دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال دهم، شماره چهل و هشتم، خرداد و تیر ۱۴۰۳
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

مساله مسیریابی روی کمان مبتنی بر همکاری با محدودیت زمان

محمدصادق شیری[۱*]، سیدمصطفی خرمی‌زاده[۲]

(۱) گروه ریاضی، دانشکده مهندسی و علوم پایه، واحد ارسنجان، دانشگاه آزاد اسلامی، ارسنجان، ایران
(۲) گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۱/۱۰/۱۲ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۲/۰۷/۰۶

چکیده

در این مقاله مساله‌ی مسیریابی روی کمان مبتنی بر همکاری با پارامتر زمان مورد بررسی قرار گرفته که به صورت اضافه‌کاری برای حامل‌ها و خدمت‌دهی به مشتریان، با هدف بیشینه کردن سود ائتلاف مستقل از سود فردی هر حامل در نظر گرفته شده است. در مدل ارایه شده دو نوع مشتری به صورت ضروری و اشتراکی در نظر گرفته شده که خدمت‌دهی به هر دو سودآور است. خدمت‌دهی به مشتریان نوع اول الزامی و به مشتریان نوع دوم با توجه به میزان سود حاصله و محدودیت زمان صورت می‌گیرد. در کاربردهای واقعی، زمان ارایه فعالیت حامل‌ها محدود به زمان کاری مرسوم حامل‌ها و از پیش مشخص است که می‌توان به صورت قید سخت اعمال شود. در این مقاله، افزایش زمان فعالیت حامل‌ها در قالب اضافه‌کاری با در نظر گرفتن هزینه‌های مرتبط بررسی شده که منجر به افزایش تعداد مشتریان خدمت‌دهی شده و در نتیجه باعث سودآوری بیشتر حامل‌ها می‌شود. مساله به صورت یک مدل برنامه‌ریزی خطی صحیح فرمولبندی شده است و بر روی ۱۱۸ نمونه از نمونه‌های مساله‌ی پستچی روستایی تست و نتایج آن گزارش شده است.

واژه‌های کلیدی: مساله‌ی مسیریابی روی کمان، همکاری، اضافه‌کاری، سود.

* عهده‌دار مکاتبات: Email:ms.shiri@iau.ir

۱- مقدمه

صنعت حمل و نقل با نارسایی‌هایی روبرو است که می‌تواند بر تولیدات شرکت‌ها، محیط، ازدحام شهری، مدیریت زنجیره تامین و رفاه کارگران تاثیر منفی بگذارد. هیچ راه‌حل واحدی به همه این مسایل نمی‌پردازد. این صنعت کاملا رقابتی است و شرکت‌ها برای ادامه کار خود باید حداکثر سطح کارایی را در نظر بگیرند. رقابت شدید قیمت‌ها را پایین می‌آورد و بنابراین حاشیه‌ی سود به سطح بسیار پایینی کاهش می‌یابد. برای افزایش کارایی، این شرکت‌ها می‌توانند در جایی که عملیات تدارکات آنها به طور مشترک برنامه‌ریزی شده باشد، با یکدیگر همکاری کنند[۱].

استراتژی‌های همکاری اخیرا با پیشرفت‌های فن‌آوری اطلاعات و ارتباطات افزایش یافته است که شرکت‌ها را قادر می‌سازد تا درخواست‌های حمل و نقل خود را برای افزایش عملکرد و سود شبکه و در عین حال کاهش هزینه‌های عملیاتی به اشتراک بگذارند [۲]. علاوه بر افزایش بهره‌وری، همکاری‌ها به اهداف زیست‌محیطی نیز کمک شایانی می‌کند. واضح است که حمل و نقل، یکی از عوامل اصلی انتشار گاز دی اکسید کربن است. بنابراین، مقامات دولتی شرکت‌ها را به همکاری دعوت و تشویق می‌کنند. هدف آن‌ها نه تنها کاهش انتشار مواد مضر، بلکه کاهش آلودگی صوتی و تراکم جاده‌هاست. بعلاوه، همکاری‌ها در زمینه تدارکات برای افزایش سطح خدمات، به دست آوردن سهم بازار، افزایش ظرفیت‌ها و کاهش تاثیرات منفی به کار گرفته شده‌اند.

اخیرا، موضوع همکاری مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است و نشان داده شده است که چگونه این تکنیک می‌تواند باعث بهبود: (الف) عملکرد لجستیکی حامل‌ها [۲]، (ب) شبکه‌ی توزیع کالا ([۳] و [۴])، و (ج) پایداری اقتصادی، زیست محیطی و اجتماعی ([۵] و [۶]) گردد.

استراتژی‌های مورد استفاده در سیستم حمل و نقل مبتنی بر همکاری ممکن است شامل تبادل مشتریان بین شرکت‌های حمل و نقل ([۷] و [۸])، به اشتراک‌گذاری ظرفیت وسایل نقلیه حامل‌های مختلف با انبار مشابه [۹]، تجمیع محموله‌های حامل‌های مختلف در مسیرهای تحویل [۱۰]، یا ارایه بار در مسیرهای برگشت برای کاهش سفرهای خالی ([۱۱] و [۱۲]) باشد.

در مساله‌ی مسیریابی روی کمان بدون ظرفیت مبتنی بر همکاری که نوع همکاری در آن از نوع متمرکز است، تصمیمات مشترک توسط یک متخصص مرکزی که دارای اطلاعات کامل است گرفته می‌شود. هر حامل یک انبار و مجموعه‌ای از مشتریان دارد. هر مشتری از طریق یک کمان مشخص می‌شود و خدمت‌دهی به آن باعث ایجاد درآمد می‌شود. در این طرح همکاری، هر حامل باید به بخشی از مشتریان خود خدمت‌دهی کند و قسمت باقیمانده را به اشتراک بگذارد تا احتمالا توسط سایر حامل‌ها خدمت‌دهی شوند. فرض بر این است که هر حامل دارای یک وسیله‌ی نقلیه‌ی بدون ظرفیت است. در این مساله، تضمین می‌شود که سود جمع‌آوری شده توسط هر حامل در طرح همکاری، از سودی که حامل به صورت مستقل آن را انجام می‌دهد، کمتر نباشد.

بسیاری از برنامه‌های کاربردی این مساله در شرکت‌های خصوصی، مانند توزیع پست و بسته‌بندی‌های کوچک و خدمات تاکسی به وجود می‌آیند که همکاری و رقابت باعث افزایش عملکرد آن‌ها می‌شود [۱۳]. در برنامه‌های کاربردی مبتنی بر سود، ایده‌ی اصلی همکاری، استفاده از ظرفیت همه‌ی حامل‌ها برای کسب سود بیشتر در مقایسه با حالتی است که به طور مستقل کار می‌کنند. علاوه بر این، در دنیای واقعی، زمان کار عادی برای حامل‌ها، از جمله زمان سفر و همچنین زمان خدمات، محدود به مقادیر از پیش تعریف‌شده است که می‌توانند از طریق محدودیت‌های سخت در مدل تعبیه شوند. با این حال، آزادسازی محدودیت‌های زمانی با افزایش زمان کاری شرکت‌های حمل و نقل، ممکن است مزایایی مانند سودآوری بیشتر برای ائتلاف به همراه داشته باشد.

از آن جایی که اکثر مقالات، مساله زمان را به صورت پنجره زمانی در نظر می‌گیرند، بدین گونه که تقاضای هر مشتری می‌بایست در پنجره زمانی خاصی برآورده گردد و چون تاکنون هیچ مقاله‌ای بحث زمان را در مساله همکاری میان حامل‌ها تحت عنوان اضافه‌کاری بررسی نکرده است. سهم اصلی این مقاله، ارایه اضافه‌کاری حامل‌ها در ساعات غیر از ساعات کاری حامل‌ها در بحث همکاری میان حامل‌هاست. که در این مقاله، با بررسی دقیق و تعریف متغیرها و پارامترها و تبدیل کردن آن، هم در تابع هدف به شکل سود که هدف اصلی مساله می‌باشد و هم در محدودیت‌های مساله، آورده است. بنابراین این مقاله یک مدل برنامه‌ریزی جدید را برای مساله‌ی مسیریابی روی کمان بدون ظرفیت مبتنی بر همکاری را در نظر می‌گیرد که شامل اضافه‌کاری برای حامل‌ها است. در واقع، این مدل اضافه‌کاری را در سود ائتلاف‌ها لحاظ می‌کند که به شرکت‌های حمل و نقل این امکان را می‌دهد تا زمان کار بیشتری را صرف خدمت‌دهی به مشتریان کنند تا در صورتی که این کار بصرفه باشد، سود بیشتری کسب کنند. نگارش این مقاله به صورت زیر است. در بخش ۲ مروری بر بیشینه تحقیق داریم. در بخش ۳ مساله را تعریف و مدل ارایه شده، توصیف و فرمول‌بندی شده است. برای فهم بیشتر مطلب، یک مثال ساده و تجزیه و تحلیل داده‌ها و نتایج عددی در بخش ۴ آورده شده است و در بخش ۵ نتیجه‌گیری ارایه شده است.

۲- پیشینه تحقیق

دنیای تجارت امروز تحت تاثیر جهانی سازی بازارها، تغییر سریع نیازهای مشتریان و نگرانی در مورد پایداری است. در نتیجه، شرکت‌ها به طور مداوم در حال جستجو برای استراتژی‌های جدید برای بهبود عملکرد تدارکات خود و اطمینان از رقابت خود در بازار امروز، به خصوص در شبکه‌ی توزیع کالاها، که یک مولفه‌ی اصلی در تمام زنجیره-های تامین است، هستند. در این زمینه، همکاری لجستیکی به عنوان یکی از موثرترین ساز و کارها برای شرکت-هایی که مایلند بهره‌وری تدارکات خود را افزایش دهند و به اهداف خود برای پایداری اقتصادی، زیست محیطی و اجتماعی دست یابند، در نظر گرفته می‌شود. این رویکرد اساسا بر هماهنگی و تلفیق فرآیندهای بین بازیگران زنجیره‌ی تامین متمرکز است و می‌تواند بصورت همکاری افقی بین گروهی از ذینفعان از زنجیره‌های تامین مختلفی که در یک سطح عمل می‌کنند (شرکت‌های انجام دهنده فعالیت‌های مشابه مانند شرکت‌های حمل و نقل)، یا بصورت همکاری عمودی با در نظر گرفتن روابط سلسله مراتبی در یک زنجیره تامین (مانند تولیدکننده، توزیع‌کننده، شرکت حمل و نقل و خرده‌فروش) یا با ترکیبی از همکاری افقی و عمودی، که به عنوان همکاری جانبی شناخته می شود، باشد [۱۴].

مسایل مسیریابی به دلیل تاثیر اقتصادی زیاد و چالش‌های ریاضیاتی که در مطالعه و حل آن‌ها وجود دارد، طی ۶۰ سال گذشته مورد توجه‌ی بسیاری از محققان قرار گرفته است. مسایل مسیریابی می‌تواند به مسایل مسیریابی روی گره‌ها، که در آن مشتریان می‌توانند توسط گره‌های شبکه نمایش داده شوند و مسایل مسیریابی روی کمان، که در آن خدمت‌دهی در کمان‌ها یا یال‌های شبکه انجام می‌شود، طبقه‌بندی شوند [۱۵]. مساله‌ی مسیریابی وسیله‌ی نقلیه، اولین بار توسط دانتزیگ و رامسر [۱۶] در سال ۱۹۵۹ میلادی معرفی شد. تا به امروز، این مساله یکی از گسترده‌ترین مسایل در زمینه بهینه‌سازی ترکیباتی است [۱۷]. یک ناوگان از وسایل نقلیه و یک مجموعه‌ای از درخواست‌های حمل و نقل داده شده است، هدف تعیین مجموعه‌ای از مسیرهای بهینه برای تحقق این درخواست‌ها ضمن برآورده ساختن محدودیت‌های خاص است [۱۸] و [۱۹]. مقاله‌ی [۲۰]، مساله‌ی مسیریابی چنددوره‌ای وسیله‌ی نقلیه را با زمان سررسید بررسی می‌کند. یک حامل مجبور است برای بازدید از مجموعه‌ای از

مشتریان در یک افق برنامه‌ریزی شده، توسط ناوگانی از وسایل نقلیه‌ی ظرفیت‌دار، برنامه‌ی توزیع را با هدف به حداقل رساندن هزینه‌های توزیع و هزینه‌های مربوط به جریمه‌ی تاخیر در تحویل کالا تعیین کند.

اولین مساله مسیریابی روی کمان که با ماکسیمم کردن سود سروکار دارد، مساله ماکسیمم کردن سود پستچی چینی است که توسط مالاندراکی و داسکین [۲۱] در سال ۱۹۹۳ معرفی شده جایی که نوع جهت‌دار آن مورد مطالعه قرار گرفته شده است. در مقاله [۲۲]، مساله‌ی مسیریابی روی کمان را در نظر می‌گیرد که سود و تقاضا و زمان سفر به هر یال از یک گراف، که مشتریان را نشان می‌دهد، اختصاص یافته است. هدف، یافتن مجموعه‌ای از مسیرها است که محدودیت‌های طول مسیر و ظرفیت وسیله‌ی نقلیه را برآورده کرده و کل سود جمع‌آوری شده را به حداکثر برساند.

در زمینه بهینه‌سازی مسایل مسیریابی، تنها چند مقاله، مدل‌هایی را با هدف بهینه‌سازی مسیرهای شرکت‌های درگیر در یک طرح همکاری پیشنهاد کرده‌اند. مقاله‌ی [۱۳]، به مطالعه یک مساله‌ی مسیریابی روی کمان بدون ظرفیت سودآور با چندین مبدا می‌پردازد، جایی که حامل‌ها برای بهبود سود به دست آمده همکاری می‌کنند. یک کران پایین برای سود فردی هر حامل لحاظ می‌شود. این کران پایین ممکن است سود حامل را در صورت عدم همکاری نشان دهد. در مقاله‌ی [۴]، هر حامل مشتریانی دارد که از نظر جغرافیایی در یک منطقه مشخص پراکنده هستند حامل‌ها به منظور ایجاد شبکه‌ی بهینه و سود بیشتر با به اشتراک گذاری مرکز توزیع خود تشکیل ائتلاف داده و با هم همکاری می‌کنند. و یک الگوریتم برای یافتن ساختار ائتلاف و تخصیص هزینه برای هر یک ایجاد می‌کند. مقاله‌ی [۲۳]، یک مساله‌ی جدید مسیریابی وسیله‌ی نقلیه را معرفی می‌کند که در آن چندین حامل برای خدمت‌دهی به مشتریان تشکیل ائتلاف داده‌اند به گونه‌ای که بعضی از مشتریان تقاضاهایی دارند که بیش از یک حامل آن را انجام می‌دهند. در این مساله هدف کاهش هزینه‌ی عملیات همپوشانی در چارچوب همکاری میان حامل‌ها برای خدمت‌دهی به مشتریان اشتراکی است. در مقاله‌ی [۲۴]، مزایای همکاری میان شرکت‌های با بار کمتر از بار کامیون، در برآورده کردن کارهای برداشت و تحویل مورد بررسی قرار داده شده است. از طرح همکاری متمرکز استفاده می‌کند جایی که یک مدیر مرکزی کارهایی که توسط حامل‌های مختلف در یک استخر عمومی قرار داده شده‌اند را به حامل‌های ائتلاف به وسیله‌ی تعیین مسیرهای بهینه برای برداشت و تحویل تمام کارها با هدف مینیمم کردن هزینه‌ی کل حمل و نقل اختصاص می‌دهد. در مقاله‌ی [۱۹]، یک مساله‌ی مسیریابی وسیله‌ی نقلیه مبتنی بر همکاری چند دوره‌ای متمرکز را با ثبات زمان و خدمات و تعادل بار کار بررسی می‌کند، جایی که حامل‌ها می‌توانند مشتریانی را که باید به طور منظم خدمت‌دهی شوند مبادله کنند. حامل‌ها فقط در صورت تضمین حداقل سهم بازار ممکن است مایل به همکاری باشند. در مقاله [۲۵] به مساله‌ی مسیریابی روی کمان بدون ظرفیت مبتنی بر همکاری در گراف‌های طوفانی می‌پردازد. یک فرمول برنامه‌نویسی عدد صحیح در مساله به کار رفته و یک تکنیک جدید برای ساخت تورهای شدنی مستقل ارایه شده است و برای بررسی چندوجهی مرتبط استفاده می‌شود. علاوه بر این، برخی از نامساوی‌های معتبر شناخته شده مانند نامساوی‌های پل_مسیر برای مساله تنظیم شده و ثابت شده است که القا کننده وجه هستند. در نهایت، یک الگوریتم شاخه و برش برای مساله توسعه داده شده و برخی جداول از نتایج عددی برای مقایسه و ارزیابی کارایی الگوریتم فراهم گردیده است. در مقاله [۷]، حامل‌هایی را در نظر می‌گیرد که بر اساس همکاری افقی تشکیل یک ائتلاف به صورت سرویس تاکسی اشتراکی می‌دهند، مدل‌های برنامه‌نویسی عدد صحیح مختلط را برای بهینه‌سازی مسیرهایشان ارایه داده و محدودیت‌هایی را با هدف کنترل تبادل حجم کاری هر حامل با سایر حامل‌ها بکار می‌گیرد. این

محدودیت‌ها تبادل حجم کار را از نظر زمان سفر و خدمت‌دهی به مشتریان محدود کرده به گونه‌ای که حجم کار هر حامل در زمان همکاری بسیار کمتر از زمان قبل از توافق همکاری بین حامل‌هاست.
با توجه به اهمیت زمان در مطالعه بر روی مسایل مسیریابی روی کمان، مروری کوتاه بر ادبیات مرتبط شده است. در مسایل مسیریابی روی کمان مبتنی بر زمان، خدمت دهی روی کمان باید در یک زمان مشخص تکمیل شود. اگر زمان خدمت‌دهی نتواند از این آستانه تجاوز کند، زمان سخت محسوب می‌شود و اگر زمان خدمت‌دهی با هزینه بیشتر مجاز به انجام دیرتر از این محدودیت زمانی باشد، به آن زمان نرم می‌گویند [۱۵]. چندین مطالعه کاربردهای مبتنی بر زمان واقعی مسایل مسیریابی روی کمان را در نظر می‌گیرند، مانند نقشه‌برداری سیار [۲۶]، پیک شهری و مساله‌ی زمان‌بندی [۲۷]، تعمیر و نگهداری راه‌آهن [۲۸]، برف‌روبی [۲۹]، تحویل روزنامه، تحویل بسته و تحویل مبلمان [۳۰].
تا آنجا که می‌دانیم، هیچ مطالعه‌ای در مورد مسایل مسیریابی روی کمان سودآور همراه با زمان سفر به صورت اضافه‌کاری در چارچوب همکاری بین حامل‌ها انجام نشده است. برای پر کردن این شکاف، این مقاله یک مدل برای مساله‌ی مسیریابی روی کمان بدون ظرفیت مبتنی بر همکاری با اضافه‌کاری در بخش حمل و نقل را با وارد کردن بحث زمان در تابع هدف و قیود پیشنهاد می‌کند. در این مدل، زمان کاری که شامل زمان پیمایش و خدمت‌دهی است را برای حامل‌ها در تابع هدف به صورت اضافه‌کاری و در قیود، آزادسازی زمان از محدودیت سخت به محدودیت نرم مورد بررسی قرار داده شده است.

۳- تعریف مساله

فرمول‌بندی این مساله حالتی از مساله‌ی همکاری بین حامل‌های خدمت‌رسان، با اضافه شدن زمان کاری حامل‌ها در خدمت‌دهی به مشتریان است. در این مساله، مجموعه‌ای از حامل‌ها که هرکدام دارای یک انبار(مبدا)، یک وسیله‌ی نقلیه بدون محدودیت ظرفیت که دارای محدودیت زمان برای انجام سفر هستند در نظر گرفته شده است. مشتریان روی کمان‌های گراف در نظر گرفته می‌شوند و وقتی که وسیله‌ی نقلیه کمان را پیمایش می‌کند، مشتریان خدمت‌دهی می‌شوند. بنابراین، اصطلاحات کمان‌های دارای تقاضا و مشتریان به جای یکدیگر استفاده می‌شوند. حامل‌ها تحت نظارت و هدایت یک تصمیم گیرنده‌ی مرکزی که به عنوان شخص ثالث به صورت بی-طرفانه عمل می‌کند به صورت زیر به یک توافق همکاری می‌رسند. هدف یافتن مسیر برای هر حامل با توجه به زمان کاری مرسوم و حداکثر زمان اضافه‌کاری در چارچوب توافق همکاری است به گونه‌ای که سود ائتلاف حداکثر گردد. طرح همکاری که در این مقاله مورد بررسی قرار گرفته شده است به صورت زیر است. هر مشتری به یک حامل خاص اختصاص داده شده و مشتریان هر حامل به دو دسته تقسیم می‌شوند:
دسته اول مشتریانی هستند که به دلیل الزامات قراردادی یا سایر انواع ملاحظات استراتژیک، مانند روابط خاص، راحتی یا سودآوری بالا باید توسط خود حامل خدمت‌دهی شود و دسته دوم مشتریانی هستند که حامل مایل است به دلیل سودآوری کم یا سطح پایین اشتراک جغرافیایی با سایر مشتریان، آن‌ها را با سایر حامل‌ها به اشتراک بگذارد. مشتریان متعلق به دسته‌ی اول "مشتریان ضروری" نامیده شده و مجموعه ضروری را تشکیل می‌دهند و مشتریان مربوط به دسته‌ی دوم " مشتریان اشتراکی" نامیده شده و مجموعه اشتراکی را تشکیل می‌دهند. به تمام مشتریان ضروری و اشتراکی، مشتریان تقاضا می‌گویند. توجه داشته باشید که اگرچه هر مشتری به یک حامل اختصاص داده می‌شود، اما می‌توان چندین مشتری را به یک حامل اختصاص داد. در حالی که مشتریان ضروری باید توسط حامل اختصاص داده شده به آن‌ها خدمت‌دهی شود، مشتریان اشتراکی مجاز هستند توسط هر حاملی

خدمت‌دهی شوند یا اصلا توسط هیچ حاملی خدمت‌دهی نشوند. این معمولا زمانی اتفاق می‌افتد که مشتری برای هیچ حاملی سودآور نبوده یا قبل از خدمت‌دهی به محدودیت زمانی رسیده باشد.

هر مشتری که خدمت‌دهی شود مقداری پول به حاملی که مشتری به آن اختصاص داشته است پرداخت می‌کند. چنانچه یک مشتری اشتراکی توسط حاملی بجز حاملی که مشتری به آن اختصاص داده شده است خدمت‌دهی گردد قسمتی از درآمد بدست آمده توسط حامل اختصاص یافته، به حاملی که واقعا خدمت‌دهی را انجام داده است پرداخت می‌گردد. مقدار پرداخت جانبی روی هر کمان توسط حامل اصلی که کمان به آن اختصاص یافته تعیین می‌گردد. هر مشتری حداکثر یک‌بار و فقط توسط یک حامل خدمت‌دهی می‌شود. بنابراین درآمد فقط در بار اولی که کمان پیموده می‌شود بدست می‌آید حتی اگر کمان چندین بار پیمایش شود. هر بار که یک کمان پیموده می‌شود صرف‌نظر از اینکه کمان تقاضا هست یا نه، یک هزینه به حامل تحمیل می‌شود.

هر حامل توسط یک انبار، یک وسیله‌ی نقلیه و یک مسیر مشخص می‌شود و توجه می‌کنیم که مسیر یک حامل از انبار شروع و به همان انبار ختم می‌گردد.

به منظور بیان مساله، نمادهای به کار رفته را معرفی می‌کنیم. گراف مساله به صورت یک گراف جهت‌دار همبند قوی $G=(V,A)$ با مجموعه رئوس V و مجموعه کمان A نشان داده می‌شود. مجموعه‌های ضروری و اشتراکی مشتریان به ترتیب با R و S نشان داده می‌شوند و اجتماع آنها مجموعه کمان‌های تقاضا D را تشکیل می‌دهد، یعنی $D=R\cup S$ و $R\cap S=\varnothing$. هر بار که هر کمان $a\in A$ توسط وسیله‌ی نقلیه‌ی یک حامل پیموده می‌شود، صرف‌نظر از اینکه تقاضای کمان برآورده شده یا نه، مقدار c_a به عنوان هزینه‌ی پیمایش برای آن حامل در نظر گرفته می‌شود. هر کمان تقاضا $a\in D$ توسط وسیله‌ی نقلیه‌ی اختصاص داده شده‌ی خود حامل یا وسیله‌ی نقلیه‌ی حامل دیگری که آن کمان را پیمایش می‌کند خدمت‌دهی می‌شود. چنانچه توسط حامل اختصاص داده شده خدمت‌دهی شود، مقداری پول r_a توسط مشتری a به حامل پرداخت می‌گردد. علاوه بر این، اگر یک کمان اشتراکی $a\in S$ توسط حاملی متفاوت از حامل اختصاص داده شده خدمت‌دهی شود، بخشی از درآمد جمع‌آوری‌شده روی آن کمان، توسط حامل اختصاص‌یافته، به حاملی که به آن کمان خدمت‌دهی می‌کند پرداخت می‌گردد (پرداخت‌های جانبی $g_a(\le r_a)$). فرض کنیم $L=\{۱,۲,۳,...,|L|\}$ مجموعه اندیس حامل‌ها باشد که انبار آن‌ها در رئوس گراف هستند و با نماد $v^l\in V,\ l\in L$ نشان داده شده‌اند آنگاه برای هر حامل $l\in L$ خواهیم داشت $I^l=L\setminus\{l\}$. مجموعه‌ی مشتریان ضروری و اشتراکی حامل $l\in L$ را به ترتیب با R^l و S^l نشان داده و بنابراین داریم: $R^l\cup S^l=D^l$، $R^l\cap S^l=\varnothing$، $\bigcup_{l\in L}R^l=R$ و $\bigcup_{l\in L}S^l=S$.

در این مساله، هر کمان ضروری $a\in R^l$ باید توسط حامل l خدمت‌دهی شود در حالیکه هر کمان اشتراکی $a\in S^l$ می‌تواند توسط حامل l یا حامل $h\in I^l$ خدمت‌دهی گردد و یا توسط هیچ حاملی خدمت‌دهی نشود. حامل l، بابت خدمت‌دهی به مشتری $a\in D$ مقدار r_a پول دریافت می‌کند که این درآمد r_a بابت خدمت‌دهی به مشتریان ضروری $a\in R^l$ و خدمت‌دهی به مشتریان اشتراکی $a\in S^l$ است حتی اگر توسط حامل $h\in I^l$ خدمت‌دهی شده باشند. اگر حامل h به مشتری اشتراکی $a\in S^l$ خدمت‌دهی کند آنگاه مقدار g_a پرداخت جانبی از طرف حامل l دریافت می‌کند که این مقدار به سود حامل h اضافه و از سود حامل l کسر می‌شود.

۳ – ۱ فعالیت اضافه‌کاری

در فرمول‌بندی‌های مساله موجود در ادبیات، هر حامل حداکثر برای مدت معین T^U در هر روز کار می‌کند که

معمولا به عنوان یک محدودیت سخت در زمان کار حامل منظور می‌شود. زمان کاری هر حامل شامل زمان پیمایش هر کمان $a \in A$ ، t_a^d و زمان خدمت‌دهی به مشتریان روی هر کمان دارای تقاضا $a \in D$ ، t_a^s در مسیر آن حامل است. با این حال در دنیای واقعی، اگر برای حامل‌ها بصرفه باشد که بتوانند هزینه‌های اضافی (مانند پرداخت کارکنان و هزینه‌های مربوط به وسیله‌ی نقلیه‌ی حامل) را توجیه کنند، معمولا ساعاتی را بعنوان ساعت اضافه‌کاری در نظر می‌گیرند. بنابراین، پیشنهاد می‌کنیم که به شرکت‌های حمل و نقل اجازه داده شود حداکثر T^O ساعت اضافه‌کاری را انجام دهند. به عبارت دیگر، برای زمان کاری هر حامل، یک محدودیت نرم (T^U) و یک محدودیت سخت ($T^U + T^O$) وجود دارد. هزینه‌ی اضافه‌کاری برای حامل l را با φ^l، نشان می‌دهیم که در اینجا، φ^l مقدار پول پرداخت شده توسط حامل l برای هر ساعت اضافه‌کاری را نشان می‌دهد. بنابراین، با وجود سود بالقوه، یک حامل در صورت انجام اضافه‌کاری، متحمل هزینه نیز می‌شود.

سود هر حامل $l \in L$، اختلاف بین کل درآمدها و کل هزینه‌هاست که هزینه‌ها شامل هزینه‌ی پیمایش و هزینه‌ی اضافه‌کاری است. هدف، یافتن یک مسیر برای هر حامل با توجه به طرح همکاری است، به طوری که با توجه به محدودیت زمان، سود کل ائتلاف حامل‌ها بیشینه گردد. باید توجه کرد که همکاری بین حامل‌ها زمانی معنادار است و حامل‌ها تشکیل ائتلاف می‌دهند که سود فردی هر حامل، از سودی که هر حامل در حالت همکاری بدست می‌آورد، کمتر نباشد. τ^l را سود فردی حامل l (حداقل سود مورد انتظار برای حامل l) نامیده و این موضوع را به عنوان یک محدودیت در نظر گرفته و در محدودیت‌های مساله بکار برده می‌شود.

۳-۲- مدل پیشنهادی

برای فرمول‌بندی مساله دو مجموعه متغیر تصمیم‌گیری به صورت زیر تعریف می‌کنیم تا کمان‌هایی را که هر حامل $l \in L$ خدمت‌دهی و پیمایش می‌کند را شناسایی کند. متغیر دودویی y_a^l برابر با یک است اگر کمان $a \in D$ توسط وسیله‌ی نقلیه‌ی حامل l خدمت‌دهی شود، در غیر این‌صورت برابر با صفر است و متغیر صحیح نامنفی x_a^l تعداد دفعاتی است که وسیله‌ی نقلیه‌ی حامل l کمان $a \in A$ را پیمایش می‌کند.

برای هر حامل l، درآمد کل برابر است با

$$\sum_{a \in D^l} r_a y_a^l + \sum_{a \in S^l} \left[(r_a - g_a) \sum_{i \in I^l} y_a^i \right] + \sum_{i \in I^l} \sum_{a \in S^i} g_a y_a^l$$

که در آن عبارت اول، درآمد بدست آمده از خدمت‌دهی به کمان‌های اختصاص یافته به حامل l، عبارت دوم، درآمد بدست آمده از خدمت‌دهی به کمان‌های اشتراکی اختصاص یافته به حامل l توسط حامل $h \in I^l$ و عبارت سوم، درآمد بدست آمده از خدمت‌دهی به کمان‌های اشتراکی اختصاص یافته به حامل $h \in I^l$ توسط حامل l است.

در این مقاله، اساسا دو نوع هزینه که مربوط به هزینه‌ی پیمایش و هزینه‌ی اضافه‌کاری هست وجود دارد.

هزینه‌ی پیمایش حامل‌ها: هزینه‌ی پیمایش مسیر حامل l برابر است با $\sum_{a \in A} c_a x_a^l$ است.

هزینه‌ی اضافه‌کاری حامل‌ها: اگر t_a^d و t_a^s به ترتیب زمان پیمایش و خدمت‌دهی به مشتریان روی کمان a باشد، معادله‌ی زیر زمان کاری مسیر حامل l را بر حسب ساعت، نشان می‌دهد.

$$T^l = \sum_{a \in A} t_a^d x_a^l + \sum_{a \in R^l \cup S} t_a^s y_a^l \qquad (۱)$$

با استفاده از معادله‌ی (۱)، عبارت زیر برای جریمه‌ی ساعت کاری بیشتر از T^U (هزینه اضافه کاری) برای حامل l پیشنهاد می‌شود.

$$\max\left\{0,\ \left(T^l - T^U\right)\right\}\times\varphi^l$$

به عبارت دیگر، اگر زمان کاری حامل l از T^l به T^U تغییر کند، یعنی $T^U > T^l$، آنگاه مقدار $\left(T^l - T^U\right)\times\varphi^l$ به هزینه‌ی حامل l اضافه می‌شود. سود کل ائتلاف برابر با مجموع سود فردی تمام حامل‌هاست. بنابراین سود کل هر حامل که اختلاف بین درآمد و هزینه است به صورت زیر بدست می‌آید

$$P^l = \sum_{a\in D^l} r_a y_a^l + \sum_{a\in S^l}\left[(r_a - g_a)\sum_{i\in I^l} y_a^i\right] + \sum_{i\in I^l}\sum_{a\in S^i} g_a y_a^l - \sum_{a\in A} c_a x_a^l - \max\left\{\cdot\ ,\ \left(T^l - T^U\right)\right\}\times\varphi^l \qquad (۲)$$

در نتیجه تابع هدف مساله که به حداکثر رساندن سود ائتلاف حامل‌ها هست به صورت زیر مشخص می‌گردد

$$\max\sum_{l\in L} P^l$$

۳ – ۲ – ۱ خطی کردن تابع هدف

معادله‌ی (۲) غیرخطی است و در ابتدا برای حل آن با استفاده از نرم‌افزار *CPLEX*، بایستی آن را خطی نمود. برای خطی کردن معادله‌ی (۲)، از تغییر متغیر زیر برای هر حامل l استفاده می‌کنیم

$$\delta_l := \max\left\{\cdot\ ,\ T^l - T^U\right\},\ \ l\in L \qquad (۳)$$

که این کار با اضافه کردن قیود زیر به مدل معادل است

$$\delta_l \geq 0,\ T^l - \delta_l \leq T^U,\ \ l\in L$$

با استفاده از (۳)، معادله‌ی (۲) به صورت خطی زیر می‌شود

$$P^l = \sum_{a\in D^l} r_a y_a^l + \sum_{a\in S^l}\left[(r_a - g_a)\sum_{i\in I^l} y_a^i\right] + \sum_{i\in I^l}\sum_{a\in S^i} g_a y_a^l - \sum_{a\in A} c_a x_a^l - \delta_l\times\varphi^l \qquad (۴)$$

۳-۳- مدل صحیح خطی مساله

این بخش مدل صحیح خطی پیشنهادی را توصیف می‌کند.

$$\max\sum_{l\in L} P^l \qquad (۵)$$

$$\sum_{a\in R^l\cup S} t_a^s y_a^l + \sum_{a\in A} t_a^d x_a^l - \delta_l \leq T^U,\ \ l\in L \qquad (۶)$$

$$\cdot \leq \delta_l \leq T^O,\ \ \ l\in L \qquad (۷)$$

$$\sum_{\{i|(u,i)\in A\}} x_{ui}^l = \sum_{\{i|(i,u)\in A\}} x_{iu}^l\ \ ,\ l\in L,\ u\in V \qquad (۸)$$

$$\sum_{\{i|(v^l,i)\in A\}} x_{v^l i}^l \geq ۱\ \ ,\ \ l\in L,\ R^l\neq\varnothing \qquad (۹)$$

$$\sum_{\{i|(v^l,i)\in A\}} x^l_{v^l i} \geq y^l_a \ , \ l\in L,\ R^l=\varnothing,\ a\in S \qquad (۱۰)$$

$$\sum_{\substack{\{(i,j)\in A|\\ i\in F,\ j\notin F\}}} x^l_{ij} \geq y^l_a,\ F\subseteq V\setminus\{v^l\},\ a\in\gamma(F) \qquad (۱۱)$$

$$y^l_a = ۱\ , \quad a\in R^l,\ \ l\in L \qquad (۱۲)$$

$$\sum_{l\in L} y^l_a \leq ۱\ ,\ a\in D \qquad (۱۳)$$

$$y^l_a \leq x^l_a\ ,\ a\in A,\ \ l\in L \qquad (۱۴)$$

$$P^l \geq \tau^l,\ \ l\in L \qquad (۱۵)$$

$$x^l_a\in Z^+,\ a\in A,\ l\in L;\ \ y^l_a\in\{۰,۱\},$$
$$a\in D,\ l\in L \qquad (۱۶)$$

تابع هدف (۵)، مجموع سود ائتلاف حامل‌ها را بیشینه می‌کند. قید (۶) و (۷) قیود خطی شده‌ی مربوط به زمان را نشان می‌دهند که در آن‌ها، δ_l نشان‌دهنده‌ی اضافه‌کاری حامل l است که توسط کران بالای T^O محدود می‌شود. قید (۸) تضمین می‌کند که تعداد کمان‌های ورودی با تعداد کمان‌های خروجی در هر راس، با هم برابر هستند. قیود (۹) و (۱۰) حامل‌ها را مجبور می‌کنند که مسیرهایشان را از انبار خودشان شروع کنند. در حالی که قید (۹) مسیر حامل l، مسیری است که شامل مجموعه مشتریان ضروری است، یعنی در صورتی که حامل l مشتری ضروری داشته باشد از انبار خارج می‌شود. ولی مسیرهای موجود در قید (۱۰)، هیچ مشتری ضروری ندارد و فقط شامل بعضی از مجموعه مشتریان اشتراکی هست، یعنی در صورتی که $y^l_a = 0$ ، حامل l به مشتری a خدمت-دهی نمی‌کند و بنابراین وسیله‌ی نقلیه‌ی حامل l از انبار خارج نمی‌شود، در غیر این‌صورت حداقل یک بار برای خدمت‌دهی به مشتریان اشتراکی از انبار خارج می‌شود. همبندی مسیرهای هر حامل توسط قید (۱۱) تضمین می‌شود. برای هر $F\subseteq V\setminus\{v^l\}$ که تشکیل زیرتور می‌دهند، اگر حامل بخواهد به یک کمان $a\in\gamma(F)=\{(u,v)\in A|\ u,v\in F\}$ ، یعنی کمان با هر دو سر در F، خدمت‌دهی کند حتما می‌بایستی در یکی از رئوس از زیرتور خارج شود. توجه داشته باشید که حتی با وجود محدودیت‌های (۱۱)، ممکن است زیرتورهایی ایجاد شوند که هیچ کمانی از آن‌ها خدمت‌دهی نشده باشد، از آنجایی که چنین زیرتورهایی هیچ سودی ندارند، در هیچ جواب بهینه‌ای وجود نخواهند داشت. قیود (۸) تا (۱۱) مطمئن می‌کنند که پایان مسیر هر حامل در انبار خودش باشد. قید (۱۲) هر حامل l را مجبور می‌کند که به کمان‌های ضروری خودش خدمت‌دهی کند. قید (۱۳) تضمین می‌کند که کمان‌های اشتراکی حداکثر توسط یک حامل $l\in L$ خدمت‌دهی شوند. قید (۱۴) مطمئن می-سازد در صورتی که کمان a توسط حامل l خدمت‌دهی شود حداقل یک بار توسط آن حامل پیمایش شود. قید (۱۵) تضمین می‌کند که سود هر حامل l در حالت همکاری از سود آن حامل در حالت بدون همکاری که با τ^l نشان داده شده است، کمتر نباشد و در قید (۱۶) دامنه‌ی متغیرها نشان داده شده است.

۴- نتایج عددی

در این بخش، ابتدا برای مشاهده‌ی تاثیر زمان و اضافه‌کاری بر مدل ارایه شده، یک مثال ساده را بررسی می‌کنیم و سپس آن را بر روی مجموعه‌ای از داده‌های عمومی که توسط گروه‌های مختلفی ([۳۴] ,[۳۳], [۳۲], [۳۱]) گردآوری شده و در [۱۳] و [۲۵] نیز مورد استفاده قرار گرفته شده است، بکار می‌بریم.

۴ – ۱ مثال ساده

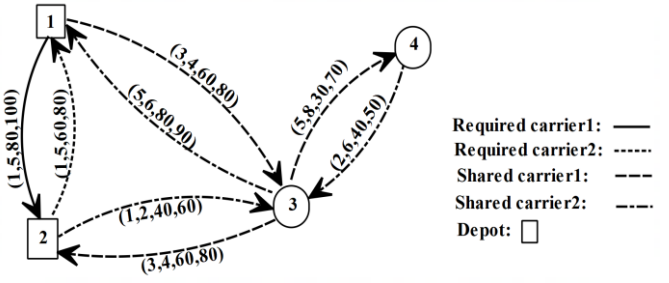
مثال: در شکل۱، یک گراف کوچک با چهار راس $\{۱,۲,۳,۴\}$ و دو حامل که انبار آن‌ها به ترتیب در رئوس ۱ و ۲ قرار دارند در نظر گرفته شده که کمان‌ها به صورت زیر تقسیم‌بندی شده‌اند:

$$R^{۱}=\{(۱,۲)\},\ R^{۲}=\{(۲,۱)\},$$
$$S^{۱}=\{(۱,۳),(۳,۲),(۳,۴)\},$$
$$S^{۲}=\{(۳,۱),(۲,۳),(۴,۳)\}$$

روی هر کمان، یک چهارتایی مرتب برچسب زده شده که عدد اول مربوط به هزینه، عدد دوم مربوط به درآمد، عدد سوم مربوط به زمان پیمایش و عدد چهارم مربوط به زمان خدمت‌دهی کمان است. در این مثال، هزینه‌ی اضافه‌کاری برای حامل‌ها به ازای هر ساعت را ۲ واحد ($\varphi^{l}=۲$) و پرداخت‌های جانبی مربوط به هر کمان اشتراکی را برابر با نصف درآمد روی همان کمان در نظر گرفته‌ایم ($g_a=۰/۵\ r_a$). از آنجایی که ساعت کاری مرسوم کشور ۸ ساعت $\left(T^{U}=۴۸۰\min\right)$ انجام می‌شود، به منظور تاثیر اضافه‌کاری بر سود حامل‌ها سه سناریو را پیاده‌سازی می-کنیم. مساله را در حالات مختلف کاری یعنی با قید سخت $\left(T^{O}=۰\min\right)$، قید نرم با ۲ ساعت اضافه‌کاری $\left(T^{O}=۱۲۰\min\right)$ و قید نرم با ۴ ساعت اضافه‌کاری $\left(T^{O}=۲۴۰\min\right)$ در نظر می‌گیریم.

در جداول ۱ و ۲ از علامت "$\rightarrow$" برای کمان صرفا پیمایش شونده، علامت "$\mapsto$" برای کمان خدمت‌دهی شده، مدت زمان مسیر $\left(T^{l}\right)$ و سود (P) برای هر حامل در هر سناریو و در حالت‌های همکاری و بدون همکاری استفاده می‌کنیم.

جداول ۱ و ۲ و شکل ۲ نشان می‌دهند که چگونه اضافه‌کاری می‌تواند سود ائتلاف را بهبود دهد. همان‌گونه که در شکل ۲ دیده می‌شود، سود ائتلاف در حالت بدون همکاری و با سناریو اضافه‌کاری از ۶ به ۱۰ و در قسمت مسیرها، در جدول ۱، تعداد کمان‌های خدمت‌دهی شده از ۳ به ۷ افزایش پیدا کرده است. در جدول ۲، برای سناریو اول سود ائتلاف برابر با ۱۲ است و فقط ۶ کمان از ۸ کمان مساله خدمت‌دهی شده است در حالی که برای سناریو دوم و سوم، هم سود و هم تعداد کمان‌های خدمت‌دهی شده بیشتر شده است و همان‌طور که در شکل ۲ برای حالت همکاری دیده می‌شود سود ائتلاف از ۱۲ به ۱۴/۷ افزایش یافته است. نکته‌ی قابل توجه در مثال این است که زمان و اضافه‌کاری، تاثیر زیادی در افزایش سود ائتلاف در حالت همکاری نسبت به حالت بدون همکاری دارد.



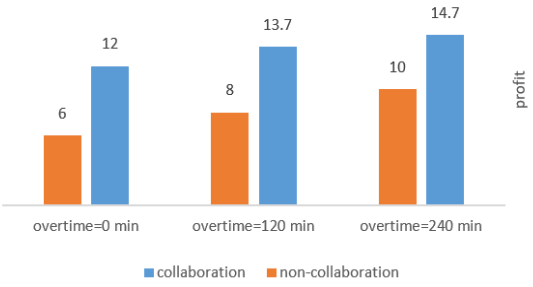
شکل۱ (تاثیر اضافه‌کاری): گراف مساله

جدول ۱ (تاثیر اضافه‌کاری بر سود کل): جواب بهینه درحالت غیرهمکاری وقتی که سود بیشینه می‌شود.

حامل	بدون همکاری								
	T^O =(دقیقه) ۰			T^O=(دقیقه) ۱۲۰			T^O=(دقیقه) ۲۴۰		
	مسیر	T^l	P	مسیر	T^l	P	مسیر	T^l	P
حامل ۱	$1\mapsto 2\to 3\mapsto 2\to 1$	۴۲۰	۳	$1\mapsto 2\to 3\mapsto 4\to 3\mapsto 2\to 1$	۵۶۰	۴	$1\mapsto 2\to 1\mapsto 3\mapsto 4\to 3\mapsto 2\to 1$	۷۲۰	۶
حامل ۲	$2\mapsto 1\to 2$	۲۲۰	۳	$2\mapsto 1\to 2\to 3\mapsto 1\to 2$	۵۱۰	۴	$2\mapsto 1\to 2\mapsto 3\mapsto 1\to 2$	۵۷۰	۴
سود کل			۶			۴			۱۰

جدول ۲ (تاثیر اضافه‌کاری بر سود کل): جواب بهینه درحالت همکاری وقتی که سود بیشینه می‌شود.

حامل	با همکاری								
	T^O =(دقیقه) ۰			T^O=(دقیقه) ۱۲۰			T^O=(دقیقه) ۲۴۰		
	مسیر	T^l	P	مسیر	T^l	P	مسیر	T^l	P
حامل ۱	$1\mapsto 2\mapsto 3\mapsto 1$	۴۵۰	۶	$1\mapsto 2\to 3\mapsto 4\mapsto 3\mapsto 1$	۵۸۰	۵/۷	$1\mapsto 2\mapsto 3\mapsto 1$	۴۵۰	۱۰
حامل ۲	$2\mapsto 1\mapsto 3\mapsto 2$	۴۲۰	۶	$2\mapsto 1\mapsto 3\mapsto 2$	۴۲۰	۸	$2\mapsto 1\mapsto 3\mapsto 4\mapsto 3\mapsto 2$	۶۱۰	۴/۷
سود کل			۱۲			۷			۱۴/۷



شکل ۲ (تاثیر اضافه‌کاری بر سود کل): سودکل برای سناریوهای اضافه‌کاری در حالت‌های همکاری و بدون همکاری.

۴- ۲- آزمایش روی داده‌های عمومی

در این قسمت با استفاده از نمونه‌های مرجع و معیار که از گروه‌های مختلفی جمع‌آوری شده است، مساله را مورد بررسی و آزمایش قرار می‌دهیم. کد نویسی این مساله با استفاده از برنامه‌نویسی $C\#$ و نرم‌افزار $CPLEX$ روی لپ‌تاپ شخصی با RAM ۸ گیگابایت و CPU ۱/۱۹ گیگاهرتز اجرا شده است. علاوه بر اطلاعات داده‌های عمومی استفاده شده در مقالات مختلف، نیاز به اطلاعات دیگری مانند زمان (زمان پیمایش و خدمت‌دهی) و هزینه‌ی اضافه‌کاری برای هر حامل است. برای این کار از ایده ارایه شده به شرح زیر برای تولید داده‌های زمانی استفاده می‌کنیم:

۱- طول هر کمان (بر حسب کیلومتر) برابر با یک‌دهم هزینه‌ی آن کمان است $len_a = ۰/۱\, c_a$ [۳۵].

۲- در فیزیک، سرعت متوسط وسیله‌ی نقلیه برابر با مسافت پیموده شده تقسیم بر مدت زمان پیمایش است. اگر سرعت وسیله‌ی نقلیه را ۳۵ کیلومتر بر ساعت در نظر بگیریم، آنگاه زمان پیمایش کمان برحسب دقیقه برابر است با $t_a^d = \frac{۶۰\ len_a}{۳۵}$.

۳- تعداد مشتریان روی هر کمان دارای تقاضا را عددی در بازه‌ی $[۱,۵]$ در نظر می‌گیریم $(q_a \in [۱,۵])$.

۴- زمان خدمت‌دهی به هر مشتری روی هر کمان دارای تقاضا برابر با ۵ دقیقه در نظر می‌گیریم. بنابراین مجموع زمان پیمایش و خدمت‌دهی به مشتریان روی کمان a برابر است با $\left(t_a^s = t_a^d + ۵q_a\right)$ [۳۵].

بعلاوه، هزینه‌ی اضافه‌کاری برحسب ساعت برای هر حامل (φ^l) را به صورت زیر و با استعلام از چندین شرکت پیمانکاری بزرگ محاسبه می‌کنیم. ابتدا سود حامل l را در حالت بدون همکاری بدست می‌آوریم و آن را بر مدت زمان انجام مسیر حامل l تقسیم می‌کنیم، سپس چهل درصد حاصل این تقسیم را بعنوان هزینه‌ی اضافه‌کاری حامل l منظور می‌کنیم.

جدول۳، اطلاعات مربوط به نمونه‌ها را بر اساس ویژگی‌ها و اندازه‌های آن‌ها گروه‌بندی می‌کند. این نمونه‌ها با دو و سه حامل تولید می‌شوند. تعداد نمونه‌های هر گروه و محدوده‌ی تعداد راس هر نمونه گروه به ترتیب در ستون‌های دوم و سوم نشان داده شده است. ستون‌ها R^l و S^l $(l = ۱,۲,۳)$ تعداد کمان‌های ضروری و اشتراکی حامل‌های یک، دو و سه را نشان می‌دهند. جدول ۴، اطلاعات مربوط به مقادیر پارامترهای مورد استفاده و تعداد نمونه‌های آزمایش شده در هر مورد را خلاصه می‌کند. مجموعه نمونه‌ها از ۱۴۱۶ نمونه تشکیل شده است.

جدول ۳: اطلاعات نمونه داده‌ها برای آزمایش

نمونه گروه	تعداد نمونه‌ها	تعداد راس‌ها	تعداد کمان‌های ضروری					تعداد کمان‌های اشتراکی				
			۲ - حامل		۳ - حامل			۲ - حامل		۳ - حامل		
			$\lvert R^1\rvert$	$\lvert R^2\rvert$	$\lvert R^1\rvert$	$\lvert R^2\rvert$	$\lvert R^3\rvert$	$\lvert S^1\rvert$	$\lvert S^2\rvert$	$\lvert S^1\rvert$	$\lvert S^2\rvert$	$\lvert S^3\rvert$
A	۲	۱۲۰-۹۰	۴۸-۵۰	۳۴-۲۳	۹۰-۴۶	۲۲-۱۱	۱۷	۴۸-۵۰	۳۵-۲۳	۴۶-۴۱	۲۳-۱۲	۱۷
D	۳۶	۱۰۰-۱۶	۵-۶۷	۷-۵۰	۶۱-۲	۴۰-۶	۲۹-۱	۶۷-۵	۵۰-۸	۶۲-۲	۴۰-۶	۲۹-۲
G	۳۶	۱۰۰-۱۶	۲۹-۰	۳۲-۰	۲۳-۰	۲۴-۰	۱۴-۰	۲۹-۱	۳۳-۱	۲۴-۱	۲۴-۱	۱۴-۰
P	۲۴	۷-۵۰	۴۸-۰	۴۶-۲	۴۳-۱	۴۲-۱	۲۲-۱	۴۸-۱	۴۷-۳	۴۴-۲	۴۲-۱	۲۳-۱
R	۲۰	۲۰-۵۰	۵۷-۱۰	۵۶-۵	۵۳-۶	۴۵-۳	۲۸-۳	۵۸-۱۰	۵۶-۶	۵۴-۶	۴۵-۳	۴۵-۴

در آزمایش زیر، سه سناریو شامل بدون اضافه‌کاری، با استفاده از ۲۵ درصد زمان کار به عنوان اضافه‌کاری و ۵۰ درصد از زمان کار به عنوان اضافه‌کاری در نظر گرفته شده است. در این آزمایش، سود روی نمونه‌های جدول ۳ به ترتیب با دو و سه حامل در حالت بدون همکاری و با همکاری به حداکثر می‌رسد که نتایج به ترتیب در جداول ۵ و ۶ نشان داده شده است. در هر ردیف از جداول، میانگین سود به دست آمده برای نمونه‌های هر گروه با در نظر گرفتن سه سناریو به ترتیب در ستون‌های $\#P_{S_۱}$، $\#P_{S_۲}$ و $\#P_{S_۳}$ نشان داده شده است.

در ستون های مربوط به سناریوی دوم و سوم علاوه بر میانگین سود، درصد افزایش میانگین سود سناریوی دوم و سوم نسبت به سناریوی اول با توجه به رابطه‌ی $\left(۱۰۰\frac{\#P_{S_i} - \#P_{S_۱}}{\#P_{S_۱}},\ i=۲,۳\right)$ محاسبه شده و در پرانتز نشان داده

شده است. نتایج به دست آمده نشان دهنده تاثیر مثبت فعالیت اضافه‌کاری بر سود در حالت همکاری نسبت به حالت بدون همکاری است.

در بخش محاسباتی، متوسط زمان CPU مورد نیاز برای حل نمونه‌های کوچک، مانند گروه‌هایی با کمتر از ۳۶ راس، کمتر از ۲ ثانیه، گروه‌هایی با رئوس بین ۳۶ تا ۵۰ راس بین ۲ تا ۴۸ ثانیه و گروه‌هایی با بیش از ۵۰ راس نیاز به تلاش محاسباتی بیشتری داشته که در این حالت متوسط زمان CPU به ۱۹۴ ثانیه رسیده است.

جدول ۴: تعداد نمونه‌ها برای ترکیب پارامترها و سناریوها

تعداد حامل‌ها	سناریو (اضافه‌کاری)(سود – بدون همکاری)			سناریو (اضافه‌کاری)(سود – با همکاری)		
	$T^O=0$	$T^O=0/25\ T^U$	$T^O=0/5\ T^U$	$T^O=0$	$T^O=0/25\ T^U$	$T^O=0/5\ T^U$
۲	۱۱۸	۱۱۸	۱۱۸	۱۱۸	۱۱۸	۱۱۸
۳	۱۱۸	۱۱۸	۱۱۸	۱۱۸	۱۱۸	۱۱۸

جدول ۵: تاثیر اضافه‌کاری روی سود حامل‌ها بدون همکاری برای سناریوهای مختلف با دو و سه حامل.

نمونه گروه	سناریو ۱ ($T^O=0$)		سناریو ۲ ($T^O=0.25T^U$)		سناریو ۳ ($T^O=0.5T^U$)	
	$\#P_{S_1}$		$\#P_{S_2}$		$\#P_{S_3}$	
	سود با ۲ حامل (دلار)	سود با ۳ حامل (دلار)	سود با ۲ حامل (درصد افزایش)	سود با ۳ حامل (درصد افزایش)	سود با ۲ حامل (درصد افزایش)	سود با ۳ حامل (درصد افزایش)
گروه A	۱۷۳۸۹/۱	۲۰۴۷۲/۱۹	۲۳۹۵۲/۶۷۰(+۲۷/۴۰)	۲۸۸۱۶/۴۲۷(+۲۸/۹۶)	۲۵۴۲۳/۷۹۱(+۳۱/۶۰)	۳۴۲۹۹/۶۸۴(+۴۰/۳۱)
گروه D	۲۴۳۴/۵	۳۳۵۹/۰۶۷	۳۵۱۹/۲(+۳۰/۸۲)	۴۲۹۵/۸۳۶(+۲۱/۸۱)	۴۰۷۹/۵۵۲(+۴۰/۳۲)	۵۱۸۶/۵۷۱(+۳۵/۲۴)
گروه G	۱۶۲/۹۱۴	۲۸۸/۳۵۶	۲۲۲/۴(+۲۶/۷۵)	۳۵۹/۴۸۱(+۱۹/۷۹)	۲۴۷/۵۰۴(+۳۰/۸۲)	۴۰۱/۵۷۳(+۲۸/۱۹)
گروه P	۲۲۴/۳۲۱	۳۷۱/۲۴۹	۲۹۶/۷۸۳(+۲۴/۴۲)	۴۳۷/۲۱(+۱۵/۰۹)	۳۶۹/۴۲۸(+۳۹/۲۸)	۵۰۹/۸۰۳(+۲۷/۱۸)
گروه R	۱۵۲۱۹۲/۲۳	۲۱۹۶۸۷/۳۸۱	۱۷۶۰۴۱/۵۸۱(+۱۳/۵۵)	۲۵۲۱۹۶/۰۸۷(+۱۲/۸۹)	۱۹۴۳۶۷/۵۹۴(+۲۱/۷۰)	۳۰۴۶۱۸/۹۲(+۲۷/۸۸)
میانگین	۳۴۴۸۰/۶۱۳	۴۸۸۳۵/۶۴۹	۴۰۸۰۶/۵۲۷(+۱۵/۵۰)	۵۷۲۲۱/۰۰۸(+۱۴/۶۵)	۴۴۸۹۷/۵۷۴(+۲۳/۲۰)	۶۹۰۰۳/۳۱۰(+۲۹/۲۳)

۵ – نتیجه گیری

در این مقاله، یک نوع مساله از نوع مسایل مسیریابی روی کمان بدون ظرفیت مبتنی بر همکاری را معرفی کرده‌ایم. از آنجایی که مقالات دیگر مساله را روی گراف‌هایی متفاوت مانند گراف بدون جهت یا گراف طوفانی یا مشابه به این مساله روی گراف جهت‌دار ولی بدون در نظر گرفتن زمان، سود ائتلاف و حامل‌های درگیر را در نظر می‌گیرند، ما در این مقاله، مساله‌ی مطرح شده را با اضافه کردن زمان به صورت اضافه‌کاری حامل‌ها در مدل، فرمول‌بندی و سود حامل‌ها و ائتلاف را در سناریوهای مختلف اضافه‌کاری به صورت همکاری و بدون همکاری با استفاده از برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح با متغیرهای دودویی و عدد صحیح و الگوریتم شاخه و کران حل کردیم. در این مقاله مشاهده شد که اضافه‌کاری می‌تواند در تابع هدف با سود ادغام شود و همواره شانس سودآوری در بین حامل‌ها و ائتلاف را افزایش دهد. در اینجا مجموعه‌ای از نمونه‌های معیار تعمیم و برای ارزیابی مدل و الگوریتم استفاده شد و نتایج آزمایش‌های محاسباتی ارایه و تجزیه و تحلیل شد.

برای کار در آینده، از آن‌جایی که در دنیای واقعی همکاری و ائتلاف برای حامل‌های بیشتری در نظر گرفته می‌شود و روش دقیق نمی‌تواند مدل ارایه شده با تعداد حامل‌های زیاد را حل کند، لذا روش‌های فراابتکاری می‌توانند مفید باشند. همچنین علاوه بر اضافه کردن زمان کاری حامل‌ها، رضایت‌مندی مشتریان نیز می‌تواند معیار مناسبی برای ماندن حامل‌ها در ائتلاف و بقای ائتلاف موثر باشد. بنابراین روش‌های فراابتکاری و بررسی رضایت‌مندی مشتریان برای کارهای آتی پیشنهاد می‌گردند.

جدول ۶: تاثیر اضافه‌کاری روی سود حامل‌ها با همکاری برای سناریوهای مختلف با دو و سه حامل.

نمونه گروه	سناریو ۱ ($T^O = 0$)		سناریو ۲ ($T^O = 0.25T^U$)		سناریو ۳ ($T^O = 0.5T^U$)	
	$\#P_{S_1}$		$\#P_{S_2}$		$\#P_{S_3}$	
	سود با ۲ حامل (دلار)	سود با ۳ حامل (دلار)	سود با ۲ حامل (درصد افزایش)	سود با ۳ حامل (درصد افزایش)	سود با ۲ حامل (درصد افزایش)	سود با ۳ حامل (درصد افزایش)
گروه A	۳۴۸۳۲/۵	۳۶۲۰۳/۹	۳۸۰۴۰/۱۸۹(+۹/۲۱)	۴۴۰۰۹/۳۴۸(+۲۱/۵۶)	۳۸۶۲۳/۸۹۸(+۱۰/۸۸)	۴۸۲۸۸/۵۷۴(+۳۳/۳۸)
گروه D	۴۷۷۸/۰۸۶	۵۲۲۳/۱۵	۵۹۴۳/۴۲۷(+۲۴/۳۹)	۶۰۹۱/۱۱۷(+۱۶/۶۲)	۶۳۸۸/۰۹۵(+۳۳/۷۰)	۶۶۰۸/۷۲۹(+۲۶/۵۳)
گروه G	۲۸۷/۳۷۵	۴۰۶/۰۳۸	۳۲۳/۶۹۸(+۱۲/۶۴)	۴۵۳/۶(+۱۱/۷۱)	۳۶۹/۱۸۸(+۲۸/۴۷)	۴۷۸/۷۴۶(+۱۷/۹۱)
گروه P	۳۸۳/۷۲۹	۵۲۵/۷۶۱	۴۸۴/۴۸۶(+۲۶/۲۶)	۶۰۴/۵۷۳(+۱۴/۹۹)	۵۵۲/۶۸۶(+۴۴/۰۳)	۶۶۳/۳۸۱(+۲۶/۱۸)
گروه R	۲۱۴۲۰۹/۴۶۷	۳۴۳۸۹۸/۴۱۱	۲۷۵۶۶۰/۱۲۵(+۲۸/۶۹)	۳۷۲۴۷۷/۸۱(+۸/۳۱)	۳۰۲۵۵۹/۴۵۹(+۴۱/۲۴)	۳۸۴۱۵۵/۵۱۲(+۱۱/۷۱)
میانگین	۵۰۸۹۸/۲۳۱	۷۷۲۵۱/۴۵۲	۶۴۰۹۰/۳۸۵(+۲۵/۹۲)	۸۴۷۲۷/۲۹۰(+۹/۶۸)	۶۹۶۹۸/۶۶۵(+۳۶/۹۴)	۸۸۰۳۸/۹۸۸(+۱۳/۹۶)

فهرست منابع

[۱] M. Gansterer and R. F. Hartl, “Collaborative vehicle routing: a survey,” *Eur. J. Oper. Res.*, vol. ۲۶۸, no. ۱, pp. ۱–۱۲, ۲۰۱۸.

[۲] A. Aloui, R. Derrouiche, N. Hamani, and L. Delahoche, “Collaboration horizontale durable des reseaux de transport de marchandises: etat de l’art et perspectives,” in *۱۲ème Conférence Internationale de Modélisation, Optimisation et Simulation (MOSIM’۲۰)*, ۲۰۲۰.

[۳] A. Muñoz-Villamizar, C. L. Quintero-Araújo, J. R. Montoya-Torres, and J. Faulin, “Short-and mid-term evaluation of the use of electric vehicles in urban freight transport collaborative networks: a case study,” *Int. J. Logist. Res. Appl.*, vol. ۲۲, no. ۳, pp. ۲۲۹–۲۵۲, ۲۰۱۹.

[۴] S. Ben Jouida, M. Guajardo, W. Klibi, and S. Krichen, “Profit maximizing coalitions with shared capacities in distribution networks,” *Eur. J. Oper. Res.*, vol. ۲۸۸, no. ۲, pp. ۴۸۰–۴۹۵, ۲۰۲۱.

[۵] S. Ben Jouida, S. Krichen, and W. Klibi, “Coalition-formation problem for sourcing contract design in supply networks,” *Eur. J. Oper. Res.*, vol. ۲۵۷, no. ۲, pp. ۵۳۹–۵۵۸, ۲۰۱۷.

[۶] C. Vanovermeire and K. Sörensen, “Measuring and rewarding flexibility in collaborative distribution, including two-partner coalitions,” *Eur. J. Oper. Res.*, vol. ۲۳۹, no. ۱, pp. ۱۵۷–۱۶۵, ۲۰۱۴.

[۷] E. Angelelli, V. Morandi, and M. G. Speranza, “Optimization models for fair horizontal collaboration in demand-responsive transportation,” *arXiv Prepr. arXiv۲۱۰۵.۰۴۸۱۵*, ۲۰۲۳.

[۸] B. Dai and H. Chen, “Mathematical model and solution approach for carriers’ collaborative transportation planning in less than truckload transportation,” *Int. J. Adv. Oper. Manag.*, vol. ۴, no. ۱–۲, pp. ۶۲–۸۴, ۲۰۱۲.

[۹] F. Cruijssen, O. Bräysy, W. Dullaert, H. Fleuren, and M. Salomon, “Joint route planning under varying market conditions,” *Int. J. Phys. Distrib. Logist. Manag.*, ۲۰۰۷.

[۱۰] Ö. Ergun, G. Kuyzu, and M. Savelsbergh, “Shipper collaboration,” *Comput. Oper. Res.*, vol. ۳۴, no. ۶, pp. ۱۵۵۱–۱۵۶۰, ۲۰۰۷.

[۱۱] A. A. Juan, J. Faulin, E. Pérez-Bernabeu, and N. Jozefowiez, “Horizontal cooperation in vehicle routing problems with backhauling and environmental criteria,” *Procedia-Social Behav. Sci.*, vol. ۱۱۱, pp. ۱۱۳۳–۱۱۴۱, ۲۰۱۴.

[۱۲] M. J. Santos, S. Martins, P. Amorim, and B. Almada-Lobo, “A green lateral collaborative problem under different transportation strategies and profit allocation methods,” *J. Clean. Prod.*, vol. ۲۸۸, p. ۱۲۵۶۷۸, ۲۰۲۱.

[۱۳] E. Fernández, D. Fontana, and M. G. Speranza, “On the Collaboration Uncapacitated Arc Routing Problem,” *Comput. Oper. Res.*, vol. ۶۷, pp. ۱۲۰–۱۳۱, ۲۰۱۶, doi: ۱۰,۱۰۱۶/j.cor.۲۰۱۵,۱۰,۰۰۱.

[۱۴] A. Aloui, N. Hamani, R. Derrouiche, and L. Delahoche, “Systematic literature review on collaborative sustainable transportation: overview, analysis and perspectives,” *Transp. Res. Interdiscip. Perspect.*, vol. ۹, p. ۱۰۰۲۹۱, ۲۰۲۱.

[۱۵] Á. Corberán, R. Eglese, G. Hasle, I. Plana, and J. M. Sanchis, “Arc routing problems: A review of the past, present, and future,” *Networks*, vol. ۷۷, no. ۱, pp. ۸۸–۱۱۵, ۲۰۲۱.

[۱۶] G. B. Dantzig and J. H. Ramser, “The truck dispatching problem,” *Manage. Sci.*, vol. ۶, no. ۱, pp. ۸۰–۹۱, ۱۹۵۹.

[۱۷] M. N. Kritikos and G. Ioannou, “The balanced cargo vehicle routing problem with time windows,” *Int. J. Prod. Econ.*, vol. ۱۲۳, no. ۱, pp. ۴۲–۵۱, ۲۰۱۰.

[۱۸] S. Irnich, P. Toth, and D. Vigo, “Chapter ۱: The family of vehicle routing problems,” in *Vehicle Routing: Problems, Methods, and Applications, Second Edition*, SIAM, ۲۰۱۴, pp. ۱–۳۳.

[۱۹] S. Mancini, M. Gansterer, and R. F. Hartl, “The collaborative consistent vehicle routing problem with workload balance,” *Eur. J. Oper. Res.*, vol. ۲۹۳, no. ۳, pp. ۹۵۵–۹۶۵, ۲۰۲۱.

[۲۰] H. Larrain, L. C. Coelho, C. Archetti, and M. G. Speranza, “Exact solution methods for the multi-period vehicle routing problem with due dates,” *Comput. Oper. Res.*, vol. ۱۱۰, pp. ۱۴۸–۱۵۸, ۲۰۱۹.

[۲۱] C. Malandraki and M. S. Daskin, “The maximum benefit Chinese postman problem and the maximum benefit traveling salesman problem,” *Eur. J. Oper. Res.*, vol. ۶۵, no. ۲, pp. ۲۱۸–۲۳۴, ۱۹۹۳.

[۲۲] C. Archetti, D. Feillet, A. Hertz, and M. G. Speranza, “The undirected capacitated arc routing problem with profits,” *Comput. Oper. Res.*, vol. ۳۷, no. ۱۱, pp. ۱۸۶۰–۱۸۶۹, ۲۰۱۰.

[۲۳] E. Fernández, M. Roca-Riu, and M. G. Speranza, “The shared customer collaboration vehicle routing problem,” *Eur. J. Oper. Res.*, vol. ۲۶۵, no. ۳, pp. ۱۰۷۸–۱۰۹۳, ۲۰۱۸.

[۲۴] B. Padmanabhan, N. Huynh, W. Ferrell, and V. Badyal, “Potential benefits of carrier collaboration in vehicle routing problem with pickup and delivery,” *Transp. Lett.*, pp. ۱–۱۶, ۲۰۲۱.

[۲۵] M. Khorramizadeh and M. S. Shiri, “Integer programming formulation and polyhedral results for windy collaborative arc routing problem,” *Comput. Oper. Res.*, vol. ۱۴۲, p. ۱۰۵۷۲۷, ۲۰۲۲.

[۲۶] P. Vansteenwegen, W. Souffriau, and K. Sörensen, “Solving the mobile mapping van problem: A hybrid metaheuristic for capacitated arc routing with soft time windows,” *Comput. Oper. Res.*, vol. ۳۷, no. ۱۱, pp. ۱۸۷۰–۱۸۷۶, ۲۰۱۰.

[۲۷] T.-S. Chang and H.-M. Yen, “City-courier routing and scheduling problems,” *Eur. J. Oper. Res.*, vol. ۲۲۳, no. ۲, pp. ۴۸۹–۴۹۸, ۲۰۱۲.

[۲۸] S. Lannez, C. Artigues, J. Damay, and M. Gendreau, “A railroad maintenance problem solved with a cut and column generation matheuristic,” *Networks*, vol. ۶۶, no. ۱, pp. ۴۰–۵۶, ۲۰۱۵.

[۲۹] G. Razmara, “Snow removal routing problems: Theory and applications.” Linköpings universitet, ۲۰۰۴.

[۳۰] J. Fink, M. Loebl, and P. Pelikánová, “Arc-routing for winter road maintenance,” *Discret. Optim.*, vol. ۴۱, p. ۱۰۰۶۴۴, ۲۰۲۱.

[۳۱] J. Aráoz, E. Fernández, and O. Meza, “Solving the prize-collecting rural postman problem,” *Eur. J. Oper. Res.*, vol. ۱۹۶, no. ۳, pp. ۸۸۶–۸۹۶, ۲۰۰۹.

[۳۲] A. Corberán and J. M. Sanchis, “A polyhedral approach to the rural postman problem,” *Eur. J. Oper. Res.*, vol. ۷۹, no. ۱, pp. ۹۵–۱۱۴, ۱۹۹۴.

[۳۳] N. Christofides, V. Campos, A. Corberán, and E. Mota, “An algorithm for the rural postman problem on a directed graph,” in *Netflow at pisa*, Springer, ۱۹۸۶, pp. ۱۵۵–۱۶۶.

[۳۴] A. Hertz, G. Laporte, and P. N. Hugo, “Improvement procedures for the undirected rural postman problem,” *INFORMS J. Comput.*, vol. ۱۱, no. ۱, pp. ۵۳–۶۲, ۱۹۹۹.

[۳۵] J. de Armas, P. Keenan, A. A. Juan, and S. McGarraghy, “Solving large-scale time capacitated arc routing problems: from real-time heuristics to metaheuristics,” *Ann. Oper. Res.*, vol. ۲۷۳, no. ۱, pp. ۱۳۵–۱۶۲, ۲۰۱۹.