

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال پنجم، شماره هجدهم، خرداد و تیر ۱۳۹۸

شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸۸



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

بازبینی یک مدل ریاضی برای حل مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی با اعداد فازی دوزنقه‌ای

علی ابراهیم‌نژاد*

گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد قائم‌شهر، قائم‌شهر، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۱۲/۱۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۴/۰۴

چکیده

در این مقاله، مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی (FFLP) با قیود مساوی و نامساوی بررسی می‌شود که در آن تمام پارامترهای مساله با اعداد فازی دوزنقه‌ای نمایش داده می‌شوند. بر اساس رویکرد جاری مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی با قیود تساوی به یک مساله برنامه‌ریزی خطی چند هدفه (MOLP) تبدیل و سپس روش مقایسه الفبایی برای حل مساله MOLP حاصل، استفاده می‌شود. با این وجود، این رویکرد برای یافتن جواب بهینه‌ی فازی مساله‌ی FFLP با قیود نامساوی فازی نمی‌تواند استفاده شود. هدف این مطالعه، شناسایی و اصلاح برخی اشتباهات در تعاریف، عملیات نمادگذاری و روش مقایسه فازی رویکرد جاری برای حل مساله‌ی FFLP با قیود نامساوی فازی است. بدین ترتیب، یک رویکرد اصلاح شده برای حل مساله‌ی FFLP با قیود نامساوی فازی پیشنهاد می‌شود. سرانجام، چندین مثال عددی برای مصور نمودن روش پیشنهادی ارائه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی، برنامه‌ریزی خطی چندهدفه، مقایسه الفبایی، اعداد فازی دوزنقه‌ای.

۱- مقدمه

برنامه‌ریزی خطی یک تکنیک ریاضی برای اختصاص بهینه‌ی منابع محدود به فعالیت‌های معلوم برای رسیدن به هدفی مطلوب است. در مسایل برنامه‌ریزی خطی کلاسیک فرض بر این است تمام پارامترهای مساله به طور دقیق مشخص می‌شوند. به هر حال، مقادیر مشاهده شده مسایل جهان واقعی به دلیل اطلاعات ناقص یا غیر قابل دستیابی نادقیق و مبهم می‌باشند. یک روش کارا برای نمایش مقادیر نادقیق و مبهم مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی، از طریق توابع عضویت مجموعه‌های فازی است و بدین ترتیب یک مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی فازی به وجود می‌آید. بر این اساس محققان زیادی روی حل مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی فازی متمرکز شده‌اند.

همان‌طور که توسط ابراهیم‌نژاد و وردگای [۱] مطرح شده است رویکردهای حل مسایل برنامه‌ریزی خطی فازی به دو دسته‌ی کلی رویکرد مبتنی بر سیمپلکس و رویکرد مبتنی بر غیرسیمپلکس تقسیم می‌شوند. در رویکرد مبتنی بر سیمپلکس، الگوریتم‌های سیمپلکس کلاسیک برای یافتن جواب بهینه مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی با پارامترهای فازی تعمیم داده می‌شوند. در رویکرد مبتنی بر غیرسیمپلکس، مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی فازی تحت بررسی به یک مساله برنامه‌ریزی خطی تک هدفه یا چند هدفه‌ی قطعی تبدیل و با الگوریتم‌های استاندارد حل می‌شود. رویکرد پیشنهادی در این مقاله متعلق به دسته رویکرد مبتنی بر غیرسیمپلکس است.

مسایل برنامه‌ریزی خطی با پارامترهای فازی که بر اساس رویکردهای مبتنی بر غیرسیمپلکس حل می‌شوند به هفت گروه کلی زیر طبقه بندی می‌شوند:

- برنامه‌ریزی خطی فازی از نوع اول: در این گروه، سمت راست قیود و ضرایب متغیرهای تصمیم‌گیری در قیود با اعداد فازی نمایش داده می‌شوند.

- برنامه‌ریزی خطی فازی از نوع دوم: در این گروه، ضرایب متغیرهای تصمیم‌گیری در تابع هدف با اعداد فازی نمایش داده می‌شوند.

- برنامه‌ریزی خطی فازی از نوع سوم: در این گروه، ضرایب متغیرهای تصمیم‌گیری در قیود و تابع هدف با اعداد فازی نمایش داده می‌شوند.

- برنامه‌ریزی خطی فازی از نوع چهارم: در این گروه، سمت راست قیود و ضرایب متغیرهای تصمیم‌گیری در قیود و تابع هدف با اعداد فازی نمایش داده می‌شوند.

- برنامه‌ریزی خطی فازی از نوع پنجم: در این گروه، سمت راست قیود و متغیرهای تصمیم‌گیری با اعداد فازی نمایش داده می‌شوند.

- برنامه‌ریزی خطی فازی از نوع ششم: در این گروه، سمت راست قیود، متغیرهای تصمیم‌گیری و ضرایب متغیرهای تصمیم‌گیری در تابع هدف با اعداد فازی نمایش داده می‌شوند.

- برنامه‌ریزی خطی فازی از نوع هفتم: در این گروه، سمت راست قیود، متغیرهای تصمیم‌گیری و ضرایب متغیرهای تصمیم‌گیری در قیود و تابع هدف با اعداد فازی نمایش داده می‌شوند. مساله‌ی متعلق به این گروه را مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی (FFLP) می‌نامند.

در این مقاله مسایل برنامه‌ریزی خطی فازی از نوع هفتم مورد بررسی قرار می‌گیرد. خوانندگان برای مطالعه بیشتر روی مسایل برنامه‌ریزی خطی از نوع اول تا ششم به مراجع [۱۲-۲] رجوع کنند. اکنون، بررسی مختصری بر روی روش‌های حل مسایل برنامه‌ریزی تماماً فازی صورت می‌گیرد. باکلی و فیورینگ [۱۳] مساله‌ی FFLP را با تعریف جدیدی از بیشینه‌کردن یک عدد فازی به یک مساله‌ی برنامه‌ریزی چندهدفه‌ی قطعی تبدیل کردند و یک روش تکاملی برای یافتن مساله‌ی انعطاف‌پذیر فازی ارائه دادند. هاشمی و همکاران [۱۴] یک تکنیک دو مرحله‌ای برای حل مسایل نوع هفتم بر اساس مقایسه مقدار میانگین و انحراف میعار اعداد فازی پیشنهاد داده‌اند. حسین‌زاده لطفی و همکاران [۱۵] یک رویکرد کارا برای حل مساله FFLP با قیود تساوی ارائه داده‌اند که در آن هر عدد فازی مثلثی به نزدیکترین عدد مثلثی تقارن تقریب زده شده است. کومار و همکاران [۱۶]، با بهبود روش حسین‌زاده لطفی و همکاران [۱۵] یک جواب دقیق برای همان مساله به دست آوردند. کومار و کیور [۱۷] رویکرد مشابهی برای حل مسایل FFLP پیشنهاد داده‌اند که هم برای قیود تساوی و هم قیود نامساوی کارساز است. عزتی و همکاران [۱۸] رویکرد جدیدی برای حل همین مساله با تبدیل آن به یک مساله‌ی برنامه‌ریزی

تعریف ۱. هر مجموعه فازی محدب و نرمال تعریف شده روی اعداد حقیقی که تابع عضویت آن قطعه‌ای پیوسته باشد یک عدد فازی نامیده می‌شود.

تعریف ۲. عدد فازی $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ را عدد فازی دوزنقه‌ای می‌گویند هر گاه تابع عضویت آن به صورت زیر تعریف شود:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x - a_1}{a_2 - a_1}, & a_1 \leq x \leq a_2, \\ 1, & a_2 \leq x \leq a_3, \\ \frac{a_4 - x}{a_4 - a_3}, & a_3 \leq x \leq a_4. \end{cases} \quad (1)$$

تعریف ۳. عدد فازی دوزنقه‌ای $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ را مثبت (نامنفی) گویند اگر و فقط اگر $a_1 > 0$ ($a_1 \geq 0$).

تعریف ۳. دو عدد فازی دوزنقه‌ای $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ و $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ را برابر می‌گویند هر گاه $a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3, a_4 = b_4$

تعریف ۴. فرض کنید $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ و $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ دو عدد فازی دوزنقه‌ای باشند و $k \in \mathbb{R}$. آنگاه عملیات حسابی جمع، تفریق، ضرب و ضرب اسکالر روی این دو عدد فازی به صورت زیر تعریف می‌گردد:

الف. $\tilde{A} + \tilde{B} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4)$

ب. $\tilde{A} - \tilde{B} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3, a_4 - b_4)$

ج. $\tilde{A} \otimes \tilde{B} = (t_1, t_2, t_3, t_4)$ که در آن

$$t_1 = \min \{a_1 b_1, a_1 b_4, a_4 b_1, a_4 b_4\}$$

$$t_2 = \min \{a_2 b_2, a_2 b_3, a_3 b_2, a_3 b_3\}$$

$$t_3 = \max \{a_2 b_2, a_2 b_3, a_3 b_2, a_3 b_3\}$$

$$t_4 = \max \{a_1 b_1, a_1 b_4, a_4 b_1, a_4 b_4\}$$

$$k\tilde{A} = \begin{cases} (ka_1, ka_2, ka_3, ka_4), & k \geq 0, \\ (ka_4, ka_3, ka_2, ka_1), & k < 0. \end{cases} \quad \text{د.}$$

داس و همکاران [۲۱] تعریف زیر را برای مقایسه دو عدد فازی دوزنقه‌ای دلخواه براساس روش الفبایی ارائه داده‌اند.

خطی چندهدفه قطعی ارایه داده‌اند. چنگ و همکاران [۱۹] مسأله‌ی FFLP با قیود تساوی را مطالعه نمودند. آن‌ها قیود تساوی فازی را با استفاده از اندازه تشابه به قیود نامساوی قطعی و تابع هدف فازی را به دو تابع هدف قطعی تبدیل نمودند. از آن‌جا که درجه شدنی بودن قیود با مقدار بهینه‌ی تابع هدف در تعارض است، آن‌ها یک مسأله کمکی با سه تابع هدف ساخته و آن را با رویکرد برنامه‌ریزی تقابلی حل کردند. حسین‌زاده و عدالت‌پناه [۲۰] رویکردی مبتنی بر روش الفبایی و روش‌های برنامه‌ریزی خطی برای حل مسأله FFLP پیشنهاد داده‌اند. داس و همکاران [۲۱] با تعمیم روش عزتی و همکاران [۱۸] روشی برای حل مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی با قیود تساوی و نامساوی ارایه داده‌اند که در آن تمام پارامترهای مسأله با اعداد فازی دوزنقه‌ای نمایش داده می‌شوند. رویکرد پیشنهادی آن‌ها براساس تبدیل مسأله فازی تحت بررسی به مسأله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه و روش مقایسه الفبایی استوار است. با این وجود، این رویکرد برای یافتن جواب بهینه‌ی فازی مسأله‌ی FFLP با قیود نامساوی فازی نمی‌تواند استفاده شود. هدف این مطالعه، شناسایی و اصلاح برخی اشتباهات در تعاریف، عملیات نمادگذاری و روش مقایسه فازی رویکرد جاری برای حل مسأله‌ی FFLP با قیود نامساوی فازی است. بدین ترتیب، یک رویکرد اصلاح شده برای حل مسأله‌ی FFLP با قیود نامساوی فازی پیشنهاد می‌شود. ادامه این مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است. در بخش دوم، مفاهیم اولیه نظریه مجموعه‌های فازی مرور می‌گردد. در بخش سوم، رویکرد جاری برای حل مسأله FFLP با قیود تساوی و نامساوی مرور می‌شود. در بخش چهارم، به نقایص و کاستی‌های رویکرد جاری اشاره می‌گردد. در بخش پنجم رویکرد جاری برای حل مسأله FFLP با قیود نامساوی فازی اصلاح می‌شود. در بخش ششم، رویکرد اصلاح شده با چندین مثال عددی تبیین می‌شود. بخش هفتم شامل نتیجه‌گیری و پیشنهادات آتی می‌شود.

۲- نظریه مجموعه‌های فازی

در این بخش، مفاهیم اولیه اعداد فازی، عملیات حساب فازی و مقایسه اعداد فازی آورده می‌شود [۱، ۲۵-۲۲].

$k \in \mathbb{R}$. آنگاه عملیات حسابی جمع، تفریق، ضرب و ضربه اسکالر روی این دو عدد فازی به صورت زیر تعریف می‌گردد:

الف. $\tilde{A} + \tilde{B} = (m_1 + m_2, n_1 + n_2, \alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2)$

ب. $\tilde{A} - \tilde{B} = (m_1 - m_2, n_1 - m_1, \alpha_1 + \beta_2, \beta_1 + \alpha_2)$

ج. $\tilde{A} \otimes \tilde{B} = (t_1, t_2, t_3, t_4)$ که $t_1 = m_1 m_2$ ، $t_2 = n_1 n_2$

و $t_3 = m_1 m_2 - (m_1 - \alpha_1)(m_2 - \alpha_2)$

$t_4 = (n_1 + \beta_1)(n_2 + \beta_2) - n_1 n_2$

د. $k\tilde{A} = \begin{cases} (km_1, km_1, k\alpha_1, k\beta_1), & k \geq 0, \\ (kn_1, km_1, k\beta_1, k\alpha_1), & k < 0. \end{cases}$

با توجه به نکات ۲ الی ۴، تعریف ۵ برای مقایسه دو عدد فازی ذوزنقه‌ای دلخواه براساس روش الفبایی به صورت زیر خواهد بود.

نکته ۶. فرض کنید $\tilde{A} = (m_1, n_1, \alpha_1, \beta_1)$

و $\tilde{B} = (m_2, n_2, \alpha_2, \beta_2)$ دو عدد فازی ذوزنقه‌ای باشند.

می‌گوییم $\tilde{A} < \tilde{B}$ اگر و فقط اگر

الف. $\alpha_1 > \alpha_2$ ، یا

ب. $\alpha_1 = \alpha_2$ و $m_1 < m_2$ ، یا

ج. $\alpha_1 = \alpha_2$ ، $m_1 = m_2$ و $\frac{m_1 + n_1}{2} < \frac{m_2 + n_2}{2}$ ، یا

د. $\alpha_1 = \alpha_2$ ، $m_1 = m_2$ و $\frac{m_1 + n_1}{2} = \frac{m_2 + n_2}{2}$ و

$\beta_1 < \beta_2$

۳- روش داس و همکاران برای حل FFLP با قیود مساوی

در این بخش روش داس و همکاران [۲۱] برای حل مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی مرور می‌گردد. مساله برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی زیر را در نظر بگیرید که در آن تمامی ضرایب و متغیرهای تصمیم‌گیری با اعداد فازی ذوزنقه‌ای نامنفی نمایش داده می‌شوند:

$$\begin{aligned} \max \tilde{z} &= \sum_{j=1}^n \tilde{c}_j \otimes \tilde{x}_j \\ \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} \otimes \tilde{x}_j &= \tilde{b}_i, \quad i=1,2,\dots,m, \\ \tilde{x}_j &\geq \tilde{0}, \quad j=1,2,\dots,n. \end{aligned} \quad (3)$$

تعریف ۵. فرض کنید $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ و

$\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ دو عدد فازی ذوزنقه‌ای باشند.

می‌گوییم $\tilde{A} < \tilde{B}$ اگر و فقط اگر

الف. $a_2 - a_1 > b_2 - b_1$ ، یا

ب. $a_2 < b_2$ و $a_2 - a_1 = b_2 - b_1$ ، یا

ج. $\frac{a_2 + a_3}{2} < \frac{b_2 + b_3}{2}$ و $a_2 = b_2$ ، $a_2 - a_1 = b_2 - b_1$

د. $\frac{a_2 + a_3}{2} = \frac{b_2 + b_3}{2}$ ، $a_2 = b_2$ ، $a_2 - a_1 = b_2 - b_1$

و $a_4 - a_3 < b_4 - b_3$

نکته ۱. با توجه به تعریف ۶ بدیهی است

و $\frac{a_2 + a_3}{2} = \frac{b_2 + b_3}{2}$ ، $a_2 = b_2$ ، $a_2 - a_1 = b_2 - b_1$

و $a_4 - a_3 = b_4 - b_3$ اگر و فقط اگر $\tilde{A} = \tilde{B}$.

برای این که بتوانیم کاستی‌ها و نواقص روش داس و همکاران [۲۱] را نشان دهیم نیاز است نمایش دیگری از اعداد فازی ذوزنقه‌ای و عملیات حسابی روی آن‌ها را برحسب گسترده‌های چپ و راست و هسته بیان کنیم.

نکته ۲. عدد فازی $\tilde{A} = (m_1, n_1, \alpha_1, \beta_1)$ را عدد فازی

ذوزنقه‌ای می‌گویند هر گاه تابع عضویت آن به صورت زیر تعریف شود:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x - (m_1 - \alpha_1)}{\alpha_1}, & m_1 - \alpha_1 \leq x \leq m_1, \\ 1, & m_1 \leq x \leq n_1, \\ \frac{(n_1 + \alpha_2) - x}{\alpha_2}, & n_1 \leq x \leq n_1 + \alpha_2. \end{cases} \quad (2)$$

نکته ۳. عدد فازی ذوزنقه‌ای $\tilde{A} = (m_1, n_1, \alpha_1, \beta_1)$ را

عدد فازی مثبت (نامنفی) گویند اگر و فقط اگر $(m_1 - \alpha_1 \geq 0) m_1 - \alpha_1 > 0$.

نکته ۴. می‌گوییم دو عدد فازی ذوزنقه‌ای

$\tilde{A} = (m_1, n_1, \alpha_1, \beta_1)$ و $\tilde{B} = (m_2, n_2, \alpha_2, \beta_2)$ برابرند

هر گاه $m_1 = m_2$ ، $n_1 = n_2$ ، $\alpha_1 = \alpha_2$ ، $\beta_1 = \beta_2$

نکته ۵. فرض کنید $\tilde{A} = (m_1, n_1, \alpha_1, \beta_1)$ و

$\tilde{B} = (m_2, n_2, \alpha_2, \beta_2)$ دو عدد فازی ذوزنقه‌ای باشند و

داس و همکاران [۲۱]، با توجه به تعریف ۵، مساله (۵) را به مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه قطعی زیر تبدیل کردند:

$$\begin{aligned} \min z_1 &= \left(\sum_{j=1}^n (cx)_{2,j} - \sum_{j=1}^n (cx)_{1,j} \right) \\ \max z_2 &= \sum_{j=1}^n (cx)_{2,j} \\ \max z_3 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n (cx)_{2,j} + \sum_{j=1}^n (cx)_{3,j} \right) \\ \max z_4 &= \left(\sum_{j=1}^n (cx)_{4,1} - \sum_{j=1}^n (cx)_{3,j} \right) \\ \text{s.t. Constraints of model (5)} \end{aligned} \quad (6)$$

سپس یک رویکرد الفبایی برای یافتن جواب بهینه‌ی مساله (۶) به کار گرفته‌اند. به هر حال، رویکرد آن‌ها در حل مساله FFLP با قیود نامساوی فازی نواقصی دارد که در بخش بعدی به آن اشاره می‌گردد.

۳- کاستی‌های روش داس و همکاران برای حل FFLP با قیود نامساوی

در این بخش، به نقایص و کاستی‌های روش داس و همکاران [۲۱] برای حل مساله برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی اشاره می‌گردد.

داس و همکاران [۲۱] اشاره داشته‌اند که رویکرد پیشنهادی در حل مساله برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی با قیود مساوی را می‌توان برای قیود نامساوی هم استفاده کرد. به همین منظور، روش رتبه‌بندی زیر را برای مقایسه دو عدد فازی جهت تبدیل هر قید نامساوی فازی به قیود قطعی استفاده کرده‌اند.

تعریف ۶: فرض کنید $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ و $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ دو عدد فازی دوزنقه‌ای باشند. می‌گوییم $\tilde{A} \leq \tilde{B}$ اگر و فقط اگر $a_2 - a_1 \leq b_2 - b_1, a_2 \leq b_2, a_3 \leq b_3, a_4 - a_3 \leq b_4 - b_3$ به طور معادل، نکته ۷ برای نمایش دیگر عدد فازی دوزنقه‌ای به صورت زیر در می‌آید:

فرض کنید در مساله (۳)، $\tilde{c}_j = (c_{1,j}, c_{2,j}, c_{3,j}, c_{4,j})$ بردار هزینه‌ی فازی، $\tilde{a}_{ij} = (a_{1,ij}, a_{2,ij}, a_{3,ij}, a_{4,ij})$ ماتریس ضرایب تکنولوژیکی فازی، $\tilde{x}_j = (x_{1,j}, x_{2,j}, x_{3,j}, x_{4,j})$ بردار متغیرهای تصمیم‌گیری فازی و $\tilde{b}_i = (b_{1,i}, b_{2,i}, b_{3,i}, b_{4,i})$ بردار سمت راست قیود فازی باشند.

اگر $\tilde{a}_{ij} \otimes \tilde{x}_j = ((ax)_{1,ij}, (ax)_{2,ij}, (ax)_{3,ij}, (ax)_{4,ij})$ و $\tilde{c}_j \otimes \tilde{x}_j = ((cx)_{1,j}, (cx)_{2,j}, (cx)_{3,j}, (cx)_{4,j})$ مساله (۳) با توجه به تعریف ۴، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \max \tilde{z} &= \left(\sum_{j=1}^n (cx)_{1,j}, \sum_{j=1}^n (cx)_{2,j}, \sum_{j=1}^n (cx)_{3,j}, \sum_{j=1}^n (cx)_{4,j} \right) \\ \text{s.t. } & \left(\sum_{j=1}^n (ax)_{1,ij}, \sum_{j=1}^n (ax)_{2,ij}, \sum_{j=1}^n (ax)_{3,ij}, \sum_{j=1}^n (ax)_{4,ij} \right) \\ &= (b_{1,i}, b_{2,i}, b_{3,i}, b_{4,i}), \quad i=1,2,\dots,m, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} x_{1,j} &\geq 0, \\ x_{2,j} - x_{1,j} &\geq 0, \\ x_{3,j} - x_{2,j} &\geq 0, \\ x_{4,j} - x_{3,j} &\geq 0, \\ j &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

با توجه به تعریف ۳، مساله (۴) به مساله زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \max \tilde{z} &= \left(\sum_{j=1}^n (cx)_{1,j}, \sum_{j=1}^n (cx)_{2,j}, \sum_{j=1}^n (cx)_{3,j}, \sum_{j=1}^n (cx)_{4,j} \right) \\ \text{s.t. } & \sum_{j=1}^n (ax)_{1,ij} = b_{1,i}, \quad i=1,2,\dots,m, \\ & \sum_{j=1}^n (ax)_{2,ij} = b_{2,i}, \quad i=1,2,\dots,m, \\ & \sum_{j=1}^n (ax)_{3,ij} = b_{3,i}, \quad i=1,2,\dots,m, \\ & \sum_{j=1}^n (ax)_{4,ij} = b_{4,i}, \quad i=1,2,\dots,m, \\ & x_{1,j} \geq 0, x_{2,j} - x_{1,j} \geq 0, \\ & x_{3,j} - x_{2,j} \geq 0, \\ & x_{4,j} - x_{3,j} \geq 0, \\ & j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (5)$$

$$\max \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n (m(x))_j + \sum_{j=1}^n (n(x))_j \right)$$

$$\max \sum_{j=1}^n (\beta(x))_j$$

با این وجود، داس و همکاران [۲۱] که در حل مساله برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی با قیود نامساوی از نمایش دوم عدد فازی دوزنقه‌ای استفاده کرده‌اند، تابع هدف فازی

$$\max \tilde{c}_j \otimes \tilde{x}_j = ((m(x))_j, (n(x))_j, (\alpha(x))_j, (\beta(x))_j)$$

را به چهار تابع هدف قطعی زیر تبدیل کرده‌اند:

$$\min \sum_{j=1}^n (n(x))_j - \sum_{j=1}^n (m(x))_j$$

$$\max \sum_{j=1}^n (n(x))_j \tag{۸}$$

$$\max \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n (n(x))_j + \sum_{j=1}^n (\alpha(x))_j \right)$$

$$\max \sum_{j=1}^n (\beta(x))_j - \sum_{j=1}^n (\alpha(x))_j$$

که بوضوح با رابطه (۶) متفاوت است. این اشتباه ناشی از آن است که چون این نویسندگان در حل مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی با قیود نامساوی از نمایش دوم عدد فازی دوزنقه‌ای استفاده کرده‌اند باید از نکته ۶ برای تبدیل تابع هدف فازی به تابع چندهدفه‌ی قطعی استفاده می‌کردند، در حالی که تعریف ۵ برای انجام این تبدیل به کار گرفته شده است. همچنین این نویسندگان به جای به کارگیری عملیات حسابی فازی داده شده در نکته ۵، از عملیات حسابی فازی داده شده در تعریف ۴ استفاده نموده‌اند. بنابراین تمام روند به کار گرفته شده در روش داس و همکاران اشتباه است. به عبارت دیگر آن‌ها ضرب دو عدد فازی دوزنقه‌ای $\tilde{A} = (m_1, n_1, \alpha_1, \beta_1)$ و $\tilde{B} = (m_2, n_2, \alpha_2, \beta_2)$ را به صورت $\tilde{A} \otimes \tilde{B} = (m_1 m_2, n_1 n_2, \alpha_1 \alpha_2, \beta_1 \beta_2)$ بیان کردند که بوضوح با توجه به بند سوم نکته ۵ نادرست است. در بخش بعدی، رویکرد آن‌ها برای حل مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی با قیود نامساوی اصلاح می‌گردد.

نکته ۷. فرض کنید $\tilde{A} = (m_1, n_1, \alpha_1, \beta_1)$ و $\tilde{B} = (m_2, n_2, \alpha_2, \beta_2)$ دو عدد فازی دوزنقه‌ای باشند. می‌گوییم $\tilde{A} < \tilde{B}$ اگر و فقط اگر $\alpha_1 \leq \alpha_2, m_1 \leq m_2, n_1 \leq n_2, \beta_1 \leq \beta_2$.

اکنون در شرایطی هستیم که به تشریح اشتباهات روش داس و همکاران [۲۱] بپردازیم.

خطای اول: داس و همکاران از روش مقایسه داده شده در نکته‌ی ۶ برای تبدیل هر تابع هدف فازی از نوع ماکسیم‌سازی به چهار تابع هدف قطعی استفاده کرده‌اند و از روش مقایسه داده شده در نکته‌ی ۷ برای تبدیل هر قید نامساوی فازی به قیود قطعی استفاده نموده‌اند. این نشان می‌دهد که داس و همکاران [۲۱] دو روش مقایسه متفاوت برای مقایسه دو عدد فازی در یک مساله به کار گرفته‌اند که اولین خطای رویکرد آن‌ها را نشان می‌دهد.

خطای دوم: مهمترین اشتباه داس و همکاران [۲۱] این است که از تعریف ۵ و یا به طور معادل از نکته ۶ برای مقایسه دو عدد فازی استفاده کرده‌اند. ولی همان طور که از روش پیشنهادی آن‌ها پیداست این تعریف جهت تبدیل تابع هدف فازی به تابع چند هدفه قطعی به کار گرفته شده است. در واقع، این مطلب باید به این گونه اصلاح شود که برای ماکسیم کردن عبارت فازی $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ ابتدا باید گستره چپ $a_2 - a_1$ مینیمم، سپس هسته $[a_2, a_3]$ ماکسیم و سرانجام گستره راست $a_4 - a_3$ ماکسیم گردد. همچنین ماکسیم کردن هسته $[a_2, a_3]$ با ماکسیم کردن ابتدای بازه و نقطه میانی بازه معادل است. بدیهی است با توجه به نکته ۶، چنین مفهومی برای ماکسیم کردن عدد فازی $\tilde{A} = (m_1, n_1, \alpha_1, \beta_1)$ با مینیمم کردن α_1 و سپس ماکسیم کردن m_1 ، $\frac{1}{2}(m_1 + n_1)$ و β_1 معادل است.

خطای سوم: با توجه به توضیحات داده شده در خطای دوم، $\max \tilde{c}_j \otimes \tilde{x}_j = ((m(x))_j, (n(x))_j, (\alpha(x))_j, (\beta(x))_j)$ با چهار تابع هدف زیر معادل است:

$$\min \sum_{j=1}^n (\alpha(x))_j$$

$$\max \sum_{j=1}^n (m(x))_j \tag{۷}$$

با توجه به تعریف ۷، مساله (۹) به مساله زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \max \tilde{z} = & \left(\sum_{j=1}^n c_{1,j} x_{1,j}, \sum_{j=1}^n c_{2,j} x_{2,j}, \sum_{j=1}^n c_{3,j} x_{3,j}, \sum_{j=1}^n c_{4,j} x_{4,j} \right) \\ \text{s.t.} & \\ & \sum_{j=1}^n a_{1,ij} x_{1,ij} \leq b_{1,i}, i = 1, 2, \dots, m, \\ & \sum_{j=1}^n a_{2,ij} x_{2,ij} \leq b_{2,i}, i = 1, 2, \dots, m, \\ & \sum_{j=1}^n a_{3,ij} x_{3,ij} \leq b_{3,i}, i = 1, 2, \dots, m, \\ & \sum_{j=1}^n a_{4,ij} x_{4,ij} \leq b_{4,i}, i = 1, 2, \dots, m, \quad (10) \\ & x_{1,j} \geq 0, x_{2,j} - x_{1,j} \geq 0, x_{3,j} - x_{2,j} \geq 0, \\ & x_{4,j} - x_{3,j} \geq 0, j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

ادامه روند مشابه روش داس و همکاران [۲۱] است که منجر به مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه قطعی زیر شده است:

$$\begin{aligned} \min z_1 = & \left(\sum_{j=1}^n (cx)_{2,j} - \sum_{j=1}^n (cx)_{1,j} \right) \\ \max z_2 = & \sum_{j=1}^n (cx)_{2,j} \\ \max z_3 = & \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n (cx)_{2,j} + \sum_{j=1}^n (cx)_{3,j} \right) \quad (11) \\ \max z_4 = & \left(\sum_{j=1}^n (cx)_{4,1} - \sum_{j=1}^n (cx)_{3,j} \right) \\ \text{s.t.} & \text{ Constraints of model (10)} \end{aligned}$$

مساله (۱۱) با رویکرد الفبایی حل خواهد شد.

۵- مثال‌های عددی

در این بخش، مثال‌های عددی حل شده توسط داس و همکاران [۲۱] برای حل مساله برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی با قیود نامساوی، با رویکرد اصلاح شده در این مقاله جهت تبیین اشکالات و نقایص رویکرد آن‌ها حل می‌گردد.

۴- روش اصلاح شده برای حل FFLP با قیود نامساوی

در این بخش، روش داس و همکاران [۲۱] برای حل مساله برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی با قیود نامساوی اصلاح می‌گردد.

مساله‌ی FFLP با قیود نامساوی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \max \tilde{z} = & \sum_{j=1}^n \tilde{c}_j \otimes \tilde{x}_j \\ \text{s.t.} & \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} \otimes \tilde{x}_j \leq \tilde{b}_i, i = 1, 2, \dots, m, \quad (8) \\ & \tilde{x}_j \geq \tilde{0}, j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

جهت تبدیل هر قید نامساوی فازی به قیود قطعی از تعریف زیر که توسط رامیک و ریمانک [۲۶] پیشنهاد شده است برای مقایسه دو عدد فازی استفاده می‌کنیم که نسبت به تعریف ۶ به محاسبات کمتری نیاز دارد.

تعریف ۷: فرض کنید $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ و $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ دو عدد فازی دوزنقه‌ای باشند. می‌گوییم $\vec{A} \preceq \vec{B}$ اگر و فقط اگر $a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2, a_3 \leq b_3, a_4 \leq b_4$ با فرض نامنفی بودن پارامترهای $\vec{c}_j = (c_{1,j}, c_{2,j}, c_{3,j}, c_{4,j})$ بردار هزینه‌ی فازی، ماتریس ضرایب $\vec{a}_{ij} = (a_{1,ij}, a_{2,ij}, a_{3,ij}, a_{4,ij})$ تکنولوژیکی فازی، $\vec{x}_j = (x_{1,j}, x_{2,j}, x_{3,j}, x_{4,j})$ بردار متغیرهای تصمیم‌گیری فازی و $\vec{b}_i = (b_{1,i}, b_{2,i}, b_{3,i}, b_{4,i})$ بردار سمت راست قیود فازی، مساله‌ی (۸) به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} \max \tilde{z} = & \left(\sum_{j=1}^n c_{1,j} x_{1,j}, \sum_{j=1}^n c_{2,j} x_{2,j}, \sum_{j=1}^n c_{3,j} x_{3,j}, \sum_{j=1}^n c_{4,j} x_{4,j} \right) \\ \text{s.t.} & \\ & \left(\sum_{j=1}^n a_{1,ij} x_{1,ij}, \sum_{j=1}^n a_{2,ij} x_{2,ij}, \sum_{j=1}^n a_{3,ij} x_{3,ij}, \sum_{j=1}^n a_{4,ij} x_{4,ij} \right) \\ & \leq (b_{1,i}, b_{2,i}, b_{3,i}, b_{4,i}), i = 1, 2, \dots, m, \\ & x_{1,j} \geq 0, x_{2,j} - x_{1,j} \geq 0, x_{3,j} - x_{2,j} \geq 0, \\ & x_{4,j} - x_{3,j} \geq 0, j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (9)$$

مساله (۱۲) را می‌توان با توجه به عملیات حسابی فازی و مقایسه دو عددی فازی بر اساس تعریف ۷ و نیز مساله‌ی (۱۰) به صورت مساله برنامه‌ریزی خطی چند هدفه‌ی زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \min z_1 &= 13x_{2,1} + 12x_{2,2} + 15x_{2,3} - 11x_{1,1} - 9x_{1,2} - 13x_{1,3} \\ \max z_2 &= 13x_{2,1} + 12x_{2,2} + 15x_{2,3} \\ \max z_3 &= \frac{1}{2}(13x_{2,1} + 12x_{2,2} + 15x_{2,3} + 15x_{3,1} + 14x_{3,2} + 17x_{3,3}) \\ \max z_4 &= (17x_{4,1} + 17x_{4,2} + 19x_{4,3} - 15x_{3,1} - 14x_{3,2} - 17x_{3,3}) \\ s.t. \\ 9x_{1,1} + 11x_{1,2} + 12x_{1,3} &\leq 469, \\ 11x_{2,1} + 12x_{2,2} + 11x_{2,3} &\leq 475, \\ 13x_{3,1} + 14x_{3,2} + 13x_{3,3} &\leq 505, \\ 15x_{4,1} + 15x_{4,2} + 15x_{4,3} &\leq 511, \\ 11x_{1,1} + 11x_{1,3} &\leq 452, \\ 12x_{2,1} + 12x_{2,3} &\leq 460, \\ 16x_{3,1} + 14x_{3,3} &\leq 480, \\ 17x_{4,1} + 15x_{4,3} &\leq 488, \\ 9x_{1,1} + 11x_{1,2} &\leq 460, \\ 11x_{2,1} + 14x_{2,2} &\leq 465, \\ 13x_{3,1} + 16x_{3,2} &\leq 495, \\ 15x_{4,1} + 19x_{4,2} &\leq 500, \\ x_{1,1} \geq 0, x_{2,1} - x_{1,1} \geq 0, x_{3,1} - x_{2,1} \geq 0, x_{4,1} - x_{3,1} \geq 0, \\ x_{1,2} \geq 0, x_{2,2} - x_{1,2} \geq 0, x_{3,2} - x_{2,2} \geq 0, x_{4,2} - x_{3,2} \geq 0, \\ x_{1,3} \geq 0, x_{2,3} - x_{1,3} \geq 0, x_{3,3} - x_{2,3} \geq 0, x_{4,3} - x_{3,3} \geq 0. \end{aligned} \quad (13)$$

اکنون روش الفبایی برای حل مساله‌ی (۱۳) به کار گرفته می‌شود. نخست مساله‌ی زیر حل می‌شود:

$$\begin{aligned} \min z_1 &= 13x_{2,1} + 12x_{2,2} + 15x_{2,3} - 11x_{1,1} - 9x_{1,2} - 13x_{1,3} \\ s.t. \\ \text{Constraints of problem (13)}. \end{aligned} \quad (14)$$

مثال ۱: شرکتی در صدد تولید سه محصول P_1 ، P_2 و P_3 است که با سه ماشین مختلف M_1 ، M_2 و M_3 پردازش می‌شوند. زمان‌های تقریبی مورد نیاز (بر حسب دقیقه) برای تولید هر واحد از محصول و ظرفیت تقریبی روزانه‌ی هر ماشین (بر حسب دقیقه در روز) در جدول ۱ آمده است. شرکت می‌خواهد که سود حاصل از فروش هر واحد از محصولات P_1 ، P_2 و P_3 به ترتیب نزدیک به ۱۴، ۱۳ و ۱۶ روپیه را حفظ نماید. فرض بر این است که تمام واحدهای تولید شده فروخته می‌شوند. شرکت می‌خواهد میزان تولید روزانه هر یک از سه محصول را تعیین کند به طوری که سود آن ماکزیمم گردد.

میزان زمان انجام کار ممکن است به دلیل خرابی ماشین‌ها و اضافه‌کاری‌ها روزانه متفاوت باشد. همچنین، سود حاصل از فروش را نمی‌توان به دلیل تغییرات قیمت به طور دقیق پیش‌بینی نمود. چون سود و زمان غیرقطعی می‌باشند، انتظار می‌رود که میزان تولید هر یک از سه محصول نیز غیرقطعی باشد. با در نظر گرفتن عدد فازی ذوزنقه‌ای برای پارامترهای نادقیق داده شده در جدول ۱ و با فرض این که \tilde{x}_1 ، \tilde{x}_2 و \tilde{x}_3 میزان تقریبی تولیدی روزانه‌ای باشند که به ترتیب از محصولات P_1 ، P_2 و P_3 تولید می‌شوند، مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی فازی زیر باید حل شود:

$$\begin{aligned} \max \tilde{z} &= (11, 13, 15, 17)\tilde{x}_1 + (9, 12, 14, 17)\tilde{x}_2 + (13, 15, 17, 19)\tilde{x}_3 \\ s.t. \\ (9, 11, 13, 15)\tilde{x}_1 + (11, 12, 14, 15)\tilde{x}_2 &+ (9, 11, 13, 15)\tilde{x}_3 \leq (469, 475, 505, 511) \\ (11, 12, 16, 17)\tilde{x}_1 + (11, 12, 14, 15)\tilde{x}_3 &\leq (452, 460, 480, 488) \\ (9, 11, 13, 15)\tilde{x}_1 + (11, 14, 16, 19)\tilde{x}_2 &\leq (469, 475, 505, 511) \\ \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3 &\geq \bar{0} \end{aligned} \quad (15)$$

جدول ۱: داده‌های مساله‌ی ترکیب تولید

ظرفیت	زمان تقریبی			ماشین‌ها
	P_3	P_2	P_1	
۴۹۰	۱۲	۱۳	۱۲	M_1
۴۷۰	۱۳	-	۱۴	M_2
۴۸۰	-	۱۵	۱۲	M_3

مثال ۲: مساله‌ی FFLP با قيود نامساوی زیر که مربوط به مساله‌ی رژیم غذایی است در نظر بگیرید. جزییات آن توسط داس و همکاران [۲۱] بیان شده است.

$$\begin{aligned} \max \bar{z} &= (7,10,14,17)\bar{x}_1 + (8,13,15,20)\bar{x}_2 \\ s.t. \\ (11,13,15,17)\bar{x}_1 + (9,11,13,17)\bar{x}_2 &\leq (96,100,102,108) \quad (۲۰) \\ (12,14,16,18)\bar{x}_1 + (8,12,14,18)\bar{x}_2 &\leq (104,112,114,118) \\ \bar{x}_1, \bar{x}_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

مساله‌ی (۲۰) را می‌توان با توجه به عملیات حسابی فازی و مقایسه دو عددی فازی بر اساس تعریف ۷ و نیز مساله‌ی (۱۰) به صورت مساله برنامه‌ریزی خطی چند هدفه‌ی زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \min z_1 &= 10x_{2,1} + 13x_{2,2} - 7x_{1,1} - 8x_{1,2} \\ \max z_2 &= 10x_{2,1} + 13x_{2,2} \\ \max z_3 &= \frac{1}{2}(10x_{2,1} + 13x_{2,2} + 14x_{3,1} + 15x_{3,2}) \\ \max z_4 &= (17x_{4,1} + 20x_{4,2} - 14x_{3,1} - 15x_{3,2}) \\ s.t. \\ 11x_{1,1} + 9x_{1,2} &\leq 96, \\ 13x_{2,1} + 11x_{2,2} &\leq 100, \\ 14x_{3,1} + 9x_{3,2} &\leq 102, \\ 17x_{4,1} + 17x_{4,2} &\leq 108, \\ 12x_{1,1} + 8x_{1,2} &\leq 104, \\ 14x_{2,1} + 12x_{2,2} &\leq 112, \\ 16x_{3,1} + 14x_{1,2} &\leq 114, \\ 18x_{4,1} + 18x_{1,2} &\leq 119, \\ x_{1,1} \geq 0, x_{2,1} - x_{1,1} &\geq 0, \\ x_{3,1} - x_{2,1} \geq 0, x_{4,1} - x_{3,1} &\geq 0, \\ x_{1,2} \geq 0, x_{2,2} - x_{1,2} &\geq 0, \\ x_{3,2} - x_{2,2} \geq 0, x_{4,2} - x_{3,2} &\geq 0. \end{aligned} \quad (۲۱)$$

با استفاده از روش الفبایی، جواب بهینه‌ی مساله‌ی (۲۱) و مقدار بهینه‌ی آن به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1^* &= (x_{1,1}^*, x_{2,1}^*, x_{3,1}^*, x_{4,1}^*) = (0, 0, 0, 0), \\ \bar{x}_2^* &= (x_{1,2}^*, x_{2,2}^*, x_{3,2}^*, x_{4,2}^*) = (0, 0, 0, 6.1111), \\ \bar{z}^* &= (0, 0, 0, 132.2222). \end{aligned} \quad (۲۲)$$

قابل ذکر است که با توجه به به کارگیری عملیات حساب فازی نادرست، جواب بهینه‌ی فازی بدست آمده از روش

با توجه به مقدار بهینه‌ی مساله‌ی (۱۴)، $z_1^* = 0$ ، مساله‌ی زیر حل می‌شود:

$$\begin{aligned} \max z_2 &= 13x_{2,1} + 12x_{2,2} + 15x_{2,3} \\ s.t. \\ 13x_{2,1} + 12x_{2,2} + 15x_{2,3} - 11x_{1,1} - 9x_{1,2} - 13x_{1,3} &= 0, \\ \text{Constraints of problem (13)}. \end{aligned} \quad (۱۵)$$

با توجه به مقدار بهینه‌ی مساله‌ی (۱۵)، $z_2^* = 0$ ، مساله‌ی زیر حل می‌شود:

$$\begin{aligned} \max z_3 &= \frac{1}{2}(13x_{2,1} + 12x_{2,2} + 15x_{2,3} + 15x_{3,1} + 14x_{3,2} + 17x_{3,3}) \\ s.t. \quad 13x_{2,1} + 12x_{2,2} + 15x_{2,3} &= 0 \\ 13x_{2,1} + 12x_{2,2} + 15x_{2,3} - 11x_{1,1} - 9x_{1,2} - 13x_{1,3} &= 0 \\ \text{Constraints of problem (13)}. \end{aligned} \quad (۱۶)$$

با توجه به مقدار بهینه‌ی مساله‌ی (۱۷)، $z_3^* = 574.5334$ ، مساله‌ی زیر حل می‌شود:

$$\begin{aligned} \max z_4 &= (17x_{4,1} + 17x_{4,2} + 19x_{4,3} - 15x_{3,1} - 14x_{3,2} - 17x_{3,3}) \\ s.t. \\ \frac{1}{2}(13x_{2,1} + 12x_{2,2} + 15x_{2,3} + 15x_{3,1} + 14x_{3,2} + 17x_{3,3}) &= 574.5334 \quad (۱۷) \\ 13x_{2,1} + 12x_{2,2} + 15x_{2,3} &= 0 \\ 13x_{2,1} + 12x_{2,2} + 15x_{2,3} - 11x_{1,1} - 9x_{1,2} - 13x_{1,3} &= 0 \\ \text{Constraints of problem (13)}. \end{aligned}$$

جواب بهینه‌ی مساله‌ی (۱۷) و مقدار بهینه‌ی آن به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} x_{1,1}^* &= 0, x_{2,1}^* = 0, x_{3,1}^* = 0, x_{4,1}^* = 0, \\ x_{1,2}^* &= 0, x_{2,2}^* = 0, x_{3,2}^* = 0, x_{4,2}^* = 1.5333, \\ x_{1,3}^* &= 0, x_{2,3}^* = 0, x_{3,3}^* = 0, x_{4,3}^* = 32.5333, \\ z_4^* &= 644.2. \end{aligned} \quad (۱۸)$$

بنابراین جواب بهینه‌ی و مقدار بهینه‌ی مساله‌ی (۱۲) برابر است با:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1^* &= (x_{1,1}^*, x_{2,1}^*, x_{3,1}^*, x_{4,1}^*) = (0, 0, 0, 0), \\ \bar{x}_2^* &= (x_{1,2}^*, x_{2,2}^*, x_{3,2}^*, x_{4,2}^*) = (0, 0, 0, 1.5333), \\ \bar{x}_3^* &= (x_{1,3}^*, x_{2,3}^*, x_{3,3}^*, x_{4,3}^*) = (0, 0, 0, 32.5333), \\ \bar{z}^* &= (0, 0, 0, 644.2). \end{aligned} \quad (۱۹)$$

قابل ذکر است که جواب بهینه‌ی فازی بدست آمده از روش داس و همکاران [۲۱] برای مساله‌ی (۱۲) نشدنی است.

قابل ذکر است که با توجه به به کارگیری عملیات حساب فازی نادرست، جواب بهینه‌ی فازی بدست آمده از روش داس و همکاران [۲۱] برای مساله‌ی (۲۴) نشدنی است.

۶- نتیجه‌گیری

تاکنون، محققین مدل‌های مختلفی از برنامه‌ریزی خطی فازی ارایه و بر حسب آن رویکردهای جواب بسیاری پیشنهاد داده‌اند. در این مقاله، نوع خاصی از مساله برنامه‌ریزی خطی فازی موسوم به مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی مورد بررسی قرار گرفت که در آن تمام پارامترهای مساله با اعداد فازی ذوزنقه‌ای نامنفی بیان شده‌اند. پس از مروری بر رویکرد پیشنهادی توسط داس و همکاران [۲۱] برای حل مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی با قیود مساوی، به نواقص و کاستی‌های روش پیشنهادی توسط همین نویسندگان در حل مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی با قیود نامساوی اشاره گردید. سپس رویکرد اصلاح‌شده‌ای برای حل مساله FFLP با قیود نامساوی پیشنهاد گردید که نواقص رویکرد جاری را برطرف می‌کند. رویکرد اصلاح شده با حل سه مثال عددی تشریح گردید و نتایج بدست آمده مزیت روش پیشنهادی را نسبت به روش جاری در یافتن جواب بهینه مساله FFLP با قیود نامساوی تایید می‌کند. تعمیم رویکرد پیشنهادی برای حل مسایل برنامه‌ریزی خطی با پارامترهای فازی بازه‌ای مقدار [۲۷، ۲۸] و فازی شهودی [۲۹، ۳۰] می‌تواند زمینه تحقیقات جدیدی برای کارهای آتی باشد.

داس و همکاران [۲۱] برای مساله‌ی (۲۱) نشدنی است.

مثال ۳: مساله‌ی FFLP با قیود نامساوی زیر که مربوط به مساله‌ی برنامه‌ریزی تولید یک شرکت است را در نظر بگیرید. جزییات این مساله توسط داس و همکاران [۲۱] بیان شده است.

$$\begin{aligned} \max \bar{z} &= (6, 8, 12, 14)\bar{x}_1 + (4, 5, 7, 8)\bar{x}_2 \\ s.t. \\ (0, 1, 2, 3)\bar{x}_1 + (4, 5, 7, 8)\bar{x}_2 &\leq (44, 46, 52, 54) \quad (23) \\ (1, 3, 5, 7)\bar{x}_1 + (-1, 1, 3, 5)\bar{x}_2 &\leq (38, 42, 48, 52) \\ \bar{x}_1, \bar{x}_2 &\geq \bar{0}. \end{aligned}$$

مساله‌ی (۲۳) را می‌توان با توجه به عملیات حسابی فازی و مقایسه دو عددی فازی بر اساس تعریف ۷ و نیز مساله‌ی (۱۰) به صورت مساله برنامه‌ریزی خطی چند هدفه‌ی زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \min z_1 &= 8x_{2,1} + 5x_{2,2} - 6x_{1,1} - 4x_{1,2} \\ \max z_2 &= 8x_{2,1} + 5x_{2,2} \\ \max z_3 &= \frac{1}{2}(8x_{2,1} + 5x_{2,2} + 12x_{3,1} + 7x_{3,2}) \\ \max z_4 &= (14x_{4,1} + 8x_{4,2} - 12x_{3,1} - 7x_{3,2}) \\ s.t. \\ 0x_{1,1} + 4x_{1,2} &\leq 44, \\ x_{2,1} + 5x_{2,2} &\leq 46, \\ 2x_{3,1} + 7x_{3,2} &\leq 52, \\ 3x_{4,1} + 8x_{4,2} &\leq 54, \quad (24) \\ x_{1,1} - x_{4,2} &\leq 38, \\ 3x_{2,1} + x_{2,2} &\leq 42, \\ 5x_{3,1} + 3x_{1,2} &\leq 48, \\ 7x_{4,1} + 5x_{4,2} &\leq 52, \\ x_{1,1} \geq 0, x_{2,1} - x_{1,1} &\geq 0, \\ x_{3,1} - x_{2,1} \geq 0, x_{4,1} - x_{3,1} &\geq 0, \\ x_{1,2} \geq 0, x_{2,2} - x_{1,2} &\geq 0, \\ x_{3,2} - x_{2,2} \geq 0, x_{4,2} - x_{3,2} &\geq 0. \end{aligned}$$

با استفاده از روش الفبایی، جواب بهینه‌ی مساله‌ی (۲۴) و مقدار بهینه‌ی آن به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1^* &= (x_{1,1}^*, x_{2,1}^*, x_{3,1}^*, x_{4,1}^*) = (0, 0, 0, 7.428571), \\ \bar{x}_2^* &= (x_{1,2}^*, x_{2,2}^*, x_{3,2}^*, x_{4,2}^*) = (0, 0, 0, 0), \quad (25) \\ \bar{z}^* &= (0, 0, 0, 104). \end{aligned}$$

fuzzy numbers in objective function. In: *Fuzzy Information and Engineering (ICFIE)*, pp. 988–999. Springer, Berlin.

[10] Negi, D.S., & Lee, E.S. (1993). Possibility programming by the comparison of fuzzy numbers. *Computers & Mathematics with Applications*, 25(9), 43–50.

[11] Fullér, R. (1989). On stability in fuzzy linear programming problems. *Fuzzy Sets and Systems* 30(3), 339–344.

[12] Hatami-Marbini, A., Agrell, P.J., Tavana, M., & Emrouznejad, A. (2013). A stepwise fuzzy linear programming model with possibility and necessity relations. *Journal of Intelligence and Fuzzy Systems*, 25(1), 81–93.

[13] Buckley, J.J., & Feuring, T. (2000). Evolutionary algorithm solution to fuzzy problems: fuzzy linear programming. *Fuzzy Sets and Systems*, 109(1), 35–53.

[14] Hashemi, S.M., Modarres, M., Nasrabadi, E., & Nasrabadi, M.M. (2006). Fully fuzzified linear programming, solution and duality. *Journal of Intelligence and Fuzzy Systems*, 17(1), 253–261.

[15] Hosseinzadeh Lotfi, F., Allahviranloo, T., Alimardani Jondabeh, M., & Alizadeh, L. (2009). Solving a full fuzzy linear programming using lexicography method and fuzzy approximate solution. *Applied Mathematical Modelling*, 33(7), 3151–3156.

[16] Kumar, A., Kaur, J., & Singh, P. (2011). A new method for solving fully fuzzy linear programming problems. *Applied Mathematical Modelling*, 35, 817–823.

[17] Kumar, A., & Kaur, J. (2014). Fuzzy optimal solution of fully fuzzy linear

فهرست منابع

[1] Ebrahimnejad, A., & Verdegay, J. L. (2018). *Fuzzy Sets-Based Methods and Techniques for Modern Analytics*. Studies in Fuzziness and Soft Computing, vol. 364. Springer, Cham.

[2] Tanaka, H., Ichihashi, H., & Asai, K. (1984). A formulation of fuzzy linear programming problems based on comparison of fuzzy numbers. *Control and Cybernetics*, 13, 186–194.

[3] Lai, Y.J., & Hwang, C.L. (1992). A new approach to some possibilistic linear programming problem. *Fuzzy Sets and Systems*, 49(2), 121–133.

[4] Wan, S.P., & Dong, J.Y. (2014). Possibility linear programming with trapezoidal fuzzy numbers. *Applied Mathematical Modeling*, 38, 1660–1672.

[5] Zimmerman, H.J. (1987). Fuzzy programming and linear programming with several objective functions. *Fuzzy Sets and Systems*, 1(1), 45–55.

[6] Delgado, M., Verdegay, J.L., & Vila, M.A. (1987). Imprecise costs in mathematical programming problems. *Control and Cybernetics*, 16(2), 113–121.

[7] Maeda, T. (2001). Fuzzy linear programming problems as bi-criteria optimization problems. *Applied Mathematics and Computation*, 120(1–3), 109–121.

[8] Zhang, G., Wu, Y.H., Remias, M., & Lu, J. (2003). Formulation of fuzzy linear programming problems as four-objective constrained optimization problems. *Applied Mathematics and Computation*, 139(2–3), 383–399.

[9] Cai, Q., Hao, Z., & Pan, S. (2007). The solution of linear programming with LR-

- [25] Kumar, A., & Kaur, A. (2014). Optimal way of selecting cities and conveyances for supplying coal in uncertain environment. *Sadhana*, 39(1), 165-187.
- [26] Ramik, J., & Rimanek, J. (1985). Inequality relation between fuzzy numbers and its use in fuzzy optimization. *Fuzzy Sets and Systems* 16(2), 123–138.
- [27] Ebrahimnejad, A. (2016). Fuzzy linear programming approach for solving transportation problems with interval-valued trapezoidal fuzzy numbers. *Sadhana*, 41(3), 299-316.
- [28] Ebrahimnejad, A. (2018). A method for solving linear programming with interval-valued trapezoidal fuzzy variables. *RAIRO - Operations Research*, 52(3), 955-979.
- [29] Ebrahimnejad, A., Verdegay, J. L. (2016). An efficient computational approach for solving type-2 intuitionistic fuzzy numbers based transportation problems. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 9(6), 1154-1173.
- [30] Ebrahimnejad, A., Verdegay, J. L. (2018). A new approach for solving fully intuitionistic fuzzy transportation problems. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 17(4), 447-474.
- programming problems using ranking function. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 16(1), 337-344.
- [18] Ezzati, R., Khorram, E., & Enayati, R. (2015). A new algorithm to solve fully fuzzy linear programming problems using the MOLP problem. *Applied Mathematical Modelling*, 39, 3183–3193.
- [19] Cheng, H., Huang, W., & Cai, J. (2013). Solving a fully fuzzy linear programming problem through compromise programming. *Journal of Applied Mathematics*, Art. ID 726296, 10.
- [20] Hosseinzadeh, A., & Edalatpanah, S.A. (2016). A new approach for solving fully fuzzy linear programming by using the lexicography method. *Advances in Fuzzy Systems*, Art. ID 1538496, 6.
- [21] Das, S.K., Mandal, T., & Edalatpanah, S.A. (2017). A mathematical model for solving fully fuzzy linear programming problem with trapezoidal fuzzy numbers. *Applied Intelligence* 46(3), 509–519.
- [22] Ebrahimnejad, A., & Tavana, M. (2014). A novel method for solving linear programming problems with symmetric trapezoidal fuzzy numbers. *Applied Mathematical Modelling*, 37(17-18), 4388-4395.
- [23] Ebrahimnejad, A., (2015). A duality approach for solving bounded linear programming problems with fuzzy variables based on ranking functions and its application in bounded transportation problems. *International Journal of Systems Science*, 46(11), 2048-2060.
- [24] Ebrahimnejad, A. (2016). New method for solving Fuzzy transportation problems with LR flat fuzzy numbers. *Information Sciences*, 37, 108-124.