمایش می‌دهیم.

در مثال زیر سعی شده است برای روشن‌تر شدن تعریف فوق، چند نقطه از مدار نقطه‌ای از فضای X تحت دستگاه ناخودگردان تابع تکرار ذکر شده را به‌دست بیاوریم.

مثال ۱-۲: $\omega \in \sum^2$ را به صورت

$$\omega = \omega_1\omega_2\omega_3\Lambda\ \omega_{10} = 0101100011$$

در نظر می‌گیریم. در این صورت مدار نقطه‌ی $x \in X$ تحت دستگاه دینامیکی ناخودگردان تابع تکراری مانند $IFS(f_{1,\infty}^0, f_{1,\infty}^1)$ که در آن $f_{1,\infty}^0 = \{f_1^0, f_2^0, f_3^0\}$ و $f_{1.\infty}^1 = \{f_1^1.f_2^1\}$ در نظر گرفته می‌شوند، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$F_\omega^2(x) = f_1^1\ o\ f_1^0(x)$$
$$F_\omega^3(x) = f_1^0 o f_1^1\ o\ f_1^0(x)$$
$$F_\omega^4(x) = f_1^1 o f_1^0 o f_1^1 o\ f_1^0(x)$$
$$F_\omega^5(x) = f_2^1 o f_1^1 o f_1^0 o f_1^1 o\ f_1^0(x)$$

و به همین ترتیب x_{10} به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$F_\omega^{10}(x) = f_2^1 o f_1^1 o f_3^0 o f_2^0 o f_1^0 o f_2^1 o f_1^1 o f_1^0 o f_1^1 o f_1^0(x).$$

دستگاه دینامیکی ناخودگردان تابع تکرار $IFS(f_{1,\infty}^0, f_{1,\infty}^1)$ متعدی توپولوژیکی نامیده می‌شود هرگاه برای هر دو مجموعه‌ی باز ناتهی U و V از X، $\omega \in \sum^2$ای و $n \in \mathbb{N}$ای وجود داشته باشند به طوری که $F_\omega^n(U) \cap V \neq \varnothing$. این دستگاه آمیخته‌ی توپولوژیکی است هرگاه برای هر دو زیر مجموعه‌ی باز ناتهی U و V از X، $n \in \mathbb{N}$ای باشد که برای هر $N \geq n$، $\omega \in \sum^2$ای موجود باشد به طوری که داشته باشیم

$$F_\omega^N(U) \cap V \neq \emptyset.$$

برای زیر مجموعه‌ی باز W از X و $x \in X$، $N(x.W)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$N(x.w) = \{n \in \mathbb{N}.\ f_\omega^n(x) \in w.\ for\ some\ \omega \in \textstyle\sum^2\}$$

دستگاه دینامیکی ناخودگردان تابع تکرار را حساس نسبت به شرایط اولیه خوانیم هرگاه عددی مانند $\delta > 0$ موجود باشد به طوری که برای هر $x \in X$ و هر $r > 0$، $y \in B(x.r)$، $\omega \in \sum^2$ و $n \in \mathbb{N}$ای موجود باشند به قسمی که

$$d(F_\omega^n(x).F_\omega^n(y)) > \delta$$

اگر $S \subset \mathbb{N}$ و $|S|$ نشان دهنده‌ی تعداد عناصر مجموعه‌ی S باشد، قرار می‌دهیم

$$\bar{d}(S) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} | S \cap \{0,1,\Lambda\ ,n-1\}|,$$

$$\underline{d}(S) := \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} | S \cap \{0,1,\Lambda\ ,n-1\}|.$$

در این صورت $\bar{d}(S)$ و $\underline{d}(S)$ به ترتیب چگالی بالایی و چگالی پایینی S نامیده می‌شوند.

در مثال زیر تعدی توپولوژیکی دستگاه دینامیکی ناخودگردان تابع تکرار در نظر گرفته شده، نشان داده شده است. ایده‌ی این مثال از مثال ۲.۲ مرجع [18] گرفته شده است.

مثال ۲-۲: مجموعه‌ی $X = \{a,b\}$ را با متریک گسسته در نظر می‌گیریم. اگر قرار دهیم $f_{1,\infty}^0 = \{f_1^0, f_2^0\}$, $\omega = 0011$ و $f_{1,\infty}^1 = \{f_1^1, f_2^1\}$ که در آن $f_1^0(a) = a$ ، $f_2^0(a) = b$ و $f_1^1(b) = a$، $f_2^1(a) = b$ آنگاه دستگاه دینامیکی ناخودگردان تابع تکرار $IFS(f_{1,\infty}^0, f_{1,\infty}^1)$، متعدی توپولوژیکی است.

برای عدد حقیقی $\delta > 0$، دنباله‌ی $\{x_i\}_{i=0}^n$ از عناصر X یک δ- زنجیر از x_0 به x_n نامیده می‌شود اگر $\omega \in \sum^2$ای موجود باشد به طوری که $d(f_{i'}^{\omega_i}(x_i).x_{i+1}) < \delta$. دستگاه دینامیکی ناخودگردان تابع تکرار $IFS(f_{1,\infty}^0, f_{1,\infty}^1)$ را متعدی زنجیری خوانیم هرگاه برای هر $\delta > 0$ و هر جفت عناصر $x, y \in X$ یک δ- زنجیر از x به y وجود داشته باشد. به علاوه دستگاه دینامیکی ناخودگردان تابع تکرار $IFS(f_{1,\infty}^0, f_{1,\infty}^1)$ آمیخته‌ی زنجیری نامیده می‌شود هرگاه برای هر $\delta > 0$ و هر جفت عناصر $x, y \in X$ عدد صحیح مثبتی مانند N و $\omega \in \sum^2$ای وجود داشته باشد به طوری که برای هر $n > N$، یک δ- زنجیر از x به y به طول n وجود داشته باشد.

برای عدد حقیقی $\delta > 0$ دنباله‌ی $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ را یک δ- مدارنما برای دستگاه ناخودگردان تابع تکرار $IFS(f_{1,\infty}^0, f_{1,\infty}^1)$ خوانیم، هرگاه برای هر $n \geq 0$، $\omega \in \sum^2$ای وجود داشته باشد به طوری که

$$d(f_{i'}^{\omega_i}(x_i), x_{i+1}) < \delta.$$

برای هر $\varepsilon > 0$، گوییم نقطه‌ی $x \in X$، δ- مدارنمای $\{x_i\}_{i=0}^\infty$ را εـ سایه می‌کند هرگاه برای هر $n \geq 0$، $\omega \in \sum^2$ای موجود باشد که

$$d(F_\omega^n(x), x_n) < \varepsilon.$$

یک دستگاه ناخودگردان تابع تکرار $IFS(f_{1,\infty}^0, f_{1,\infty}^1)$ دارای ویژگی سایه‌زنی است هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$، عددی مانند $\delta > 0$ و $\omega \in \sum^2$ای وجود داشته باشد به طوری که هر δ- مدارنما توسط نقطه‌ای از X، ε- سایه شود.

برای $\delta > 0$ دنباله‌ی $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ یک δ- مدارنمای میانگین برای $IFS(f_{1,\infty}^0, f_{1,\infty}^1)$ نامیده می‌شود هرگاه عدد صحیح مثبتی مانند $N = N(\delta) > 0$ موجود باشد به قسمی که برای هر $n \geq N$ و هر $k \in \mathbb{N}$، $\omega \in \sum^2$ای موجود باشد به طوری که

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} d(f_{(i+k)'}^{\omega_{i+k}}(x_{i+k}), x_{i+k+1}) < \delta$$

بعلاوه دستگاه ناخودگردان تابع تکرار $IFS(f_{1,\infty}^0, f_{1,\infty}^1)$ دارای ویژگی سایه‌زنی میانگین است هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$، عددی مانند $\delta > 0$ و $\omega \in \sum^2$ای موجود باشد، به طوری که هر δ- مدار نمای میانگین $\{x_i\}_{i=0}^\infty$ وابسته به ω به صورت میانگین توسط نقطه‌ی $z \in X$، ε- سایه شود، یعنی هرگاه داشته باشیم

$$\lim_{n\to\infty}\sup \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} d\left(F_\omega^i(z).x_i\right) < \varepsilon.$$

۳. نتایج اصلی

از آنجایی که ویژگی سایه‌زنی ابزاری مهم برای به‌دست آوردن ویژگی آشوب در دستگاه‌های دینامیکی به‌شمار می‌رود، در این قسمت قضایایی را بیان و اثبات می‌کنیم که با استفاده از ویژگی سایه‌زنی، متعدی توپولوژیکی بودن دستگاه دینامیکی ناخودگردان تابع تکرار را نتیجه دهند. سپس با استفاده از قضیه‌ی ۵–۳ آشوبناک بودن دستگاه دینامیکی ناخودگردان تابع تکرار را به‌دست می‌آوریم.

قضیه ۳-۱. فرض کنیم $IFS(f_{1,\infty}^0, f_{1,\infty}^1)$ یک دستگاه دینامیکی ناخودگردان تابع تکرار روی فضای متریک $(X.d)$ باشد. اگر این دستگاه دارای ویژگی سایه زنی میانگین باشد و نقاط کمینه‌ی آن در X چگال باشند، آنگاه دستگاه $IFS(f_{1,\infty}^0, f_{1,\infty}^1)$ متعدی توپولوژیکی است.

برهان. فرض کنیم U و V دو زیرمجموعه‌ی باز ناتهی از فضای X باشند. از آنجا که نقاط کمینه‌ی دستگاه ناخودگردان تابع تکرار در X چگالند، می‌توانیم نقاط $x \in U \cap AP(IFS(f_{1,\infty}^0, f_{1,\infty}^1))$، $y \in V \cap AP(IFS(f_{1,\infty}^0, f_{1,\infty}^1))$ و $\varepsilon > 0$ را طوری انتخاب کنیم به طوری که $B(x.\varepsilon) \subset U$ و $B(y.\varepsilon) \subset V$، که در اینجا داریم $B(a,\varepsilon) = \{b \in X \mid d(a,b) < \varepsilon\}$. چون x و y نقاط کمینه‌ی دستگاه ناخودگردان تابع تکرار هستند، $\omega \in \sum^2$ای وجود دارد به طوری که مجموعه‌های

$$J_x = \{n \in \mathbb{Z}: F_\omega^n(x) \in B(x.\tfrac{\varepsilon}{2})\},$$
$$J_y = \{n \in \mathbb{Z}: F_\omega^n(y) \in B(y.\tfrac{\varepsilon}{2})\},$$

هم‌چسب باشند. بنابراین اعدادی طبیعی مانند $N_1.N_2 \in \mathbb{N}$ وجود دارند که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $[n, n+N_1] \cap J_x \neq \emptyset$ و $[n, n+N_2] \cap J_y \neq \emptyset$. قرار می‌دهیم $N = max\{N_1, N_2\}$.

چون $IFS(f_{1,\infty}^0, f_{1,\infty}^1)$ دارای ویژگی سایه‌زنی میانگین است برای $0 < \frac{\delta}{2}$ عددی مانند $0 < \delta_1 < \frac{\delta}{2}$ وجود دارد به طوری که هر δ_1- مدارنمای میانگین توسط نقطه‌ای از X به‌طور میانگین $\frac{\varepsilon}{2}$- سایه می‌شود.

عدد $N_0 \in \mathbb{N}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $\frac{3diam(X)}{N_0} < \delta_1$ وقتی که $diamX = \sup\{d(x,y); x,y \in X\}$. قرار می‌دهیم $diam\ X = D$. یک دنباله‌ی متناوب با تناوب $2N_0$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$x_0 = x, x_1 = f_1^{\omega_1}(x), \Lambda\ , x_{N_0-1} = F_\omega^{N_0-1}(x),$$

$$x_{N_0} = y, x_{N_0+1} = f_1^{\omega_1}(y), \Lambda\ , x_{2N_0-1} = F_\omega^{2N_0-1}(y).$$

که در آن $\omega = \omega_0\omega_1\omega_2\Lambda$. برای هر $n \geq N_0$ و هر $0 \leq m < +\infty$ داریم

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} d(f_{(i+m)'}^{\omega_{i+m}}(x_{i+m}), x_{i+m+1}) < \frac{[\frac{n}{N_0}]\times 3D}{N} \leq \frac{3D}{N_0} < \delta_1.$$

بنابراین $\{x_i\}_{i=0}^\infty$ یک δ_1- مدارنمای میانگین برای دستگاه دینامیکی $IFS(f_{1,\infty}^0, f_{1,\infty}^1)$ است. بنابراین می تواند توسط نقطه‌ای مانند $z \in X$ به صورت میانگین-$\frac{\delta}{2}$ سایه شود، یعنی $\omega \in \sum^2$ای وجود دارد به قسمی که (۱)

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} d(F_\omega^i(z), x_i) < \frac{\delta}{2}.$$

ادعا می‌کنیم تعداد نامتناهی عدد طبیعی $i \in \mathbb{N}$ وجود دارند به قسمی که

$x_i \in \{x, f_1^{\omega_1}(x), \Lambda\ , F_\omega^{N_0-1}(x)\}$ و

$$d(F_\omega^i(z), x_i) < \delta,$$

(همچنین برای $x_i \in \{y, f_1^{\omega_1}(y),\Lambda , F_\omega^{N_0-1}(y)\}$)، زیرا در غیر این صورت اگر فرض کنیم $M \in \mathbb{N}$ای وجود داشته باشد که $x_i \in \{x, f_1^{\omega_1}(x),\Lambda , F_\omega^{N_0-1}(x)\}$ و $d(F_\omega^i(z), x_i) \geq \delta$ برای هر $i \geq M$، آنگاه

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} d(F_\omega^i(z), x_i) \geq \frac{\delta}{2},$$

که با (1) در تناقض است. پس با این ادعا می‌توان گفت که اعداد $i_0 > N_0$ و $j_0 > i_0 + N$ وجود دارند به طوری‌که $d(F_\omega^{i_0}(z), x_{i_0}) < \delta$ و $d(F_\omega^{j_0}(z), x_{j_0}) < \delta$ چون نقاط کمینه در X چگالند و $[i_0, i_0+N] \cap J_x \neq \emptyset$ و $[j_0, j_0+N] \cap J_y \neq \emptyset$، پس دوعدد طبیعی مانند kو l که $0 \leq k.l \leq N$ و $\omega \in \sum^2$ای وجود دارند به طوری که:

$$F_\omega^{i_0+k}(x) \in B(x, \frac{\varepsilon}{2}),$$
$$F_\omega^{j_0+l}(y) \in B(y, \frac{\varepsilon}{2}).$$

از تعریف سایه‌زنی میانگین نتیجه می‌شود که:

$$d(F_\omega^{i_0+k}(z), F_\omega^{i_0+k}(x)) < \varepsilon,$$

و چون $F_\omega^{i_0+k}(x) \in B(x, \frac{\varepsilon}{2})$ پس

$$F_\omega^{i_0+k}(z) \in B(x, \varepsilon) \subset U,$$
$$F_\omega^{j_0+l}(z) \in B(y, \varepsilon) \subset V,$$

و در نتیجه $z \in (F_\omega^{j_0+l})^{-1}(V)$. بنابراین

$$F_\omega^{i_0+k}(z) \in F_\omega^{i_0+k}(F_\omega^{j_0+l})^{-1}(V) \cap U \neq \emptyset,$$

پس

$$(f_{(j_0+l)'}^{\omega_{j_0+l}} o\Lambda\, o f_{(i_0+k+1)'}^{\omega_{i_0+k+1}})^{-1}(V) \cap U \neq \emptyset,$$

از طرفی

$$F_\omega^{j_0+l}(V) = f_{(j_0+l)'}^{\omega_{j_0+l}} o\Lambda\, o f_{(i_0+k+1)'}^{\omega_{i_0+k+1}} o F_\omega^{i_0+k}(V),$$

بنابراین

$$(F_\omega^{j_0+l})^{-1}(V) = (F_\omega^{j_0+k})^{-1}(f_{(j_0+l)'}^{\omega_{j_0+l}} o\Lambda\, o f_{(i_0+k+1)'}^{\omega_{i_0+k+1}})^{-1}(V),$$

و چون $F_\omega^{i_0+k}(x) \in B(x, \varepsilon) \subset U$ پس

$$(F_\omega^{j_0+l})^{-1}(V) \cap U \neq \emptyset.$$

حال اگر قرار دهیم $n = j_0 + l$ دستگاه دینامیکی ناخودگردان تابع تکرار دستگاهی متعدی است.

قضیه ۳-۲. فرض کنیم $IFS(f_{1,\infty}^0, f_{1,\infty}^1)$ یک دستگاه دینامیکی ناخودگردان تابع تکرار باشد. اگر این دستگاه دارای ویژگی سایه‌زنی میانگین باشد و برای هر زیر مجموعه‌ی باز ناتهی پایای W از X نقطه‌ای مانند $z \in W$ وجود داشته باشد به طوری که $N(z, W)$ دارای چگالی بالایی مثبت باشد آنگاه دستگاه دینامیکی ناخودگردان $IFS(f_{1,\infty}^0, f_{1,\infty}^1)$ متعدی توپولوژیکی است.

برهان. فرض کنیم U و V دو زیرمجموعه‌ی باز ناتهی از X باشند. عناصر $u \in U$، $v \in V$ و عدد $\varepsilon > 0$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $B(u.\varepsilon) \subset U$و $B(v.\varepsilon) \subset V$. بنا بر فرض $x \in B(u, \frac{\varepsilon}{2})$ای و $y \in B(v, \frac{\varepsilon}{2})$ای وجود دارد به طوری که هر دو مجموعه‌ی $N(x, B(u, \frac{\varepsilon}{2}))$ و $N(y, B(v, \frac{\varepsilon}{2}))$ دارای چگالی بالایی مثبت هستند. قرار می‌دهیم

$$J_x = \{i \in \mathbb{Z}_+ : F_\omega^i(x) \in B(u.\frac{\varepsilon}{2})\},$$
$$J_y = \left\{i \in \mathbb{Z}_+ : F_\omega^i(y) \in B\left(v.\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\}.$$

که در آن $\omega \in \sum^2$ و فرض کنیم $\bar{d}\,(J_x) = \alpha > 0$ و $\bar{d}\,(J_y) = \beta > 0$ و $\gamma = \min\{\alpha, \beta\} > 0$ چون دستگاه $IFS(f_{1,\infty}^0, f_{1,\infty}^1)$ دارای ویژگی سایه‌زنی میانگین است عددی مانند $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که هر δ- مدارنمای میانگین به طور میانگین توسط نقطه ای از X، $\frac{\varepsilon}{2}\gamma$- سایه می‌شود.

عدد $N_0 \in \mathbb{N}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $\frac{diamX}{N_0} < \gamma$ قرار می‌دهیم $diam\, X = D$. دنباله ی $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ را به صورت

$$x_0 = x, x_1 = f_1^{\omega_1}(x), \Lambda, x_{N_0-1} = F_\omega^{N_0-1}(x),$$
$$x_{N_0} = y, \Lambda, x_{2N_0-1} = F_\omega^{2N_0-1}(y).$$

تعریف می‌کنیم که در آن $\omega \in \sum^2$. برای $n \geq N_0$ و هر عدد طبیعی نامنفی m داریم

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} d(f_{(i+m)'}^{\omega_{i+m+1}}(x_{i+m}), x_{i+m+1}) < \frac{[\frac{n}{N_0}]D}{N} < \delta.$$

بنابراین دنباله‌ی $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ یک δ- مدارنمای میانگین برای دستگاه $IFS(f_{1,\infty}^0, f_{1,\infty}^1)$ است که توسط نقطه ی $z \in X$ به صورت میانگین $\frac{\varepsilon}{2}\gamma$- سایه می‌شود .تعداد نامتناهی عدد طبیعی مانند $i_0 . j_0 \in \mathbb{N}$ که $i_0 < j_0$، و همچنین $\omega \in \sum^2$ای وجود دارند به طوری که $F_\omega^{i_0}(x) \in B(u, \frac{\varepsilon}{2})$، $F_\omega^{j_0}(y) \in B(v, \frac{\varepsilon}{2})$ و $d(F_\omega^{i_0}(z), x_{i_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$ و $d(F_\omega^{j_0}(z), x_{j_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$. بنابراین

$$d\left(F_\omega^{i_0}(x). u\right) < \varepsilon. d\left(F_\omega^{j_0}(y). v\right) < \varepsilon$$

و در نتیجه

$$F_\omega^{i_0}(z) \in U, F_\omega^{j_0}(z) \in V.$$

پس $z \in F_\omega^{-i_0}(U)$ و بنابراین $F_\omega^{j_0}(z) \in F_\omega^{j_0}(F_\omega^{-i_0}(U))$ که در نتیجه

$$F_\omega^{j_0}(F_\omega^{-i_0}(U)) \cap V \neq \varnothing.$$

از طرفی

$$F_\omega^{j_0}\left(F_\omega^{-i_0}(U)\right) = f_{(j_0)'}^{\omega_{j_0}} o \ldots o. f_{(i_0+1)'}^{\omega_{i_0+1}}(U)$$

و همچنین

$$F_\omega^{j_0}(U) = (f_{(j_0)'}^{\omega_{j_0}} o \Lambda\, o f_{(i_0+1)'}^{\omega_{i_0+1}}) o F_\omega^{i_0}(U).$$

که چون $F_\omega^{i_0}(U) \subset U$، پس $F_\omega^{j_0}(U) \cap V \neq \varnothing$ و بنابراین دستگاه دینامیکی ناخودگردان تابع تکرار $IFS(f_{1,\infty}^0, f_{1,\infty}^1)$ متعدی است.

شی[17] و چن[18] دستگاه دینامیکی ناخودگردان آشوبناک در حالت دوانی را به‌صورت زیر تعریف کرده‌اند [15].
فرض کنیم V یک زیر مجموعه‌ی ناتهی از D_0 باشد. دستگاه دینامیکی ناخودگردان $f_{1,\infty}$ روی V آشوب دوانی دارد هرگاه، ۱) روی V متعدی توپولوژیکی باشد، ۲) $P(f_{1,\infty}) \cap V$ در V چگال باشد که $P(f_{1,\infty})$ مجموعه‌ی نقاط تناوبی $f_{1,\infty}$ است و ۳) این دستگاه حساس نسبت به شرایط اولیه روی V باشد. در این تعریف D_0 زیر مجموعه‌ای از فضای متریک (X, d) است و $V \subset D_0$.

ژو و همکاران نشان داده‌اند که دو شرط اول آشوب‌دوانی برای دستگاه دینامیکی ناخودگردان $(X, f_{1,\infty})$ شرط سوم یعنی حساس بودن نسبت به شرایط اولیه را نتیجه می‌دهد [18].

قضیه۳-۳. فرض کنیم V یک زیر مجموعه‌ی بیکران از D_0 باشد. اگر دستگاه دینامیکی ناخودگردان $(X, f_{1,\infty})$روی V متعدی توپولوژیکی باشد و $P(f_{1,\infty}) \cap V$در V چگال باشد، آنگاه دستگاه دینامیکی ناخودگردان روی V حساس نسبت به شرایط اولیه است.

قضیه ٤-۳. فرض کنیم V زیر مجموعه‌ی نامتناهی و کرانداری از D_0 باشد. همچنین فرض کنیم $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از نگاشت‌های هم‌پیوسته روی $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ باشد و دستگاه دینامیکی ناخودگردان $(X, f_{1,\infty})$ یک نقطه‌ی ثابت روی V داشته باشد. اگر این دستگاه روی Vمتعدی توپولوژیکی باشد و $P(f_{1,\infty}) \cap V$ در V چگال باشد، آنگاه روی مجموعه‌ی V حساس نسبت به شرایط اولیه است.

[17] shi

[18] Chen

با فرض این‌که X فضایی بیکران باشد، آشوب‌دوانی را برای دستگاه دینامیکی ناخودگردان تابع تکرار $IFS(f_{1,\infty}^0, f_{1,\infty}^1)$ تعریف می‌کنیم. بر این اساس این دستگاه دارای آشوب‌دوانی است، هرگاه ۱) روی X متعدی توپولوژیکی باشد، ۲) مجموعه‌ی $P(IFS(f_{1,\infty}^0, f_{1,\infty}^1))$ در X چگال باشد و ۳) روی X حساس نسبت به شرایط اولیه باشد. در ادامه نشان می‌دهیم که دو شرط اول آشوب دوانی، شرط سوم یعنی حساس بودن نسبت به شرایط اولیه را برای دستگاه دینامیکی ناخودگردان تابع تکرار نتیجه می‌دهند.

قضیه ۳.۵. فرض کنیم X فضایی بیکران و فاقد نقاط منزوی باشد. اگر دستگاه دینامیکی ناخودگردان تابع تکرار $IFS(f_{1,\infty}^0, f_{1,\infty}^1)$ روی X متعدی توپولوژیکی باشد و $P(IFS(f_{1,\infty}^0, f_{1,\infty}^1))$ در X چگال باشد، آنگاه دستگاه دینامیکی ناخودگردان تابع تکرار روی X نسبت به شرایط اولیه حساس است.

برهان. فرض کنیم $\delta = \frac{1}{2}$ عدد دلخواهی و x نقطه ای دلخواه از X و $U(x)$ یک همسایگی از آن باشد .نشان می‌دهیم نقطه‌ای مانند $y_0 \in U(x)$، عدد صحیحی مانند $m_0 > 0$ و $\omega \in \sum^2$ای وجود دارند به طوری که:

$$d(F_\omega^{m_0}(x), F_\omega^{m_0}(y_0)) > \frac{1}{2}\delta = \frac{1}{4}.$$

چون $P(IFS(f_{1,\infty}^0, f_{1,\infty}^1))$ در X چگال است و X فاقد نقاط منزوی است، پس نقطه‌ای متناوب مانند $q \in U(x)$، وجود دارد به طوری که $q \neq x$. قرار می دهیم

$$L_{x,q} := max_{z \in O(q)} d(x,z) > 0.$$

در این صورت دو حالت پیش می‌آید.

حالت۱. $L_{x.q} \geq \delta = \frac{1}{2}$.

از تعریف $L_{x.q}$ نتیجه می‌شود $O(q) \subset \bar{B}_{L_{x,q}}(x)$.

چون X بیکران است، $X \setminus \bar{B}_{2L_{x.q}}(x)$ یک زیرمجموعه‌ی باز ناتهی از X است. از آنجا که دستگاه روی X متعدی توپولوژیکی است، نقطه‌ای مانند $y_1 \in U(x)$ و عدد صحیحی مانند $m_1 > 0$ و $\omega \in \sum^2$ ای وجود دارند به قسمی که $F_\omega^{m_1}(y_1) \in X \setminus \bar{B}_{2L_{x.q}}(x)$.

بنابراین

$$d(F_\omega^{m_1}(q), F_\omega^{m_1}(y_1)) \geq d(x, F_\omega^{m_1}(y_1)) - d(x, F_\omega^{m_1}(q)) > 2L_{x.q} - L_{x.q} \geq \frac{1}{2}$$

از این‌رو یا

$$d(F_\omega^{m_1}(x), F_\omega^{m_1}(y_1)) > \frac{1}{4}$$

و یا

$$d(F_\omega^{m_1}(x). F_\omega^{m_1}(q)) > \frac{1}{4}$$

حالت ۲. $L_{x,q} < \delta = \frac{1}{2}$.

چون X بیکران است، $X \setminus \bar{B}_{2\delta}$ یک زیر مجموعه‌ی باز ناتهی از X است. دستگاه روی X متعدی توپولوژیکی است بنابراین نقطه‌ای مانند $y_2 \in U(x)$ و عدد صحیحی مانند $m_2 > 0$ و $\omega \in \sum^2$ ای وجود دارند که

$$F_\omega^{m_2}(y_2) \in X \setminus \bar{B}_{2\delta}(x)$$

این مطلب و اینکه $F_\omega^{m_2}(q) \in \bar{B}_{L_{x,q}}(x) \subset \bar{B}_\delta(x)$ نامساوی زیر را نتیجه می‌دهند.

$$d(F_\omega^{m_2}(q), F_\omega^{m_2}(y_2)) \geq d(x, F_\omega^{m_2}(y_2)) - d(x, F_\omega^{m_2}(q)) > 2\delta - \delta = \delta = \frac{1}{2}$$

بنابراین یا

$$d(F_\omega^{m_2}(x), F_\omega^{m_2}(y_2)) > \frac{1}{4}$$

یا

$$d(F_\omega^{m_2}(x), F_\omega^{m_2}(q)) > \frac{1}{4}$$

از دو حالت بیان شده نتیجه می‌شود که دستگاه دینامیکی $IFS(f_{1,\infty}^0, f_{1,\infty}^1)$ روی X حساس نسبت به شرایط اولیه با ثابت حساسیت $\frac{1}{4}$ است.

بنابر شرایط قضیه‌ی ۱-۳، متعدی توپولوژیکی بودن دستگاه دینامیکی ناخودگردان تابع تکرار به‌دست می‌آید و بعلاوه بنابر قضیه‌ی ۳.۵ دستگاه روی X حساس نسبت

به شرایط اولیه است. بر این اساس نتیجه‌ی زیر را خواهیم داشت.

نتیجه ٦-۳: فرض کنیم دستگاه دینامیکی ناخودگردان تابع تکرار $IFS(f_{1,\infty}^0, f_{1,\infty}^1)$ روی فضای بیکران X دارای ویژگی سایه‌زنی میانگین باشد و $P(IFS(f_{1,\infty}^0, f_{1,\infty}^1))$ روی X چگال باشد و همچنین نقاط کمینه‌ی دستگاه در X چگال باشند. بنابراین طبق آنچه بیان شد، این دستگاه روی X دارای آشوب‌دوانی خواهد بود.

در ادامه نشان می‌دهیم ویژگی سایه‌زنی به همراه شرط متعدی زنجیری و آمیختگی زنجیری می‌تواند متعدی توپولوژیکی بودن دستگاه دینامیکی ناخودگردان تابع تکرار را نتیجه دهد. از این رو قضایای ۳.۷ و ۳.۸ به همراه شرط چگال بودن نقاط تناوبی، نشان می‌دهند که دستگاه دینامیکی ناخودگردان تابع تکرار دارای آشوب‌دوانی خواهد بود.

قضیه ۳-۷. اگر دستگاه دینامیکی ناخودگردان تابع تکرار $IFS(f_{1,\infty}^0, f_{1,\infty}^1)$ دارای ویژگی سایه‌زنی باشد و بعلاوه متعدی زنجیری باشد، آنگاه این دستگاه متعدی توپولوژیکی است.

برهان. فرض کنیم U و V دو زیرمجموعه‌ی باز ناتهی از X باشند و $x \in U$ و $y \in V$ و عدد $\varepsilon > 0$ را در نظر می‌گیریم. از آنجا که این دستگاه دارای ویژگی سایه‌زنی است، $\delta > 0$ای و $\omega \in \sum^2$ ای وجود دارد به طوری که هر δ- مدارنما توسط نقطه‌ای از X، ε- سایه می‌شود. این دستگاه متعدی زنجیری است، بنابراین زنجیری از x به y وجود دارد. δ- مدارنما را می‌توان همان δ- مدارنمای x به y در نظر گرفت. فرض کنیم $x = x_0, x_1, \Lambda, x_n = y$ δ- مدارنما برای $IFS(f_{1,\infty}^0, f_{1,\infty}^1)$ باشد. براساس ویژگی سایه‌زنی $z \in X$ای و $\omega \in \sum^2$ ای وجود دارد به طوری که برای هر $i \in \{0,1,\Lambda, n\}$ داریم $d(F_\omega^i(z), x_i) < \varepsilon$. بنابراین برای ε کوچک داریم $F_\omega^n(U) \cap V \neq \varnothing$ و این یعنی دستگاه دینامیکی ناخودگردان تابع تکرار $IFS(f_{1,\infty}^0, f_{1,\infty}^1)$ متعدی است.

قضیه ۳-۸. اگر دستگاه دینامیکی ناخودگردان تابع تکرار $IFS(f_{1,\infty}^0, f_{1,\infty}^1)$ دارای ویژگی سایه‌زنی باشد و به علاوه آمیختگی زنجیری داشته باشد، آنگاه آمیخته ی توپولوژیکی است.

برهان. فرض کنیم U و V دو زیرمجموعه‌ی باز ناتهی از X باشند. نقاط $a \in U$، $b \in V$ و عدد $\varepsilon > 0$ را طوری در نظر می‌گیریم که $B_\varepsilon(a) \in U$ و $B_\varepsilon(b) \in V$ چون این دستگاه دارای ویژگی سایه‌زنی است، عددی مانند $\delta > 0$ و $\omega \in \sum^2$ ای وجود دارند به طوری که هر δ- مدارنما توسط نقطه‌ای از X ε- سایه می‌شود.
این دستگاه آمیخته‌ی زنجیری است بنابراین $N > 0$ ای وجود دارد به طوری که به ازای هر $n > N$، $x = x_0. x_1. \dots. x_n = y$ یک δ- مدارنما از x به y است. بنابراین برای هر $n > N$، $\omega \in \sum^2$ای وجود دارد که $F_\omega^n(U) \cap V \neq \varnothing$ و این یعنی دستگاه ناخودگردان تابع تکرار $IFS(f_{1,\infty}^0, f_{1,\infty}^1)$ آمیخته‌ی توپولوژیکی و بنابراین متعدی توپولوژیکی است.

٤. آشوب لی – یورک

در این بخش معیاری برای آشوب لی – یورک یک دستگاه دینامیکی $(X. f)$ ارایه می‌شود. ماژور [10] تعریفی برای آشوبناک بودن یک دستگاه دینامیکی $(X. f)$ به صورت زیر عنوان نموده است.
فرض کنیم $H(X)$ مجموعه‌ی همه‌ی همیسان‌ریختی‌های روی فضای متریک فشرده‌ی $(X. d)$ باشد. یک دستگاه $f \in H(X)$ آشوبناک است هرگاه توان مثبتی از f با $(\sum. \sigma)$ نیمه مزدوج باشد. براساس این تعریف، لی[۱۹] [11] تحت شرایطی آشوبناک

[19] Li

بودن دستگاه $(X.f)$ را که درآن $f\in H(X)$ نتیجه گرفته است. (قضیه‌ی ۱-۳)

در ادامه لازم است مفاهیمی چون مجموعه‌ی همزده[20]، آشوب لی – یورک و نگاشت‌های دارای انبساط A-زوجی[21] را تعریف کنیم.

فرض کنیم $(X.d)$ یک فضای متریک فشرده و $f: X\to X$ یک نگاشت پیوسته باشد. زیرمجموعه‌ی S از X که حداقل شامل دو نقطه است، همزده نامیده می‌شود اگر برای هر $x.y\in S$ که $x\neq y$ داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty}\inf d(f^n(x).f^n(y))=0,$$
$$\lim_{n\to\infty}\sup d(f^n(x).f^n(y))>0.$$

اگر X شامل یک زیرمجموعه‌ی همزده‌ی ناشمارا باشد، آنگاه دستگاه دینامیکی $(X.f)$، آشوبناک در حالت لی - یورک نامیده می‌شود [19].

بعلاوه فرض کنیم $(X.d)$ یک فضای متریک و $f: X\to X$ یک نگاشت پیوسته و $A=(a_{ij})_{m\times m}$ که $m\geq 2$، یک ماتریس انتقال باشد. اگر زیر مجموعه‌های $V_1.\dots.V_m$ از X، با شرط $V_i\cap V_j=\partial V_i\cap\partial V_j$ برای هر $(i.j)$، $0\leq i\neq j\leq m$، موجود باشند به قسمی که

$$f(V_i)\supset\bigcup_{a_{ij}=1}V_i\ ,$$

در این صورت f یک نگاشت انبساطی زوجی برای ماتریس A روی V_i، $0\leq i\leq m$، نامیده می‌شود (انبساطی A- زوجی). علاوه بر این f انبساطی A- زوجی اکید است اگر برای هر $0\leq i\neq j\leq m$، داشته باشیم $d(V_i.V_j)>0$ ژانگ[22] و شی[23] [19] با به کارگیری نگاشت‌های انبساطی A - زوجی روی زیر مجموعه‌های بسته و کراندار یک فضای متریک کامل، معیارهایی برای آشوبناک بودن دستگاه در مفهوم لی - یورک و دوانی به‌دست آورده‌اند. در این خصوص بنا بر قضیه‌ی ۱-۳ در [19]، با فرض این‌که نگاشت f روی مجموعه‌های بسته و کراندار $V_1.\dots.V_m$ از فضای X، انبساطی A- زوجی اکید باشد و $\mu>0$ای موجود باشد به طوری که برای هر $x.y\in V_j$ که $0\leq j\leq m$ داشته باشیم:

$$d(f(x).f(y))\geq d(x.y),$$

و همچنین $\alpha\in\sum_m^+(A)$ای موجود باشد به طوری که:

$$d(\cap_{j=0}^{n}f^{-j}(V_{\alpha_j}))\to 0,$$

که در آن A یک ماتریس انتقال تحویل ناپذیراست با شرط این‌که دارای یک مجموع ستونی بیشتر از ۲ باشد، در این‌صورت f دارای یک مجموعه‌ی همزده‌ی ناشماراست و بنابراین دارای آشوب لی - یورک خواهد بود.

در این مقاله تلاش کرده‌ایم شرایط جدیدی را اعمال کنیم تا با فرضیاتی نزدیک به قضیه ۳.۱ در [11] و بدون موارد ذکر شده در [19] آشوب لی – یورک را نتیجه بگیریم. بر این اساس و در ادامه قضیه‌ی مورد نظر را عنوان و اثبات می‌کنیم. در قضیه‌ی زیر برای هر $\varepsilon>0$ به قدر کافی کوچک، $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ را همان مقدار مذکور در تعریف ویژگی سایه‌زنی در نظر می‌گیریم.

قضیه ٤-١. فرض کنیم $(X.d)$ یک فضای متریک فشرده و همسان‌ریختی $f: X\to X$ دارای ویژگی سایه‌زنی باشد. اگر دو نقطه‌ی دافع متمایز p_0 و p_1 و عدد صحیح $n>0$ موجود باشد به طوری که یک δ-زنجیر از p_0 به p_1 و از p_1 به p_0 با طول $n+1$ موجود باشد، آنگاه نگاشت f دارای یک مجموعه‌ی ناشمارای همزده است و بنابراین f دارای آشوب لی - یورک خواهد بود.

برهان. $\varepsilon>0$ را ثابت و به قدر کافی کوچک در نظر می‌گیریم. همسایگی‌های H_0 و H_1 از حوضچه‌ی نقاط دافع p_0 و p_1 را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم به طوری که $d(H_0.H_1)>0$. برای $i=0,1$ قرار می‌دهیم $H_i=\{p\in X: d(p.p_i)\leq\varepsilon\}$.

برای هر $\alpha=(\alpha_0.\alpha_1.\dots.\alpha_m.\dots)\in\sum^2$، δ-زنجیر از p_{α_0} به p_{α_1} با طول $n+1$ را به صورت

[20] Scrambled
[21] A-coupled expanding
[22] Zhang
[23] Shi

$\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ و δ- زنجیر از p_{α_1} به p_{α_2} با طول $n+1$ را به شکل $\{y_n, y_{n+2}, \dots, y_{2n+1}\}$ و همین‌طور δ- زنجیر از $p_{\alpha_{m-1}}$ به p_{α_m} برای $m \geq 1$ را با همین طول $n+1$ به صورت $\{y_{(m-1)n+m-2}, \dots, y_{mn+m-1}\}$ در نظر می‌گیریم. بنابراین $\{y_0, y_1, \dots, y_m, \dots\}$ یک δ- مدارنما از f است که $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ همان مقدار بیان شده در تعریف ویژگی سایه‌زنی f است. از آنجا که f دارای ویژگی سایه‌زنی است، $z_\alpha \in X$ای وجود دارد به طوری که برای هر $l \in \mathbb{Z}$ داریم $d(f^{ln}(z_\alpha). p_{\alpha_l}) < \varepsilon$.

در این‌صورت داریم:

$$G_\alpha^m := \bigcap_{i=0}^{m} f^{-in}(H_{\alpha_i}) \neq \emptyset.$$

از آنجا که نقاط p_0 و p_1 نقاط دافع هستند، وقتی $m \to \infty$ عبارت

$$d(G_\alpha^m) = d\left(\bigcap_{i=0}^{m} f^{-in}(H_{\alpha_i})\right)$$

به صفر میل می‌کند که در آن d نشان دهنده‌ی قطر مجموعه است. می‌خواهیم یک مجموعه‌ی ناشمارای همزده بسازیم. بر این اساس برای $\alpha = (\alpha_0. \alpha_1. \dots. \alpha_m. \dots) \in \sum^2$ قرار می‌دهیم:

$$\hat{\beta} = (\alpha_0. \alpha_1. \dots. \alpha_n, 0, \alpha_0. \alpha_1. \dots. \alpha_{n+1}, 0, \alpha_0. \alpha_1. \dots. \alpha_{n+2}, 0, \alpha_0, \dots. \alpha_m, \dots)$$

با توجه به ساختار بالا $\hat{\beta} \in \sum^2$ و $\lim_{m\to\infty} d\left(G_{\hat{\beta}}^m\right) = 0$ و بنابراین با توجه به این‌که $G_{\hat{\beta}}^m = \bigcap_{i=0}^{m} f^{-in}(H_{\hat{\beta}_i})$ مجموعه‌ای ناتهی است، $\bigcap_{m\geq 0} G_{\hat{\beta}}^m$ مجموعه‌ای تک عضوی خواهد بود. لذا قرار می‌دهیم

$$\{p_{\hat{\beta}}\} := G_{\hat{\beta}}^m = \bigcap_{m\geq 0} G_{\hat{\beta}}^m,$$
$$S := \{p_{\hat{\beta}} : \alpha \in \sum^2\}.$$

برای هر $\beta. \gamma \in \sum^2$ توجه داریم که $\beta \neq \gamma$ اگر و فقط اگر $\hat{\beta} \neq \hat{\gamma}$، لذا برای بینهایت i، $H_{\hat{\gamma}_i} \cap H_{\hat{\beta}_i} = \emptyset$ بنابراین $G_{\hat{\beta}}^m \cap G_{\hat{\gamma}}^m = \emptyset$ و در نتیجه $p_{\hat{\beta}} \neq p_{\hat{\gamma}}$. از این‌رو S مجموعه‌ای ناشماراست. حال کافی‌ست نشان دهیم S مجموعه‌ای همزده برای f است.

برای هر $p_{\hat{\beta}}. p_{\hat{\gamma}} \in S$ با فرض $p_{\hat{\beta}} \neq p_{\hat{\gamma}}$، نقاط $\beta. \gamma \in \sum^2$ که $\beta \neq \gamma$ وجود دارند که $\hat{\beta}$ و $\hat{\gamma}$ توسط آنها تعریف می‌شوند. بنابر شکل ساختاری $\hat{\beta}$، $\gamma_s \neq \beta_s$ و دنباله‌ی نامتناهی غیرصعودی $\{m_j\}_{j=1}^{\infty}$ وجود دارند به طوری که:

$$f^{m_j}(p_{\hat{\beta}}) \in H_{\beta_s},$$
$$f^{m_j}(p_{\hat{\gamma}}) \in H_{\gamma_s}.$$

در نتیجه

$$d(f^{m_j}(p_{\hat{\beta}}). f^{m_j}(p_{\hat{\gamma}})) \geq d(H_{\beta_s}. H_{\gamma_s}) > 0.$$

از طرفی برای $k \geq 2$ داریم:

$$f^{kn+4k-3}(p_{\hat{\beta}}), f^{kn+4k-3}(p_{\hat{\gamma}}) \in G_\alpha^{n_k}.$$

که در نتیجه:

$$d(f^{kn+4k-3}(p_{\hat{\beta}}), f^{kn+4k-3}(p_{\hat{\gamma}})) \leq d(G_\alpha^{n_k}).$$

و چون $\lim_{m\to\infty} d(G_\alpha^m) \to 0$، داریم:

$$\lim_{k\to\infty} d(f^{kn+4k-3}(p_{\hat{\beta}}), f^{kn+4k-3}(p_{\hat{\gamma}})) = 0.$$

بنابراین نتیجه می‌شود S مجموعه‌ای همزده برای f است. از این‌رو f دارای آشوب لی – یورک است.

توجه: به نظر می‌رسد که قضیه‌ی ۱-۴ را بتوان برای دستگاه‌های ناخودگردان تابع تکرار تعمیم داد که این می‌تواند به عنوان پرسشی در آینده مورد بررسی قرار گیرد.

نتیجه‌گیری: ما در این مقاله مفهوم جدیدی تحت عنوان دستگاه دینامیکی ناخودگردان تابع تکرار را معرفی و مفاهیم متعددی مانند تعدی توپولوژیکی، سایه‌زنی میانگین، حساس نسبت به شرایط اولیه بودن و آمیختگی را برای آن تعریف کردیم و با استفاده از ابزاری چون سایه‌زنی میانگین و چگال بودن نقاط کمینه‌ی دستگاه، تعدی توپولوژیکی دستگاه دینامیکی ناخودگردان تابع تکرار را نتیجه گرفتیم. سپس با تعمیم قضیه‌هایی از وانگ و نیو، آشوب‌دوانی را برای این دستگاه به‌دست آوردیم. همچنین برای دستگاه دینامیکی $(X. f)$ که f نگاشتی پیوسته روی فضای متریک فشرده‌ی X است، تحت شرایطی آشوب لی – یورک را نتیجه گرفتیم.

فهرست منابع

[1] Banks J, Brooks J, Cairns, G, Davis G, and Stacey P, (1992). On Devaney definition of chaos, Amer - Math Monthly.

[2] Barnsley M.F, (1988). Fractals every where, Academic Press, Boston.

[3] Birkhoff G.D, (1950). Collected mathematical papers, New York, Vols.

[4] Blank M.L, (1988). Metric properties of ε- trajectories of dynamical systems with stochastic behavior, Ergodic Theory Dynam. Systems.

[5] Devaney R.L, (1989). An introduction to chaotic dynamical systems Addiso - Wesley

[6] Fatehi nia M, (2016). Iterated function systems with the average shadowing property, Topology Proceeding.

[7] Glavan V, (2006). Shadowing in parameterized IFS, Fixed Point Theory.

[8] Gu R, (2008). On ergodicity of systems with the asymptotic average shadowing property, Computers and Mathematics with Applications.

[9] Huang W, and Ye X, (2002). Devaney's Chaos or 2-scattering implies Li - yorke's chaos, Topology and It's Applications.

[10] Koscielniak P, and Mazur M, (2007). Chaos and shadowing property, Topology and its Applications.

[11] Li Risong, (2016). A note on chaos and shadowing property, International Journal of General Systems.

[12] Li TY, and Yorke J, (1975). Period three implies chaos, Amer Math Monthly.

[13] Niu Y, (2011). The average shadowing property and strong ergodicity, Journal of mathematical Analysis and Applications.

[14] Park J, and Zhang Y, Average shadowing properties on compact metric spaces.