دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره سی و یکم، مرداد و شهریور ۱۴۰۰
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

تخصیص هزینه‌های ثابت با استفاده از کارایی متقاطع و نظریه بازی

مصطفی داوطلب علیائی*[۱]، فاطمه قندی[۲]، فریده داوطلب علیائی[۳]

(۱و۳) استادیار، گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران
(۲) گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، لویزان، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۱۰/۲۴ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۰۶/۲۷

چکیده

در بسیاری از کاربردها هزینه‌هایی ثابت برای ایجاد زیر ساخت‌های مشترک برای واحدهای یک سازمان وجود دارند که می‌بایستی میان واحدهای تصمیم‌گیرنده تقسیم شود. نحوه تخصیص هزینه‌ها میان واحدها که در رقابت با یکدیگر هستند از اهمیت زیادی برخوردار است. تحلیل پوششی داده‌ها ابزاری مناسب برای ارزیابی عملکرد واحدها با چندین ورودی و چندین خروجی است که بطور موفقی در مساله تخصیص هزینه‌های ثابت بکار گرفته شده است. دو روش عمده‌ای که برای تخصیص هزینه‌های ثابت مورد استفاده قرار می‌گیرند براساس بهبود و یا تغییر ناپذیری کارایی نسبی واحدها پس از تخصیص هستند. اما در تخصیص هزینه‌ها در میان واحدها بایستی هم جنبه رقابتی و هم جنبه همکاری میان واحدها در نظر گرفته شود. به‌همین منظور استفاده از تکنیکی که براساس ارزیابی همتا، کارایی واحدها را مورد بررسی قرار دهد بیشتر معقولانه به نظر می‌رسد. برای این منظور ما از روش ارزیابی کارایی متقاطع در تحلیل پوششی داده‌ها برای انجام تخصیص هزینه‌های ثابت استفاده می‌کنیم. در این مقاله با استفاده از روش ارزیابی کارایی متقاطع و مفاهیمی از نظریه‌ی بازی، یک روش تخصیص هزینه ثابت جدید، به گونه‌ای ارائه می‌دهیم که بردار امتیازهای کارایی متقاطع واحدها پس از تخصیص پاراتو باشد. در نهایت به کمک یک مثال کاربردی به بیان بهتر روش پیشنهادی و مقایسه آن با برخی از روش‌های موجود می‌پردازیم.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، تخصیص هزینه‌های ثابت، نظریه بازی، ارزیابی کارایی متقاطع.

---

*.عهده‌دار مکاتبات: Email: M.davtalab-olyaie@kashanu.ac.ir

۱- مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها[1] (DEA) یک روش غیر پارامتری برای اندازه‌گیری کارایی نسبی گروهی از واحدهای تصمیم گیرنده‌ی همگن است که برای اولین بار توسط فارل معرفی شد. سپس چارنز و همکاران [۱] مدل CCR را در سال ۱۹۸۷ معرفی کردند و بعد از آن بنکر و همکاران [۲] مدل BCC را ارائه نمودند. مهم‌ترین ایده DEA، تولید مجموعه‌ای از وزن‌های بهینه برای هر DMU به منطور ماکسیمم سازی اندازه کارایی نسبی آن است. تمامی واحدها توسط روش‌های مختلف DEA، به دو دسته کارا و ناکارا تقسیم می‌گردند. اما از آنجاییکه روش‌های رایج DEA، مانند روش CCR[2] و BCC[3] در واقع یک خودارزیابی بین واحدها انجام می‌دهند، این خودارزیابی باعث می‌شود چندین واحد به عنوان واحد کارا معرفی گردند. روش‌های رایج هیچ تمایزی میان این واحدهای کارا قائل نمی‌شوند و این ضعف اصلی روش‌های رایج و سنتی DEA است.

سکستون و همکاران [۳] برای رفع مشکل مذکور، روش ارزیابی کارایی متقاطع[4] را به عنوان توسیعی از DEA ارائه دادند. به کمک روش پیشنهادی آن‌ها، عملکرد یک واحد با مقایسه وزن‌های ورودی و خروجی بهینه دیگر واحدها، ارزیابی می‌گردد. به بیان دیگر روش ارزیابی کارایی متقاطع به جای خودارزیابی واحدها، از ارزیابی همتا برای تعیین کارایی واحدها استفاده می‌نماید. حداقل سه مزیت برای روش ارزیابی کارایی متقاطع وجود دارد. اول آن که این روش، یک ترتیب انحصاری را میان واحدهای تصمیم‌گیرنده[5] (DMUها) ایجاد می‌کند [۴]. ثانیا جنبه‌های وزنی غیر منطقی را بدون اعمال هیچگونه محدودیت وزنی حذف می‌کند [۵] و سوم آن که روش ارزیابی کارایی متقاطع به طور موثری می‌تواند میان عملکردهای ضعیف و خوب، تفاوت قائل شود [۶]. اما در کنار تمام مزایای روش کارایی متقاطع، معایبی نیز در استفاده از این روش وجود دارد. یکی از معایب اصلی آن، غیر یکتایی وزن‌های بهینه DEA است که منجر به تولید امتیازهای کارایی متقاطع مختلف می‌شود. برای حل این مشکل دویل و گرین [۷] مدل‌های خوشبینانه و بدبینانه را به عنوان اهداف ثانویه معرفی کردند. این دو مدل با تضمین شرط ثابت ماندن کارایی DMUی تحت ارزیابی، مجموعه‌ای از وزن‌های بهینه را برای هر DMU به گونه‌ای محاسبه می کند که کارایی متقاطع سایر DMUها، تاحد امکان ماکزیمم یا مینیمم شود.پس از آن نیز با توسیع روش آن‌ها لیانگ و همکاران [۸] و ونگ و چاین [۹] نیز مدل‌های هدف ثانویه‌ای ارائه دادند. پژوهش‌های دیگری نیز در این زمینه انجام شده است که از جمله آن‌ها می‌توان به [۱۰]، [۱۱] و [۱۲] اشاره کرد.

دومین ضعف اساسی روش ارزیابی کارایی متقاطع، پاراتو نبودن بردار کارایی متقاطع حاصل است. به منظور رفع این ضعف، برخی محققین در پژوهش‌هایی همچون [۱۳] و[۱۴]، با در نظر گرفتن DMUها به عنوان بازیکن‌ها در یک نظریه بازی، برای رفع غیر پاراتو بودن کارایی متقاطع واحدهای تصمیم گیرنده، مدلی ارائه دادند. سپس وو و همکاران [۱۵] الگوریتمی ارائه دادند که با حل چند مدل، نمرات کارایی متقاطع همه DMU ها را بهبود پاراتو می‌دهد.

DEA دارای کاربردهای فراوان در زمینه‌های مختلف می‌باشد. یکی از این کاربردها تخصیص هزینه‌های ثابت[6] میان واحدها است. تخصیص هزینه‌های ثابت عبارت است از هزینه‌ای که برای ایجاد زیر ساخت‌های مشترک، برای زیر واحدهای یک سازمان استفاده می‌شود. این روش در بانک‌ها و سایر سیستم های اداری برای زمانی که قسمتی و یا تمام هزینه‌ی یک پروژه از بودجه‌ی موجود تامین نشود، کاربرد دارد.

[1] Data envelopment analysis
[2] Charnes, Cooper and Rhodes
[3] Banker, Charnes and Cooper
[4] Cross-efficiency evaluation
[5] Decision Making Unit
[6] Fixed costs allocation

کوک وکرس [۱۶] برای اولین بار تخصیص هزینه‌های ثابت را بر اساس دو اصل تغییرناپذیری کارایی و پاراتومینیمالیتی مطرح کردند. کوک و ژو [۱۷] به منظور تخصیص هزینه‌های ثابت، رویکرد کوک و کرس را به مدل BCC گسترش دادند. لین [۱۸] نشان داد روش کوک و ژو با اضافه کردن یکسری محدودیت‌ها نشدنی می‌شود، سپس او برای حل این مشکل مدل جدیدی ارائه داد. جهانشاهلو و همکاران [۱۹] اصل کمینه پاراتو در [۸] را نقض کردند و روش خود را با استفاده از فرمول ساده‌ای پیشنهاد کردند، اما این رویکرد در برنامه‌های کاربردی واقعی، امکان‌پذیر نیست. امیرتیموری و کردرستمی [۲۰] مدلی از تخصیص هزینه‌های ثابت را پیشنهاد کردند که در آن میانگین کارایی همه DMUها تغییر نکند. مصطفایی [۲۱]هزینه‌های ثابت را به گونه‌ای تخصیص داد که بازده به مقیاس و کارایی هر DMU بعد از تخصیص بدون تغییر باقی بماند.

بیسلی [۲۲] با حداکثر کردن میانگین کارایی پس از تخصیص در یک مجموعه‌ی وزن‌های مشترک و با حل یک سری مدل های غیر خطی، یک طرح تخصیص منحصر به فرد را به دست آورد. اگر چه امیرتیموری و کردرستمی [۲۰] نمونه ای عددی برای نشان دادن نشدنی بودن بیسلی ارائه دادند، اخیرا جهانشاهلو و همکاران [۲۳] ثابت کردند که روش بیسلی همیشه امکان پذیر است. حسین زاده لطفی و همکاران [۲۴] نیز روشی جدید برای تخصیص هزینه ثابت واحدها ارائه دادند.

تمامی روش‌های ذکر شده برای محاسبه کارایی واحدها، از خود ارزیابی استفاده می‌کنند. در این مقاله قصد داریم روشی برای تخصیص منابع ارائه کنیم که به جای خودارزیابی از کارایی متقاطع برای بدست آوردن کارایی واحدها استفاده کند، به نحوی که بردار کارایی متقاطع واحدها پس از تخصیص پاراتو باشد. بدین منظور از مفاهیم موجود در نظریه بازی نیز استفاده می‌نماییم. نظریه بازی[7] در واقع روشی برای تصمیم‌گیری شرایطی است که در آن هرگونه اقدام توسط تصمیم گیرندگان ممکن است بر سود و زیان تصمیم‌گیرنده دیگر تاثیر بگذارد. هر بازی شامل مجموعه‌ای از بازیکنان، مجموعه‌ای از استراتژی‌های ممکن برای هریک از آن‌ها و مجموعه‌ای از توابع سود برای هر بازیکن است. برای اطلاع بیشتر در زمینه نظریه بازی می‌توان به [۲۵] مراجعه نمود.

در قسمت بعدی به شرح مفاهیم مورد نیاز در مبحث کارایی متقاطع، نظریه بازی و تخصیص هزینه ثابت خواهیم پرداخت.سپس در قسمت سوم مقاله به شرح روش پیشنهادی می‌پردازیم. این روش قادر خواهد بود تخصیصی عادلانه میان واحدها به‌گونه‌ای بدست آورد که بردار کارایی متقاطع واحدها پس از تخصیص پاراتو باشد. بدین منظور ابتدا با استفاده از روش کارایی متقاطع، کارایی مربوط به هر واحد را محاسبه نموده و در ادامه با به کار بردن مفاهیم موجود در نظریه بازی‌ها، مقدار شیپلی[8] را برای هر واحد محاسبه می‌نماییم و به کمک این مقادیر، وزن‌های بهینه برای هر واحد را بدست می‌آوریم. سپس کارایی متقاطع پاراتو پس از تخصیص برای واحدها با به کار بردن این وزن‌ها محاسبه می‌گردد. در نهایت نیز با حل یک مثال عددی شامل ۱۲ واحد با ۳ ورودی و ۲ خروجی به تشریح مدل پیشنهادی می‌پردازیم. به کمک مثال مذکور نشان می‌دهیم که روش پیشنهادی قادر است یک تخصیص جدید و متفاوت با سایر روش‌ها میان واحدها ایجاد کند، از طرفی با توجه به داده‌ها نتیجه می‌گیریم که این تخصیص، یک تخصیص عادلانه میان واحدها در مقایسه با تخصیص حاصل از دیگر روش‌ها تولید می‌کند.

۲- مفاهیم مقدماتی

در این مقاله از سه مفهوم کارایی متقاطع، نظریه بازی

[7] Game theory
[8] Shapley value

و تخصیص هزینه ثابت به منظور ارائه روش پیشنهادی، استفاده می‌شود. از این رو در این بخش به بیان توضیحاتی مقدماتی در مورد این سه مفهوم می‌پردازیم.

۲-۱- مفاهیمی مقدماتی از کارایی متقاطع

فرض کنیم هر DMU شامل m ورودی و s خروجی باشد. مدل CCR که توسط چارنز و همکاران [۱] ارائه شد به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \max \quad & E_{dd} = u_d^{*t} y_d \\ \text{s.t.} \quad & v_d^{*t} x_d = ۱, \\ & v_d^{*t} x_j - u_d^{*t} y_j \geq ۰,\ j = ۱,\dots,n, \\ & v_d, u_d \geq ۰. \end{aligned} \tag{۱}$$

در مدل‌های رایج DEA مانند مدل CCR، DMUها به کمک خودارزیابی به دو دسته کارا و ناکارا طبقه بندی می‌شوند. اما به دلیل انعطاف‌پذیری نامحدود وزن‌ها در مدل‌های خودارزیابی DEA، ممکن است برخی DMUهای ناکارا، در واقعیت عملکرد کلی بهتری نسبت به برخی واحدهای کارا داشته باشند. به منظور افزایش قدرت تشخیص DEA، ارزیابی کارایی متقاطع به عنوان روش جایگزینی برای خودارزیابی در سال ۱۹۸۶ توسط سکستون و همکارانش [۳] مطرح شد و یک روش ارزیابی همتا نامیده شد، زیرا کارایی یک DMU با مقایسه توسط وزن‌های ورودی و خروجی DMUهای دیگر، ارزیابی می‌گردد.
در واقع روش کارایی متقاطع یک روش دو فازی است که در فاز اول آن با استفاده از مدل مضربی CCR وزن‌های $\{u_d^{*t}, v_d^{*t}\}$ بهینه را برای $DMU_d, d=۱,\dots,n$ به دست می‌آوریم، سپس در فاز دوم کارایی متقاطع DMU_j تحت وزن‌های بهینه DMU_d از رابطه زیر محاسبه می‌کنیم:

$$E_{dj} = \frac{u^*_d y_j}{v^*_d y_j} \tag{۲}$$

و در نهایت امتیازهای کارایی متقاطع DMU_j به صورت میانگینی از E_{dj} ها تعریف می‌شود:

$$E_j = \frac{1}{n}\sum_{d=1}^{n} E_{dj} \tag{۳}$$

۲-۲- مفاهیمی مقدماتی از تخصیص هزینه ثابت

یکی از کاربردهای مهم تکنیک‌های DEA، تخصیص هزینه ثابت میان DMUهای متجانس است. اولین تلاش برای حل مسئله تخصیص هزینه به کمک روش‌های DEA، توسط کوک و کرس [۱۶] انجام گرفت. در روش آن‌ها به هزینه تخصیصی به عنوان یک ورودی اضافی نگاه شده است و بر اساس دو اصل پایایی کارایی و پاراتو-مینیمالیتی بدست آمده است.
فرض کنید هزینه R باید میان n واحد توزیع شود، یعنی به هر DMU مقدار r_j به گونه‌ای تخصیص داده شود که

$$\sum_{j=1}^{n} r_j = R \tag{۴}$$

کوک و کرس برای رسیدن به هدف از مدل CCR در ماهیت خروجی شروع کردند. در روش آن‌ها مقدار هزینه ثابت R به گونه‌ای میان n واحد تصمیم‌گیرنده تقسیم شود که به منظور رعایت انصاف، هزینه تخصیصی، هیچ تاثیری بر کارایی نداشته باشد. با اضافه کردن ورودی جدید به مدل CCR در ماهیت خروجی مدل زیر را داریم.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{I} v_{ijo} x_{ijo} + v_{(I+1)jo} r_{jo} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{k=1}^{k} u_{kjo} y_{kjo} = 1, \\ & -\sum_{k=1}^{k} u_{kjo} y_{kjo} + \sum_{i=1}^{I} v_{ijo} x_{ijo} + v_{(I+1)jo} r_{jo} \geq 0, \\ & \quad j=1,\dots,n \\ & u_{kjo}, v_{ijo} \geq 0, \quad i=1,\dots,I+1, \quad k=1,\dots,k. \end{aligned} \tag{۵}$$

کوک و کرس نشان دادن که هر تخصیصی که به

مجموعه زیر تعلق داشته باشد یک تخصیص منصفانه است.

$$A=\{r|\sum_{j\in F}\lambda_j^{*t}r_j = r_t, t\in N\} \quad (۶)$$

که در آن λ_j^{t*} متغیرهای بهینه دوگان در مدل (۵) هستند. N مجموعه اندیس واحدهای ناکارا و F مجموعه اندیس واحدهای کارا را نشان می‌دهد.

کوک و ژو [۱۷] روش کوک و کرس را به مدل‌های پوششی در ماهیت ورودی و خروجی تعمیم دادند و یک تخصیص هزینه شدنی که الزامی بر بهینه بودن آن نیست را ارائه کردند.

به طریق مشابه و با در نظر گرفتن هزینه تخصیصی به عنوان یک ورودی جدید، بیسلی [۲۲] روشی ارائه داد که تاثیر ایجاد شده توسط هزینه تخصیصی بر میانگین کارایی در میان تمام DMUها را بررسی می‌کند و با اضافه کردن قیود تحمیلی، یک تخصیص هزینه یکتا بدست می‌آورد.

۲-۳- مفاهیمی مقدماتی از نظریه بازی

نظریه بازی را می‌توان به عنوان علم مدلسازی و بررسی رفتار سیستم‌های تصمیم‌گیرنده تعریف کرد. بازی استراتژیک، بازی است که در آن هر بازیکن، استراتژی خود را یک بار انتخاب می‌کند و این انتخاب به صورت همزمان برای همه بازیکنان اتفاق می‌افتد. تفاوت اصلی بازی استراتژیک با یک مسئله تصمیم‌گیری این است که هر بازیکن علاوه بر تفکر در مورد حرکت‌های خود، باید به حرکت بازیکنان دیگر هم توجه داشته باشد. مبحثی که در نظریه بازی‌ها دارای اهمیت زیادی است، محاسبه پیامد و یا عایدی هر بازیکن در یک بازی است. تابع مشخصه، تابعی است که بدین منظور استفاده می‌شود. اگر x_{ij} پیامد مربوط به بازیکن j اُم با مولفه i اُم باشد، آنگاه تابع مشخصه $C(k)$ بیشترین پیامد ممکن برای بازیکن k اُم در بازی را نشان می‌دهد.

$$\begin{aligned} c(k) = \max \quad & \sum_{i=1}^{m} w_i^k x_{ik} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{m} w_i^k = 1, \\ & w_i^k \ge 0, i=1,\dots,m. \end{aligned} \quad (۷)$$

اگر N مجموعه تمام n بازیکن در بازی باشد، هر زیرمجموعه s تایی از بازیکنان که در بازی با یکدیگر توافق می‌کنند، ائتلاف S را تشکیل خواهند داد. با قرار دادن s به جای k در فرمول فوق می‌توان تابع مشخصه ائتلاف را نیز محاسبه نمود.

مفهوم رایج دیگر در نظریه بازی طرف مقابل تابع مشخصه است که در رابطه (۷) ذکر شد. اگر به جای ماکسیمم‌سازی در فرمول (۷) مینیمم‌سازی انجام شود طرف مقابل یا $d(k)$ بدست می‌آید.

مسئله مهم در نظریه بازی‌های ائتلافی، تقسیم عادلانه سود حاصل بین بازیکنان یک ائتلاف است. شیپلی [۲۶] برای اولین بار مفهموم ارزش شیپلی را به عنوان یک راه تقسیم منصفانه پیامد معرفی نمود.

مقدار شیپلی برای هر بازیکن i در بازی (N,D) از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌گردد:

$$\varphi_i(D) = \sum_{S|i\in S\subset N} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}\{D(S)-D(S\{i\})\} \quad (۸)$$

که s تعداد اعضای ائتلاف مجموعه‌ی S است.

۳- روش جدید تخصیص هزینه‌های ثابت

فرض کنید n تا DMU که دارای m ورودی x_{ij} (i=1,..,n) و s خروجی $y_{rj}, r=1,\dots,s$ موجودند. همانطور که در بخش‌های قبل هم اشاره شد، با استفاده از مدل CCR در DEA که توسط چارنزکوپر[۱] ارائه گردیده است، می‌توان کارایی هر DMU_k را به صورت زیر محاسبه نمود.

$$\theta_k^* = \max \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rk}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik}}$$

$$\text{s.t.} \quad \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \le 1, \quad j=1,\dots,n, \qquad (9)$$

$$u_r, v_i \ge \varepsilon, \quad r=1,\dots,s,\ i=1,\dots,m.$$

فرض کنید می‌خواهیم هزینه‌ی ثابت R را بین n تا DMU تقسیم کنیم، بنابراین به هر DMU یک هزینه r_j اختصاص داده می‌شود که $\sum_{j=1}^{n} r_j = R$. اگر هزینه‌ی ثابت R را به عنوان ورودی جدید در نظر بگیریم، آنگاه کارایی DMU_k از رابطه‌ی زیر قابل محاسبه خواهد بود:

$$e_k^*(k) = \max \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r^k y_{rk}}{\sum_{i=1}^{m} v_i^k x_{ik} + v_{m+1}^k r_k^k}$$

$$\text{s.t.} \quad \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r^k y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i^k x_{ij} + v_{m+1}^k r_j^k} \le 1,$$

$$j=1,\dots,n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} r_j^k = R, \qquad (10)$$

$$r_j^k \ge 0,\ j=1,\dots,n,$$

$$u_r^k, v_i^k, v_{m+1}^k \ge \varepsilon,$$

$$r=1,\dots,s,\ i=1,\dots,m.$$

توجه شود که مدل فوق غیر خطی می‌باشد، با استفاده از تبدیل چارنز کوپر [۱] می‌توان آن را به صورت زیر خطی کرد:

$$\max \sum_{r=1}^{s} u_r^k y_{rk}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{r=1}^{s} u_r^k y_{rj} - \left(\sum_{i=1}^{m} v_i^k x_{ij} + v_{m+1}^k r_j^k\right) \le 0,$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i^k x_k + r_k = 1, \qquad (11)$$

$$\sum_{j=1}^{n} r_k = R v_{m+1}^k,$$

$$r_k \ge 0$$

فرض کنید $(u_r^*, v_i^*, r_j^{k*}, v_{m+1}^{k*})$ جواب بهینه حاصل از حل مدل فوق باشد. با استفاده از این جواب بهینه می‌توانیم جدول کارایی متقاطع را طبق روش سکستون و همکاران [۳] از مدل زیر محاسبه کنیم:

$$e_{jk} = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r^{k*} y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i^{k*} x_{ij} + r_j^{k*}} \quad j=1,\dots,n \qquad (12)$$

فرض کنید جدول کارایی متقاطع را به فرم جدول ۱ بدست آورده‌ایم.

حال با استفاده از روشی که با ترکیب نظریه‌ی بازی و DEA در [۲۷] ارائه گردیده است، تلاش می‌کنیم تا مقادیر کارایی متقاطع پاراتویی برای واحدها محاسبه کنیم.

جدول (۱): کارایی‌های متقاطع

DMU	1	2	3	…	n
1	e_{11}	e_{12}	e_{13}	…	e_{1n}
2	e_{21}	e_{22}	e_{23}	…	e_{2n}
3	e_{31}	e_{32}	e_{33}	…	e_{3n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	e_{n1}	e_{n2}	e_{n3}	…	e_{nn}

بدین منظور n تا DMU را به عنوان n بازیکن در نظر می‌گیریم، کافی است داده‌های جدول (۱) را نرمالایز نماییم. بدین منظور همه‌ی عناصر هر سطر جدول یعنی $(e_{d1},...,e_{dn})$ که d=1,…,n را بر مقدار $\sum_{d=1}^{n} e_{dp}$ تقسیم کنیم. با این کار، مقادیر $(e_{d1}',...,e_{dn}')$ محاسبه می‌گردند. حال برنامه‌ی خطی زیر را برای تعیین انتخاب مناسب ترین وزن‌ها برای هر DMU ارائه می‌دهیم:

$$D(j) = \min \sum_{d=1}^{n} w_d^j e_{dj}^t$$
$$\text{s.t.} \quad \sum_{d=1}^{n} w_d^j = 1, \qquad (۱۳)$$
$$w_d^j \geq 0.$$

حال فرض کنیم S زیر مجموعه‌ای از n تا بازیکن بازی باشد که آن را به عنوان یک ائتلاف در نظر می‌گیریم. مقدارکارایی ائتلاف S از رابطه‌ی زیر قابل محاسبه است:

$$e_d'(S) = \sum_{j \in S} e_{dj}', \ d=1,...,n \qquad (۱۴)$$

از آنجایی که مدل فوق زیرجمعی است، طبق [۲۶] می‌توان طرف مقابل بازی یعنی (N,C) را با جایگذاری min به جای max در مدل فوق به صورت زیر در نظر گرفت:

$$D(j) = \min \sum_{d=1}^{n} w_d^j e_{dj}'$$
$$\text{s.t.} \quad \sum_{d=1}^{n} w_d^j = 1, \qquad (۱۵)$$
$$w_d^j \geq 0.$$

جواب بهینه‌ی D(j) کمترین مقدار عایدی که بازیکن j می‌تواند در بازی بپذیرد را محاسبه می‌کند. واضح است که برای ائتلاف مذکور $S \subset N$ رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$D(S) = \min \sum_{d=1}^{n} w_d^j e_{dj}'$$
$$\text{s.t.} \quad \sum_{d=1}^{n} w_d = 1, \qquad (۱۶)$$
$$w_d \geq 0, d = 1,...,n.$$

به وضوح بازی (N,D) فرا جمعی می‌باشد، یعنی به ازای هر $S \subset N$ و $T \subset N$ که $S \cap T = \phi$:

$$(S \cup T) \geq D(S) + D(T)$$

پس طبق تعریف ارائه شده در [۱۷] رابطه‌ی زیر میان بازی (N,C) و (N,D) برقرار است:

$$D(S) + C(N \setminus S) = 1 \quad \forall S \subseteq N$$

بنابراین (N,C) و (N,D) بازی‌های دوال هستند، در نتیجه مقدار شیپلی آن‌ها یکسان است. حال بردار $Z = (Z_1,...,Z_n)$ برای n تا DMU به گونه‌ای محاسبه می‌شود که در شرایط زیر صدق کند:

۱) رابطه‌ی فردی: $Z_j \geq D(j), j = 1,...,n.$ این شرط بیان می‌کندکه برای هر بازیکن باید پیامدی تضمین شود که حداقل برابر با مقداری باشد که در صورت تشکیل ائتلاف یک نفره برایش حاصل می‌شد.

از طرفی تخصیص باید به گونه‌ای باشد که همه ثروت ائتلاف بزرگ توزیع گردد. بنابراین شرط دوم به صورت زیر خواهد بود:

۲) رابطه‌ی ائتلاف بزرگ: $\sum_{j=1}^{n} Z_j = D(N) = 1$

همانطور که قبلا هم اشاره شد، مقدار شیپلی برای هر بازیکن i در بازی (N,D) از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌گردد:

$$\varphi_i(D) = \sum_{S|i \in S \subset N} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \{D(S) - D(S\{i\})\} \qquad (۱۷)$$

که s تعداد اعضای ائتلاف مجموعه‌ی S است.

عبارت $\omega e' \in R^n$ را به عنوان تقریبی از $Z=(Z_1,\dots,Z_n)\in R^n$ در نظر می‌گیریم و برنامه خطی زیر را برای بدست آوردن $\omega=(\omega_1,\dots,\omega_n)\in R^n$ حل می‌نماییم:

$$\begin{aligned} \min\ & p \\ \text{s.t.}\ & \omega e'_j + s_j^+ - s_j^- = Z_j, \\ & \omega_1+\dots+\omega_n = 1, \\ & s_j^+ \le p, s_j^- \le p, j=1,\dots,n, \\ & \omega_i \ge 0, i=1,\dots,n, \\ & s_j^+, s_j^- \ge 0, j=1,\dots,n. \end{aligned} \tag{۱۸}$$

که e'_j، j- امین بردار سطری ماتریس e' است. حال فرض کنید $(p^*,\omega^*,s^{+*},s^{-*})$ یک جواب بهینه، حاصل از حل مدل فوق باشد. آنگاه دو حالت خواهیم داشت:

۱. حالت اول: $p^*=0$، در این حالت رابطه‌ی $z=\omega^* e'$ برقرار خواهد بودو همه‌ی بازیکنان سهم‌های حاصل ا این محاسبه را می‌پذیرند.

۲. حالت دوم: $p^*\ge 0$، در این حالت وزن مشترک ω^* وجود نداردکه رابطه‌ی $z=\omega^* e'$ را دقیقا برقرار کند.

در نهایت وزن‌های مشترک، یعنی مقدار بهینه‌ی ω که از رابطه‌ی (۱۸) بدست می‌آید می‌توانند کارایی متقاطع هر DMU را به صورت زیر محاسبه کنند:

$$e_j^{cross} = \sum_{d=1}^{n} \omega_d^* e_{dj}, \quad j=1,\dots,n \tag{۱۹}$$

از طرفی با حل روند فوق، تخصیص بهینه برای هر یک از واحدها از رابطه زیر بدست خواهد آمد:

$$\hat{r}_j = \sum_{d=1}^{n} \omega_d^* \frac{r_j^{d*}}{v_{m+1}^{d*}} \quad \forall j=1,\dots,n \tag{۲۰}$$

که در آن ω_d^* جواب بهینه حاصل از رابطه (۱۸) و v_{m+1}^{d*} و r_j^{d*} جواب بهینه مدل (۱۱) هستند.

۴- مثال عددی

در این قسمت با حل یک مثال عددی، به تشریح روش پیشنهادی می‌پردازیم. ۱۲ واحد با ۳ ورودی و ۲ خروجی را که اطلاعات آن در جدول (۲) نشان داده شده را در نظر بگیرید. مثال فوق در مقاله‌های [۱۶]، [۱۷]، [۱۸]،[۲۲] و [۲۸] نیز ذکر شده است.

جدول (۲): داده‌های ورودی و خروجی

	ورودی۱	ورودی ۲	ورودی۳	خروجی۱	خروجی۲
DMU1	۳۵۰	۳۹	۹	۶۷	۷۵۱
DMU2	۲۹۸	۲۶	۸	۷۳	۶۱۱
DMU3	۴۲۲	۳۱	۷	۷۵	۵۸۴
DMU4	۲۸۱	۱۶	۹	۷۰	۶۶۵
DMU5	۳۰۱	۱۶	۶	۷۵	۴۴۵
DMU6	۳۶۰	۲۹	۱۷	۸۳	۱۰۷۰
DMU7	۵۴۰	۱۸	۱۰	۷۲	۴۵۷
DMU8	۲۷۶	۳۳	۵	۷۸	۵۹۰
DMU9	۳۲۳	۲۵	۵	۷۵	۱۰۷۴
DMU10	۴۴۴	۶۴	۶	۷۴	۱۰۷۲
DMU11	۳۲۳	۲۵	۵	۲۵	۳۵۰
DMU12	۴۴۴	۶۴	۶	۱۰۴	۱۱۹۹

پس از محاسبه مقادیر کارایی متقاطع واحدها و محاسبه مقادیر نرمالایز شده آن‌ها، با ادامه روند مذکور در قسمت قبلی، مقادیر شیپلی هر واحد را محاسبه و با حل مدل (۱۸)، وزن‌های بهینه w محاسبه می‌گردند. وزن‌های بهینه حاصل برای ۱۲ واحد مذکور در جدول (۳) گرداوری شده است.

همانطور که در جدول (۳) مشاهده می‌گردد وزن بهینه برخی واحدها صفر در نظر گرفته می‌شود و در واقع این DMUها در تعیین کارایی کلی حاصله تاثیرگذار نیستند. پس از محاسبه مقادیر کارایی متقاطع واحدها و محاسبه مقادیر نرمالایز شده آن‌ها، با ادامه روند مذکور در قسمت قبلی، مقادیر شیپلی هر واحد را محاسبه و با حل مدل (۱۸)، وزن‌های بهینه‌ی w محاسبه می‌گردد. وزن‌های بهینه حاصل برای ۱۲ واحد مذکور در جدول (۳) گرداوری شده است. همانطور که در جدول مشاهده می‌گردد وزن بهینه برخی واحدها صفر در نظر گرفته می‌شود و در واقع این DMUها در تعیین کارایی کلی حاصله تاثیرگذار نیستند.

در نهایت نیز به کمک مدل (۱۹) کارایی هر واحد بدست می‌آید. مقادیر کارایی حاصل از انجام این روند در ستون چهارم جدول (۴) ذکر گردیده است.

همچنین مقادیر کارایی CCR این ۱۲ واحد، در ستون دوم جدول (۴) آمده است.

همانطور که از داده‌های جدول مشخص است، روش CCR برای پنج واحد ۴، ۵، ۸، ۹ و ۱۲ مقدار کارایی ۱ را تعیین می‌نماید. در واقع به کمک روش CCR که یکی از مدل‌های رایج و سنتی DEA محسوب می‌گردد، در این مثال، ۵ واحد مذکور از میان ۱۲ واحد، به عنوان واحدهای کارا معرفی می‌گردند و هیچ تمایز و برتری میان این واحدهای کارا وجود ندارد. ستون سوم جدول مذکور نیز مقادیر کارایی متقاطع که از روش معمول، یعنی روش سکستون و همکاران [۳] محاسبه می‌گردد را تحت عنوان کارایی متقاطع اولیه، نشان می‌دهد. همانطور که در بخش‌های قبل نیز به این نکته اشاره گردید، با توجه به نتایج مشاهده می‌شود که روش سکستون و همکاران با کنار گذاشتن خودارزیابی میان واحدها و به کار بردن ارزیابی همتا میان آن‌ها، ضعف روش CCR را برطرف نموده و میان واحدهای کارا نیز تمایز قائل گردیده است. حتی به کمک روش کارایی متقاطع سکستون، می‌توان این ۵ واحد را رتبه‌بندی نمود.

جدول (۳): وزن‌های بهینه

	وزن‌های بهینه
DMU 1	۰٫۱۶۱۱
DMU 2	۰
DMU 3	۰٫۲۰۹۴
DMU 4	۰٫۱۰۵۹
DMU 5	۰٫۱۹۰۹
DMU 6	۰
DMU 7	۰
DMU 8	۰٫۱۴۱۱
DMU 9	۰
DMU10	۰٫۱۹۱۷
DMU11	۰
DMU12	۰

جدول (۴): کارایی متقاطع‌های پس از تخصیص

کارایی متقاطع لی	کارایی متقاطع بیسلی	کارایی متقاطع روش لین	کارایی متقاطع کوک و ژو	کارایی متقاطع کوک و کرس	کارایی متقاطع روش پیشنهادی	کارایی متقاطع اولیه	کارایی CCR	
0.8814	۰,۷۲۵۹	۰,۵۵۵۸	۰,۵۵۵۸	۰,۵۴۲۷	۰,۸۸۹۰	0.5519	0.7567	DMU1
0.784	۰,۷۷۲۱	۰,۶۷۷۴	۰,۷۷۰۱	۰,۷۱۲۹	۰,۸۴۳۹	0.6990	0.9230	DMU2
0.7441	۰,۷۴۳۰	۰,۶۱۹۹	۰,۵۶۱۹	۰,۶۱۶۴	۰,۸۳۷۸	0.6150	0.7470	DMU3
0.8342	۰,۷۸۵۰	۰,۷۴۸۸	۰,۸۳۰۹	۰,۷۹۱۱	۰,۸۰۶۴	0.7688	1	DMU4
0.8494	۰,۸۱۷۰	۰,۸۲۷۶	۰,۸۶۹۴	۰,۸۵۸۴	۰,۸۰۹۵	0.8447	1	DMU5
0.7519	۰,۷۴۵۰	۰,۶۴۴۵	۰,۶۰۸۰	۰,۶۳۶۲	۰,۸۲۴۳	0.6175	0.9612	DMU6
0.1851	۰,۷۰۱۵	۰,۵۳۸۵	۰,۵۲۵۱	۰,۵۴۰۹	0.6230	0.5299	0.8604	DMU7
0.8242	۰,۸۲۳۲	۰,۷۹۴۸	۰,۹۰۱۴	۰,۸۳۱۰	0.8474	0.8213	1	DMU8
0.9018	۰,۸۴۴۷	۰,۹۵۳۹	۰,۸۶۶۰	۰,۹۳۹۹	0.7567	0.9421	1	DMU9
0.7511	۰,۷۵۰۲	۰,۶۰۳۳	۰,۵۷۷۷	۰,۵۹۵۹	0.8066	0.5919	0.8318	DMU10
0.6506	۰,۶۲۳۲	۰,۳۱۶۰	۰,۲۸۶۳	۰,۳۱۱۲	0.3988	0.3119	0.3333	DMU11
0.8054	۰,۸۱۲۸	۰,۶۸۱۸	۰,۸۶۰۹	۰,۷۸۲۱	0.8193	0.7777	1	DMU12
8.9632	9.1436	7.9623	8.2135	8.1587	9.2627	8.0717		جمع

در این مثال رتبه‌بندی میان این واحدها به صورت زیر خواهد بود. واحد نهم، واحد پنجم، واحد هشتم، واحد دوازدهم و در پایان، واحد چهارم. اما واضح است که مقادیر ارائه شده در ستون سوم جدول در واقع بیانگر کارایی واحدها قبل از تخصیص است و روش پیشنهادی که مقادیر آن در ستون چهارم آمده، کارایی واحدها بعد از تخصیص را بیان می‌کند. از طرفی در ستون‌های دیگر جدول (۴)، کارایی متقاطع بعد از تخصیص به کمک روش‌های مختلف ارائه شده توسط محققان، گرداوری شده است. این امتیاز کارایی متقاطع‌ها که به ترتیب در ستون‌های پنجم تا دهم نمایش داده شده‌اند، از روش‌های کوک و کرس[۱۶]، کوک و ژو [۱۷]، لین [۱۸]، بیسلی[۲۲] و لی [۲۷] بدست آمده‌اند.

با مقایسه امتیاز کارایی متقاطع بعد از تخصیص حاصل از روش پیشنهادی و روش کوک و کرس [۱۶] با یکدیگر، مشاهده می‌شود که امتیازهای حاصل از روش پیشنهادی برای ۱۰ واحد از میان ۱۲ واحد داده شده، بالاتر از مقدار تولید شده از روش کوک و کرس است.

به عبارت دیگر، دو واحد ۵ و ۹ به روش کوک و کرس به ترتیب دارای امتیاز کارایی متقاطع ۰/۸۵۸۴و ۰/۹۳۹۹هستند، در حالیکه همین دو واحد با روش پیشنهادی به ترتیب امتیازهای ۰/۸۰۹۵و ۰/۷۵۶۷را اخذ نموده‌اند که امتیازهای پایین تری در مقایسه با روش کوک و کرس است. ولی در بقیه ۱۰ واحد، یعنی بیش از ۸۳ درصد واحدها، با روش پیشنهادی، امتیازهای کارایی متقاطع بیشتری تولید می‌گردد. روش کوک و ژو[۱۷]، در هفت واحد ۱، ۲، ۳، ۶، ۷، ۱۰ و ۱۱، کارایی متقاطع پایین‌تری نسبت به امتیازهای حاصل از روش پیشنهادی را داراست.

با مقایسه امتیاز کارایی متقاطع بعد از تخصیص حاصل از روش پیشنهادی و روش کوک و کرس [۱۶] با یکدیگر، مشاهده می‌شود که امتیازهای حاصل از روش پیشنهادی برای ۱۰ واحد از میان ۱۲ واحد داده شده، بالاتر از مقدار تولید شده از روش کوک و کرس است.

به عبارت دیگر، دو واحد ۵ و ۹ به روش کوک و کرس به ترتیب دارای امتیاز کارایی متقاطع ۰/۸۵۸۴و ۰/۹۳۹۹هستند، در حالیکه همین دو واحد با روش پیشنهادی به ترتیب امتیازهای ۰/۸۰۹۵ و ۰/۷۵۶۷را اخذ نموده‌اند که امتیازهای پایین‌تری در مقایسه با روش کوک و کرس است. ولی در بقیه۱۰واحد، یعنی بیش از ۸۳ درصد واحدها، با روش پیشنهادی،

امتیازهای کارایی متقاطع بیشتری تولید می‌گردد. روش کوک و ژو [۱۷]، در هفت واحد ۱، ۲، ۳، ۶، ۷، ۱۰ و ۱۱، کارایی متقاطع پایین‌تری نسبت به امتیازهای حاصل از روش پیشنهادی را داراست.
همچنین روش لین [۱۸]، تنها در دو واحد ۵ و ۹ دارای امتیاز کارایی متقاطع بالاتری نسبت به امتیازهای روش پیشنهادی است و در ۱۰ واحد دیگر روش پیشنهادی امتیازهای بالاتری تولید می‌نماید. از طرفی روش بیسلی امتیاز چهار واحد ۵، ۷،۹ و ۱۱ را بیشتر از امتیاز کارایی متقاطع بعد از تخصیص توسط روش پیشنهادی، نشان می‌دهد. ولی در سایر ۸ واحد،اعداد جدول بیانگر بالاتر بودن میزان کارایی‌های حاصل از روش پیشنهادی هستند. به همین صورت، روش لی نیز در ۸ واحد ۱، ۲، ۳، ۶، ۷، ۸، ۱۰ و۱۲ امتیازهای پایین‌تری در مقایسه با روش پیشنهادی کسب می‌کند. بنابراین می‌توان گفت روش پیشنهادی در مقایسه با پنج روش دیگر مذکور، کارایی متقاطع بیش از ۵۸ درصد واحدها را مقدار بیشتری تعیین می‌نماید. اگر چه همانطور که در بالا اشاره گردید، امتیازهای کارایی متقاطع برخی واحدها با استفاده از روش‌های دیگر، بالاتر از امتیاز حاصل از روش پیشنهادی است، ولی در کل، بردار امتیاز کارایی متقاطع بدست آمده از روش پیشنهادی، توسط بردار حاصل از هیچ یک از دیگر روش‌ها، مغلوب نمی‌شود. این نکته بیانگر آن است که روش پیشنهادی، در مجموع امتیازات کارایی متقاطع بالاتری برای واحدها پس از تخصیص بدست می‌دهد.
از طرفی با توجه به داده‌های سطر آخر جدول (۴)، با استفاده از روش پیشنهادی، جمع امتیازهای تمام ۱۲ واحد، برابر ۹/۲۶۲۷ است که از جمع تمام ستون‌های دیگر جدول که در واقع، جمع امتیازهای اخذ شده واحدها به کمک پنج روش یاد شده را نشان می‌دهد، بیشتر است. این نکته بیانگر آن است که روش پیشنهادی، در مجموع امتیازات کارایی متقاطع بالاتری برای واحدها پس از تخصیص بدست می‌دهد.
همچنین میزان هزینه ثابتی که به هر واحد، توسط روش پیشنهادی (با حل مدل (۱۵)) و برخی از روش‌های ارائه شده در مقالات مختلف، تخصیص داده می‌شود در جدول (۵) نمایش داده شده است.

جدول (۵): مقادیر هزینه‌ی تخصیصی

بر اساس افزایش کارایی		بر اساس تغییر ناپذیری کارایی				
روش لی و همکاران	**روش بیسلی**	**روش لین**	**روش کوک و ژو**	**روش کوک و کرس**	**روش پیشنهادی**	
6.3839	۶,۷۸	۵,۶۹۵۶	۱۱,۲۲	۱۴,۵۲	۵,۰۱۶۲	DMU1
7.4219	۷,۲۱	۹,۲۴۴۳	۰	۶,۷۴	۷,۰۶۴۶	DMU2
6.6827	۶,۸۳	۵,۴۷۸۳	۱۶,۹۵	۹,۳۲	۶,۷۴۹۶	DMU3
8.8327	۸,۴۷	۱۰,۱۶۳۷	۰	۵,۶	۸,۰۹۳۵	DMU4
7.6335	۷,۰۸	۷,۰۸۱۶	۰	۵,۷۹	۸,۴۲۹۴	DMU5
9.6989	۱۰,۰۶	۴,۹۳۴۰	۱۵,۳۴	۸,۱۵	۸,۱۸۴۵	DMU6
4.2765	۵,۰۹	۸,۳۹۴۴	۰	۸,۸۶	۹,۰۸۱۲	DMU7
8.3526	۷,۷۴	۷,۳۳۴۴	۰	۶,۲۶	۸,۴۶۰۸	DMU8
15.8710	۱۵,۱۱	۲,۹۲۲۹	۱۷,۶۲	۷,۳۱	۱۲,۵۵۵۴	DMU9
9.7510	۱۰,۰۸	۳,۵۰۷۵	۲۱,۱۵	۱۰,۰۸	۸,۲۲۷۴	DMU10
0.4550	۱,۵۸	۲,۹۲۲۹	۱۷,۶۲	۷,۳۱	۵,۹۸۱۰	DMU11
14.6404	۱۳,۹۷	۳۲,۳۲۰۶	۰	۱۰,۰۸	۱۲,۱۵۶۳	DMU12

روش‌های مختلف تخصیص هزینه ثابت در جدول مذکور در دو گروه بر پایه نوع مدل‌ها بر اساس تغییر ناپذیری کارایی و افزایش کارایی نوشته شده است. که به ترتیب شامل سه مدل کوک و کرس، کوک و ژو و لین و دو مدل بیسلی و لی و همکاران است. با نگاهی به تمام هزینه‌های اختصاص یافته توسط روش‌های مختلف برای DMUها، بیشتر روش‌ها از جمله روش پیشنهادی ما، مقدار مثبتی را به همه DMUها اختصاص می‌دهند. اما همانطور که در جدول مشاهده می‌گردد در برخی موارد مقدار صفر به یک واحد اختصاص می‌یابد. در واقع واحدی که دارای هزینه صفر می‌شود از مسئولیت معاف می‌گردد و هیچ تخصیصی برای آن قائل نمی‌شویم. واضح است که چنین تخصیصی ناعادلانه است و برای تمام واحدها قابل پذیرش نخواهد بود. از این منظر روش پیشنهادی، تخصیصی مناسب میان واحدها ایجاد می‌کند زیرا به هیچ واحدی مقدار صفر را اختصاص نداده است.

با توجه به داده‌های جدول (۲) مشاهده می‌شود که دو واحد ۹ و ۱۱ دارای ورودی‌های یکسانی هستند. همچنین دو واحد ۱۰ و ۱۲ نیز ورودی‌های یکسانی دارند و تفاوت این دو جفت DMU در مقدار خروجی‌های آن‌ها است. با مقایسه مقادیر هزینه اختصاص یافته به این واحدها، می‌بینیم که برخی روش‌ها مانند روش کوک و کرس، کوک و ژو و لین هزینه بسیار مشابه و یا حتی کاملا یکسانی را به یک یا هر دو جفت واحد مذکور اختصاص می‌دهند. در واقع می‌توان گفت روش‌های یاد شده با در نظر گرفتن مقادیر هزینه یکسان برای این جفت DMUها، نشان می‌دهند که روش‌هایی ورودی محور هستند و تفاوت در خروجی را در نظر نمی‌گیرند. این در حالی است که روش پیشنهادی هزینه‌های کاملا متفاوتی برای دو جفت DMUی مذکور در نظر می‌گیرد.

۵- نتیجه‌گیری

تحلیل پوششی داده‌ها به عنوان ابزاری مناسب برای ارزیابی کارایی نسبی واحدها با چند ورودی و چند خروجی به کار می‌رود. یکی از کاربردهای تحلیل پوششی داده‌ها، تخصیص هزینه‌های ثابت میان واحدهای تصمیم گیرنده است. هزینه‌ی ثابت عبارت است از هزینه‌ای که برای ایجاد زیر ساخت‌های مشترک، برای زیر واحدهای یک سازمان استفاده می‌شود. روش‌های بسیاری با در نظر گرفتن هزینه ثابت به عنوان یک ورودی جدید به کمک تحلیل پوششی داده‌ها بر اساس دو اصل تغییر ناپذیری کارایی نسبی و یا بهبود کارایی نسبی واحدها پس از تخصیص توسط محققین مختلف، ارائه گردیده است. اما در تخصیص هزینه‌ها در میان واحدها بایستی هم جنبه رقابتی و هم جنبه همکاری میان واحدها در نظر گرفته شود. به همین خاطر در این مقاله از تکنیک کارایی متقاطع جهت ارزیابی همتا واحدها استفاده گردید. سپس با استفاده از مفاهیمی از نظریه بازی به ارائه روشی جدید برای تخصیص هزینه‌های ثابت میان واحدها پرداختیم به گونه‌ای که بردار امتیازهای کارایی متقاطع واحدها پس از تخصیص پاراتو باشد. در نهایت نیز به کمک مثالی به روشن‌سازی بیشتر روش پیشنهادی و مقایسه آن با برخی روش‌های موجود در این زمینه پرداختیم.

فهرست منابع

[1] Charnes A, Cooper WW, Rhodes E. Measuring the efficiency of decision making units. European journal of operational research. 1978 Nov 1; 2(6): 429-44.

[2] Banker, Rajiv D., Abraham Charnes, and William Wager Cooper. "Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis." Management science 30.9 (1984): 1078-1092.

[3] Sexton, T. R., Silkman, R. H., & Hogan, A. J. (1986). Data envelopment analysis: critique and extensions. In R. H. Silkman (Ed.), Measuring efficiency: An assessment of data envelopment analysis. San Francisco, CA: Jossey-Bass

[4] Doyle, John R and Green, Rodney H. Cross-evaluation in dea: Improving discrimination among dmus. INFOR: Information Systems and Operational Research, 33(3):205–222, 1995.

[5] Anderson, Timothy R, Hollingsworth, Keith, and Inman, Lane. The fixed weighting nature of a cross-evaluation model. Journal of Productivity Analysis, 17(3): 249–255, 2002.

[6] Boussofiane, Aziz, Dyson, Robert G, and Thanassoulis, Emmanuel. Applied data envelopment analysis. European Journal of Operational Research, 52(1):1–15, 1991.

[7] Doyle, John, and Rodney Green. "Efficiency and cross-efficiency in DEA: Derivations, meanings and uses." Journal of the operational research society 45.5 (1994): 567-578.

[8] Liang, Liang, Wu, Jie, Cook, Wade D, and Zhu, Joe. Alternative secondary goals in dea cross-efficiency evaluation. International Journal of Production Economics, 113(2):1025–1030, 2008.

[9] Wang, Ying-Ming and Chin, Kwai-Sang. Some alternative models for dea cross-efficiency evaluation. International Journal of Production Economics, 128(1):332–338, 2010.

[10] Ramón, Nuria, José L. Ruiz, and Inmaculada Sirvent. "Reducing differences between profiles of weights: A "peer-restricted" cross-efficiency evaluation." Omega 39.6 (2011):634-641.

[11] Jahanshahloo, G. R., Hosseinzadeh Lofti, F., Yafari, Y ,. Maddahi, R. (2011). Selecting symmetric weights as a secondary goal in DEA cross-efficiency evaluation. Applied Mathematical Modelling, 35, 544–549.

[12] Davtalab-Olyaie, Mostafa. "A secondary goal in DEA cross-efficiency evaluation: A "one home run is much better than two doubles" criterion." Journal of the Operational Research Society 70.5 (2019): 807-816.

[13] Wu, J., Liang, L., & Yang, F. (2009). Determination of weights for the ultimate cross efficiency using Shapley value in cooperative game. Expert Systems with Applications, 36 (1), 872-876.

[14] Liang, L., Wu, J., Cook, W.D., & Zhu, J. (2008a). The DEA Game Cross-Efficiency Model and Its Nash Equilibrium. Operations Research, 56 (5), 1278-1288.

[15] Wu, J.,Chu, J., Sun, J., Zha, Y.(2015). DEA Cross-efficiency Evaluation Based on Pareto Improvement. European Journal of Operational Research.

[16] Cook, Wade D., and Moshe Kress.

[24] Lotfi, Farhad Hosseinzadeh, et al. "Allocating fixed resources and setting targets using a common-weights DEA approach." Computers & Industrial Engineering 64.2 (2013): 631-640.

[25] Leyton-Brown, Kevin and Shoham, Yoav. Essentials of game theory: A concise multidisciplinary introduction. Synthesis Lectures on Artificial Intelligence and Machine Learning, 2(1): 1–88, 2008.

[26] Shapley, Lloyd S. A value for n-person games. Contributions to the Theory of Games, 2(28):307–317, 1953.

[27] Nakabayashi, Ken, and Kaoru Tone. "Egoist's dilemma: a DEA game." Omega 34.2 (2006): 135-148.

[28] Li, F., Zhu, Q., & Liang, L. (2018c). Allocating a fixed cost based on a DEA-game cross efficiency approach. Expert Systems with Applications, 96, 196–207

"Characterizing an equitable allocation of shared costs: A DEA approach." European Journal of Operational Research 119.3 (1999): 652-661.

[17] Cook, Wade D., and Joe Zhu. "Allocation of shared costs among decision making units: A DEA approach." Computers & Operations Research 32.8 (2005): 2171-2178.

[18] Lin, Ruiyue. "Allocating fixed costs or resources and setting targets via data envelopment analysis." Applied Mathematics and Computation 217.13 (2011): 6349-6358.

[19] Jahanshahloo, Gholam Reza, et al. "An alternative approach for equitable allocation of shared costs by using DEA." Applied Mathematics and computation 153.1 (2004): 267-274.

[20] Amirteimoori, Alireza, and Sohrab Kordrostami. "Allocating fixed costs and target setting: A DEA-based approach." Applied Mathematics and Computation 171.1 (2005): 136-151.

[21] Mostafaee, A. "An equitable method for allocating fixed costs by using data envelopment analysis." Journal of the Operational Research Society 64.3 (2013): 326-335.

[22] Beasley, J. E. "Allocating fixed costs and resources via data envelopment analysis." European Journal of Operational Research 147.1 (2003):198-216.

[23] Jahanshahloo, Gholam Reza, Jafar Sadeghi, and Mohammad Khodabakhshi. "Proposing a method for fixed cost allocation using DEA based on the efficiency invariance and common set of weights principles." Mathematical Methods of Operations Research 85.2 (2017): 223-240.