دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و ششم، مهر و آبان ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸
دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

یک مدل جدید ABS سه‌گامی برای حل دستگاه‌های معادلات خطی تمام رتبه سطری

محمود پری‌پور[۱*]، اسمعیل بابلیان[۲]، لیلا اسدبیگی[۳]

[۱] گروه مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات، دانشگاه صنعتی همدان، همدان، ایران
[۲] دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه خوارزمی، کرج، ایران
[۳] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد همدان، همدان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۲/۱۸ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۸/۲۹

چکیده

روش‌های ABS، روشی تکراری و مستقیم برای حل دستگاه‌های معادلات خطی می‌باشند که در آن i-اُمین تکرار در i معادله اول دستگاه صدق می‌کند. بنابراین یک دستگاه با m معادله در حداکثر m گام ABS حل می‌شود. در سال‌های ۲۰۰۴ و ۲۰۰۷ میلادی، روش‌های دوگامی ABS برای حل دستگاه‌های معادلات خطی تمام رتبه سطری در حداکثر $\left[\frac{(m+1)}{2}\right]$ گام ارائه شد. این روش‌ها در مقایسه با روش هوانگ متناظر فشرده‌تر و به فضای کمتری نیاز دارند. همچنین هنگامی‌که دستگاه مربعی می‌شود نیاز به تعداد عملیات ضرب کمتری دارد. در این مقاله، روش سه‌گامی جدید ارائه می‌دهیم که در حداکثر $\left[\frac{(m+2)}{3}\right]$ گام به جواب می‌رسد و فضای محاسباتی را فشرده و اقتصادی می‌نماید. پیچیدگی محاسباتی در مقایسه با روش هوانگ متناظر و روش‌های دوگامی اولیه قابل‌ملاحظه است. برای این ادعا یک مثال عددی ارایه شده است.همچنین انعطاف‌پذیری خاصی را برای ماتریس آبافی و سایر پارامترهای اصلی ملاحظه می‌نماییم.

واژه‌های کلیدی: روش‌های ABS، روش‌های ABS دوگامی، روش ABS سه‌گامی، دستگاه‌های معادلات خطی تمام رتبه سطری، فشردگی فضای محاسبات.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: paripour@hut.ac.ir

۱- مقدمه

روش‌های ABS، خانواده‌ی وسیعی از الگوریتم‌ها هستند که برای حل دستگاه‌های معادلات خطی و غیرخطی با مقیاس بالا بسیار کاربرد دارند. این روش‌ها برای اولین بار توسط آبافی، برویدن و اسپِدِکاتو برای حل دستگاه‌های معادلات خطی معین و تحتِ معین ارائه شدند. این الگوریتم‌ها برای حل حداقل مربعات خطی، معادلات غیرخطی، مسائل بهینه‌سازی و معادلات دیوفانتین توسعه پیداکرده‌اند [۲و۱]. روش‌های ABS برای حل دستگاه‌های خطی فازی نیز کاربرد دارد. هم‌چنین از روش‌های ABS روش‌های جدیدی به‌دست‌آمده که تحتِ برخی شرایط بهتر از روش‌های کلاسیک اولیه می‌باشند [۳، ۹و۱۰].

در [۴و۵] روش‌هایی برای حل دستگاه‌های معادلات خطی تمام رتبه سطری ارائه‌شده است که در آن-i اُمین تکرار از دستگاه، 2i معادله اول دستگاه را حل می‌نماید. مطالعات جدید در مورد روش‌های دوگامی در [۶، ۷و۸] معرفی‌شده است. در این مقاله، ما فضای جدیدی را ارائه نمودیم تا بتوانیم این روش‌ها را برای حلِ هم‌زمان سه معادله از یک دستگاهِ تمام رتبه سطری ارتقاء دهیم. برای این منظور برخی از پارامترهای اساسی را تغییر دادیم و بهنگام کردن ماتریس آبافی در دو فاز برای هر گام انجام می‌شود. فاز اول منجر به جوابی از تکرار-i اُم و فاز دوم منجر به جواب عمومی تکرار-i اُم می‌شود. ساختار مقاله ما به‌صورت ذیل است:

در بخش ۲ الگوریتم ABS اولیه و الگوریتم دوگامی اولیه ABS معرفی و سپس مراحل ساخت یک الگوریتم سه‌گامی جدید ارائه‌شده است. هم‌چنین قضیه‌های لازم برای این منظور بیان و اثبات شده‌اند. در بخش ۳، الگوریتم جدید برای حل دستگاه‌های تمام رتبه سطری با سه‌گام ارائه‌شده است. این الگوریتم در حداکثر $\left[\frac{(m+2)}{3}\right]$ گام همگرا است. در ضمن، با استفاده از یک عملگر که سطرهای صفرِ ماتریس آبافی را حذف می‌کند، فضای محاسبات را تا حد امکان فشرده و اقتصادی کردیم. در بخش ۴، نتایج عددی و پیچیدگی محاسباتی بررسی شده است. در مقایسه این نتایج با روش ABS دوگامی اولیه و روش متناظر هوانگ، دستاوردهای ما قابل‌ملاحظه است. سرانجام در بخش ۵ نتایج کار خود را جمع‌بندی می‌نماییم.

۲- ساخت یک مُدلِ ABS سه‌گامی

الگوریتم ABS اولیه روی دستگاهی به شکل زیر کار می‌کند.

$$Ax = b, \qquad (۱)$$

که در رابطه فوق داریم:

$$A = [a_1, \cdots, a_m]^T, \quad a_i \in \mathbb{R}^n,$$
$$1 \le i \le m, \quad m \le n, \quad x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m.$$

روش ABS اولیه جواب یا عَدَم جوابی از معادله (۱) را در حداکثر m تکرار مشخص می‌کند. این روش با یک بردار دلخواه اولیه $x_0 \in \mathbb{R}^n$ و یک ماتریس نامفرد دلخواه $H_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (پارامتر اسپدکاتو) کار خود را آغاز می‌نماید. در این روش x_i جوابی از i معادله اول دستگاه است. گام‌های زیر را ملاحظه فرمائید: [۲، ۴و۵]

۱- مشخص کن z_i (پارامتر برویدن) را به‌طوری‌که $z_i^T H_i a_i \neq 0$ و قرار بده $p_i = H_i^T z_i$.

۲- جواب را از رابطه $x_{i+1} = x_i + \alpha_i p_i$ بهنگام کن که در آن α_i طول گام است و از رابطه $\alpha_i = \frac{b_i - a_i^T x_i}{a_i^T p_i}$ به دست می‌آید.

۳- ماتریس آبافی H_i را از رابطه زیر بهنگام کن:

$$H_{i+1} = H_i - \frac{H_i a_i w_i^T H_i^T}{w_i^T H_i a_i}$$

به‌طوری‌که $w_i \in \mathbb{R}^n$ (پارامتر آبافی) طوری انتخاب می‌شود که $w_i^T H_i a_i \neq 0$.

خلاصه الگوریتم دوگامی ارائه‌شده در [۴و۵] را ملاحظه فرمائید:

فرض کنیم $m = 2l = \text{rank}(A)$. (اگر m فرد باشد می‌توان یک معادله بدیهی به دستگاه اضافه کرد). قرار دهید:

$$c_i = \begin{cases} a_1, & i = 1, \\ a_i - a_{i-1}, & i > 1. \end{cases}$$
$$r_i(x) = a_i^T x - b_i, \bar{c}_j = H_i c_j, \bar{a}_j = H_i a_j.$$

(۰) بردار دلخواه $x_0 \in \mathbb{R}^n$ و ماتریس نامنفرد دلخواه $\widehat{H}_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ را انتخاب کرده و قرار بده $i = 1$.

۱- (a) محاسبه کن $\alpha_1 = r_1(x_0)$ و $\beta_1 = r_2(x_0)$

(b) اگر $\beta_1 \neq 0$ و $\alpha_1 = 0$ قرار بده:

$$\alpha_1 = \beta_1,\ \ a_1 = a_1 + a_2, b_1 = b_1 + b_2.$$

اگر $\beta_1 = 0$ و $\alpha_1 \neq 0$ قرار بده:

$$\beta_1 = \alpha_1,\quad a_2 = a_1 + a_2, b_2 = b_1 + b_2.$$

اگر $\alpha_1\beta_1 \neq 0$ قرار بده:

$$\begin{cases}a_1 = \beta_1 a_1,\\ b_1 = \beta_1 b_1,\end{cases}\qquad \begin{cases}a_2 = \alpha_1 a_2,\\ b_2 = \alpha_1 b_2.\end{cases}$$

۲- (a) قرار بده $c_1 = a_1$ و $c_2 = a_2 - a_1$.

(b) محاسبه کن بردار n-بُعدی $\bar{c}_2 = \widehat{H}_0 c_2$ و ماتریس $H_0 = \widehat{G}_0\widehat{H}_0$ که $\widehat{G}_0$ یک بردار $j_0 \times n$ بُعدی است و در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$\widehat{G}_0 x = 0 \iff x = \lambda \bar{c}_2$$

λ یک اسکالر دلخواه است.

(c) $z_0 \in R^{j_0}$ را طوری انتخاب کن که داشته باشیم $z_0^T H_0 a_1 \neq 0$ و سپس روابط زیر را محاسبه کن:

$$\gamma_0 = \frac{\alpha_1\beta_1}{z_0^T H_0 a_1},\qquad x_1 = x_0 - \gamma_0 H_0^T z_0.$$

۳- تا زمانی که $(i < \frac{m}{2})$ گام‌های ۴-۸ را انجام بده.

۴- محاسبه کن $\alpha_{i+1} = r_{2i+1}(x_i)$ و $\beta_{i+1} = r_{2i+2}(x_i)$.

۵- اگر $\beta_{i+1} \neq 0$ و $\alpha_{i+1} = 0$ آنگاه قرار بده:

$$\alpha_{i+1} = \beta_{i+1}, a_{2i+1} = a_{2i+1} + a_{2i+2}, b_{2i+1} = b_{2i+1} + b_{2i+2}.$$

اگر $\beta_{i+1} = 0$ و $\alpha_{i+1} \neq 0$ آنگاه قرار بده:

$$\beta_{i+1} = \alpha_{i+1}, a_{2i+2} = a_{2i+1} + a_{2i+2}, b_{2i+2} = b_{2i+1} + b_{2i+2}.$$

اگر $\alpha_{i+1}\beta_{i+1} \neq 0$ آنگاه قرار بده:

$$\begin{cases}a_{2i+1} = \beta_{i+1}a_{2i+1},\\ b_{2i+1} = \beta_{i+1}b_{2i+1},\end{cases}\quad \begin{cases}a_{2i+2} = \alpha_{i+1}a_{2i+2},\\ b_{2i+2} = \alpha_{i+1}b_{2i+2}.\end{cases}$$

۶- بردار $c_{2i+2} = a_{2i+2} - a_{2i+1}$ را محاسبه کن.

۷- محاسبه کن بردارهای j_{i-1}-بُعدی $\bar{c}_{2i-1} = H_{i-1}a_{2i-1}$ و $\bar{c}_{2i+1} = H_{i-1}c_{2i+2}$ و سپس محاسبه کن:

$$H_i = G_{i-1}H_{i-1},$$

که G_{i-1} یک بردار $j_i \times j_{i-1}$-بُعدی است و در شرط زیر صدق می‌نماید:

$$G_{i-1}x = 0 \iff x = \lambda_1\bar{c}_{2i-1} + \lambda_2\bar{c}_{2i+2} = \lambda_1\bar{a}_{2i-1} + \lambda_2\bar{c}_{2i+2},$$

۸- انتخاب کن $z_i \in \mathbb{R}^{j_i}$ را به‌طوری‌که $z_i^T H_i a_{2i+1} \neq 0$ باشد و محاسبه کن:

$$\gamma_i = \frac{\alpha_{i+1}\beta_{i+1}}{z_i^T H_i a_{2i+1}},\quad x_{i+1} = x_i - \gamma_i H_i^T z_i.$$

قرار بده $i = i + 1$.

پایان حلقه.

۹- توقف. (x_l یک جواب است.)

اکنون می‌خواهیم روشی را ارائه دهیم که در آن سه معادله از یک دستگاه معادلات خطی تمام رتبه سطری را در یک‌زمان حل کند. این روش یک تعمیم ساده از روش دو گامی ارائه‌شده در [۵و۴] نیست، بلکه باید فضای محاسبات را تا حدودی تغییر دهیم و برخی از پارامترهای اساسی را به‌گونه‌ای بسازیم که این تعمیم مقدور باشد. در دستگاه (۱) فرض کنید A تمام رتبه سطری است، یعنی $\mathrm{rank}(A) = m$ و $m \leq n$. در ادامه ملاحظه خواهیم نمود اگر دستگاه (۱) سازگار باشد و جوابی داشته باشد در حداکثر $\left[\frac{(m+2)}{3}\right]$ گام به جواب می‌رسیم. فرض کنید داشته باشیم:

$$A^{3i} = [a_1, \cdots, a_{3i}]^T,$$
$$b^{3i} = [b_1, \cdots, b_{3i}]^T,$$
$$r_j(x) = a_j^T x - b_j,$$

هرگاه در i-اُمین تکرار باشیم، x_i جوابی از $A^{3i}x_i = b^{3i}$ است. $H_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$، $z_i \in R^n$ و $\lambda_i \in \mathbb{R}$ را طوری تعیین می‌نمائیم که $x_i = x_{i-1} - \lambda_i H_i^T z_i$ جوابی از $3i$ معادله اول دستگاه (۱) باشد. بنابراین داریم:

$r_j(x_i) = 0, \quad j = 1,\cdots,3i.$

با فرض $j = 3i-2, 3i-1, 3i$ داریم:

$$\begin{cases} a_{3i-2}^T\left(x_{i-1} - \lambda_i H_i^T z_i\right) - b_{3i-2} = 0, \\ a_{3i-1}^T\left(x_{i-1} - \lambda_i H_i^T z_i\right) - b_{3i-1} = 0, \\ a_{3i}^T\left(x_{i-1} - \lambda_i H_i^T z_i\right) - b_{3i} = 0. \end{cases}$$

یا به‌طور معادل خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \lambda_i (H_i a_{3i-2})^T z_i = r_{3i-2}(x_{i-1}), \\ \lambda_i (H_i a_{3i-1})^T z_i = r_{3i-1}(x_{i-1}), \\ \lambda_i (H_i a_{3i})^T z_i = r_{3i}(x_{i-1}). \end{cases} \tag{۲}$$

با فرض اینکه $r_{3i-2}(x_{i-1}) \neq 0, r_{3i-1}(x_{i-1}) \neq 0$، $r_{3i}(x_{i-1}) \neq 0$ و λ_i غیر صفر و (۲) سازگار است اگر و فقط اگر داشته باشیم:

$$\lambda_i = \frac{\bar{r}_{3i-2}(x_{i-1})}{(H_i a_{3i-2})^T z_i} = \frac{\bar{r}_{3i-1}(x_{i-1})}{(H_i a_{3i-1})^T z_i} = \frac{\bar{r}_{3i}(x_{i-1})}{(H_i a_{3i})^T z_i} \tag{۳}$$

که در رابطه قبل داریم:

$$\bar{r}_{3i-2}(x_{i-1}) = \bar{r}_{3i-1}(x_{i-1}) = \bar{r}_{3i}(x_{i-1}) = r_{3i-2}(x_{i-1}) r_{3i-1}(x_{i-1}) r_{3i}(x_{i-1})$$

برای برقراری رابطه (۳) روش‌های متفاوتی وجود دارد. ما روش ذیل را پیشنهاد می‌نمائیم:

۱- ماتریس بهنگام H_i را طوری انتخاب می‌نمائیم که داشته باشیم:

$$H_i a_{3i} = H_i a_{3i-1} = H_i a_{3i-2} \neq 0$$

۲- بردار $z_i \in R^n$ را طوری انتخاب می‌نمائیم که داشته باشیم $z_i^T H_i a_{3i} \neq 0$ باشد.

برای بهنگام کردن ماتریس آبافی در هر تکرار از روابط (۴) و (۵) استفاده می‌نماییم. رابطه (۴) به جوابی از تکرار i-اُم و (۵) به جوابِ عمومی تکرارِ i-اُم منجر می‌شود. ماتریس‌های H_i و H_{l_i} برای i-اُمین تکرار به‌صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$H_i a_{3i-2} = H_i a_{3i-1} = H_i a_{3i} \neq 0, \quad i = 1,\cdots,l. \tag{۴}$$

$$H_{l_i} a_j = 0, \; j = 1,\cdots,3i. \tag{۵}$$

حال قرار می‌دهیم:

$$c_j = \begin{cases} a_{3i} - a_j, & j \neq 3i, \\ a_{3i}, & j = 3i. \end{cases} \tag{۶}$$

با استفاده از (۶)، معادلات (۴) و (۵) به ترتیب به‌صورت فرمول‌های (۷) و (۸) ارائه می‌شوند:

$$H_i c_j = 0, \; j = 1,\cdots,3i-1, \tag{۷}$$

$$H_{l_i} c_j = 0, \; j = 1,\cdots,3i. \tag{۸}$$

حال با استفاده از روابط (۷) و (۸)، H_{i+1} را از H_{l_i} محاسبه می‌نمائیم. با استقراء پیش می‌رویم و قرار می‌دهیم:

$$H_{i+1} = H_{l_i} + g_{3i+1} d_{3i+1}^T + g_{3i+2} d_{3i+2}^T, \quad g_{3i+1}, d_{3i+1}, g_{3i+2}, d_{3i+2} \in \mathbb{R}^n.$$

کافی است رابطه زیر را داشته باشیم:

$$H_{l_i} c_j + \left(d_{3i+1}^T c_j\right) g_{3i+1} + \left(d_{3i+2}^T c_j\right) g_{3i+2} = 0, \quad j = 1,\cdots,3i+2 \tag{۹}$$

و داشته باشیم $H_{l_i} c_j = 0, j = 1,\cdots,3i$. قرار می‌دهیم $d_{3i+1} = H_{l_i}^T w_{3i+1}$ و $d_{3i+2} = H_{l_i}^T w_{3i+2}$ $(w_{3i+1}, w_{3i+2} \in \mathbb{R}^n)$. با توجه به فرض استقراء رابطه (۹) برای هر $j \leq 3i-1$ برقرار است. با قرار دادن $j = 3i+1$، $j = 3i+2$ در (۹) داریم:

$$\begin{cases} \left(d_{3i+1}^T c_{3i+1}\right) g_{3i+1} + \left(d_{3i+2}^T c_{3i+1}\right) g_{3i+2} = -H_{l_i} c_{3i+1} \\ \left(d_{3i+1}^T c_{3i+2}\right) g_{3i+1} + \left(d_{3i+2}^T c_{3i+2}\right) g_{3i+2} = -H_{l_i} c_{3i+2} \end{cases}$$

حال، پارامترهای زیر را تعریف می‌نمائیم:

$$g_{3i+1} = -H_{l_i} c_{3i+1}, \; g_{3i+2} = -H_{l_i} c_{3i+2}$$

بنابراین می‌توانیم رابطه زیر را داشته باشیم:

$$\begin{cases} d_{3i+1}^T c_{3i+1} = 1, \\ d_{3i+1}^T c_{3i+2} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} d_{3i+2}^T c_{3i+1} = 0, \\ d_{3i+2}^T c_{3i+2} = 1. \end{cases}$$

اکنون $w_{3i+1}, w_{3i+2} \in \mathbb{R}^n$ را طوری تعریف می‌نمائیم که در رابطه ذیل صدق نمایند:

$$\begin{cases} w_{3i+1}^T H_{l_i} c_{3i+1} = 1, \\ w_{3i+1}^T H_{l_i} c_{3i+2} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} w_{3i+2}^T H_{l_i} c_{3i+1} = 0, \\ w_{3i+2}^T H_{l_i} c_{3i+2} = 1. \end{cases} \qquad (۱۰)$$

می‌دانیم دستگاه (۱۰) جواب دارد اگر و فقط اگر بردارهای $H_{l_i} c_{3i+1}$ و $H_{l_i} c_{3i+2}$ مستقل خطی باشند. در ادامه این فصل از قضیه ۲.۳ نتیجه خواهیم گرفت که دستگاه (۱۰) جواب دارد و H_{l_i} خوش‌تعریف است. بنابراین می‌توانیم فرمول بهنگام H_i را به‌صورت زیر ارائه دهیم:

$$H_{i+1} = H_{l_i} - H_{l_i} c_{3i+1} w_{3i+1}^T H_{l_i} - H_{l_i} c_{3i+2} w_{3i+2}^T H_{l_i}. \qquad (۱۱)$$

بردارهای w_{3i+1}, w_{3i+2} می‌توانند هر بردار دلخواهی باشند که در رابطه (۱۰) صدق نمایند. حال برای کامل کردن استقراء، H_1 باید طوری انتخاب شود که در رابطه (۱۱) صدق نماید و نیز داشته باشیم:

$$H_1 c_j = 0, \quad j = 1,2. \qquad (۱۲)$$

فرض کنید H_0 یک ماتریس نامنفرد دلخواه باشد. H_1 را با استفاده از H_0 و یک فرمول بهنگام رتبه دو به دست می‌آوریم؛ قرار دهید:

$$H_1 = H_0 - u_1 v_1^T - u_2 v_2^T,$$

که $u_1, v_1, u_2, v_2, \in \mathbb{R}^n$ طوری انتخاب می‌شوند که در رابطه (۱۲) صدق نمایند، یعنی داشته باشیم:

$$H_0 c_j - (v_1^T c_j) u_1 - (v_2^T c_j) u_2 = 0, j = 1,2.$$

برای برقراری رابطه قبل باید قرار دهیم:

$$\begin{cases} w_1^T H_0 c_1 = 1, \\ w_1^T H_0 c_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} w_2^T H_0 c_1 = 0, \\ w_2^T H_0 c_2 = 1. \end{cases} \qquad (۱۳)$$

دستگاه (۱۳) با انتخاب بردارهای مناسب $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$ برقرار است، هرگاه c_1, c_2 مستقل خطی باشند. بنابراین فرمول بهنگام رتبه دو زیر را داریم:

$$H_1 = H_0 - H_0 c_1 w_1^T H_0 - H_0 c_2 w_2^T H_0. \qquad (۱۴)$$

حال برای محاسبه جواب عمومی در هر تکرار، ماتریس H_{l_i} را با این ویژگی پیشنهاد می‌نمائیم:

$$H_{l_i} c_j = H_{l_i} a_j = 0, \quad j = 1, \cdots, 3i.$$

بنابراین ماتریس H_{l_i} با یک رتبه یک بهنگام از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$H_{l_i} = H_i - H_i a_{3i} w_{3i}^T H_i = H_i - H_i c_{3i} w_{3i}^T H_i, \quad i = 1, \cdots, l. \qquad (۱۵)$$

در رابطه فوق بردار $w_{3i} \in \mathbb{R}^n$ دارای ویژگی ذیل است:

$$w_{3i}^T H_i a_{3i} = w_{3i}^T H_i c_{3i} = 1. \qquad (۱۶)$$

در نتیجه می‌توانیم جواب عمومی i-اُمین تکرار را از رابطه (۱۷) محاسبه نمائیم:

$$x_{l_i} = x_i - H_{l_i}^T s, \qquad (۱۷)$$

که بردار $s \in \mathbb{R}^n$ دلخواه است. همچنین ماتریس H_{l_1} از یک رابطه بهنگام رتبه یک مانند زیر تعریف می‌شود:

$$H_{l_1} = H_1 - H_1 a_3 w_3^T H_1 = H_1 - H_1 c_3 w_3^T H_1,$$

که $w_3 \in \mathbb{R}^n$ یک بردار دلخواه است و در شرط ذیل صدق می‌نماید:

$$w_3^T H_1 a_3 = w_3^T H_1 c_3 = 1.$$

لم ۱. ۲. بردارهای $a_1, \cdots, a_m$ مستقل خطی هستند اگر و فقط اگر بردارهای $c_1, \cdots, c_m$ مستقل خطی باشند.

با این توضیحات می‌توانیم قضیه زیر را ارائه نمائیم.

قضیه ۲. ۲. فرض کنید که $m = 3l$ بردار مستقل خطی $a_1, \cdots, a_m \in \mathbb{R}^n$ و ماتریس نامنفرد دلخواه $H_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ را داشته باشیم؛ و نیز فرض کنید ماتریس H_1 از رابطه (۱۴) به‌دست‌آمده باشد، که در آن $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$ در رابطه (۱۳) صدق می‌نمایند. دنباله ماتریس‌های H_i، $i = 2, \cdots, l$ را از رابطه ذیل تعریف می‌نمائیم:

$$H_i = H_{l_{i-1}} - H_{l_{i-1}} c_{3i-2} w_{3i-2}^T H_{l_{i-1}} - H_{l_{i-1}} c_{3i-1} w_{3i-1}^T H_{l_{i-1}}, \tag{۱۸}$$

و $w_{3i-2}, w_{3i-1} \in \mathbb{R}^n$ در رابطه زیر صدق می‌نمایند:

$$\begin{cases} w_{3i-2}^T H_{l_{i-1}} c_{3i-2} = 1, \\ w_{3i-2}^T H_{l_{i-1}} c_{3i-1} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} w_{3i-1}^T H_{l_{i-1}} c_{3i-2} = 0, \\ w_{3i-1}^T H_{l_{i-1}} c_{3i-1} = 1. \end{cases} \tag{۱۹}$$

همچنین فرض کنید دنباله ماتریس‌های $H_{l_1}, \cdots, H_{l_l}$ توسط رابطه (۱۵) را که در آن $w_{3i} \in \mathbb{R}^n$ در رابطه (۱۶) صدق می‌نمایند در نظر بگیرید. هرگاه در i-اُمین تکرار باشیم، روابط ذیل برای هر $i = 1, \cdots, l$ برقرارند.

(1) $H_i a_{3i-2} = H_i a_{3i-1} = H_i a_{3i} \neq 0$

(2) $H_{l_i} a_j = 0, \qquad j = 1, \cdots, 3i,$

(3) $H_i c_j = 0, \qquad j = 1, \cdots, 3i-1,$

(4) $H_{l_i} c_j = 0, \qquad j = 1, \cdots, 3i.$

قضیه ۳. ۲. فرض کنید $a_1, \cdots, a_m \in \mathbb{R}^n$ بردارهایی مستقل خطی باشند و $H_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ یک ماتریس نامنفرد دلخواه باشد؛ H_1 از رابطه (۱۴) به‌دست‌آمده باشد و $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$ در رابطه (۱۳) صدق کنند و برای $i = 2, \cdots, l$ دنباله ماتریس‌های H_i از رابطه (۱۸) به‌دست‌آمده باشند که در آن $w_{3i-2}, w_{3i-1} \in \mathbb{R}^n$ در رابطه (۱۹) صدق کنند. آنگاه برای هر i، $1 \leq i \leq l$ و هر j، $3i \leq j \leq m$، بردارهای $H_i a_j$ غیر صفر و مستقل خطی‌اند.

اثبات. با استقراء پیش می‌رویم. برای $i = 1$ قضیه درست است، زیرا اگر قرار دهیم $\sum_{j=3}^m \alpha_j H_1 a_j = 0$ خواهیم داشت:

$$\sum_{j=3}^m \alpha_j (H_0 - H_0 c_1 w_1^T H_0 - H_0 c_2 w_2^T H_0) a_j = 0,$$
$$\sum_{j=3}^m \alpha_j H_0 a_j - \left(\sum_{j=3}^m \alpha_j w_1^T H_0 a_j\right) H_0 c_1 - \left(\sum_{j=3}^m \alpha_j w_2^T H_0 a_j\right) H_0 c_2 = 0,$$

با فرض اینکه داشته باشیم:

$$\beta_1 = \sum_{j=3}^m \alpha_j w_1^T H_0 a_j,$$
$$\beta_2 = \sum_{j=3}^m \alpha_j w_2^T H_0 a_j,$$

می‌توانیم رابطه ذیل را داشته باشیم:

$$\beta_1 H_0 a_1 + \beta_2 H_0 a_2 - (\beta_1 + \beta_2 - \alpha_3) H_0 a_3 + \sum_{j=4}^m \alpha_j H_0 a_j = 0.$$

حال با توجه به استقلال خطی بردارهای $a_1, \cdots, a_m$ و نامنفرد بودن ماتریس H_0 می‌توان نتیجه گرفت برای $1 \leq j \leq m$، بردارهای $H_0 a_j$ غیر صفر و مستقل خطی‌اند و در نتیجه داریم:

$$\beta_1 = \beta_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \cdots = \alpha_m = 0.$$

بنابراین بردارهای $H_1 a_j$ برای $3 \leq j \leq m$ غیر صفر و مستقل خطی‌اند. حال فرض می‌کنیم قضیه برای $1 \leq i \leq l-1$ درست باشد؛ ثابت می‌کنیم قضیه برای $i+1$ نیز برقرار است. از رابطه (۱۱) برای $3i+3 \leq j \leq m$ داریم:

$$H_{i+1} a_j = H_{l_i} a_j - \left(w_{3i+1}^T H_{l_i} a_j\right) H_{l_i} c_{3i+1} - \left(w_{3i+2}^T H_{l_i} a_j\right) H_{l_i} c_{3i+2}. \tag{۲۰}$$

کافی است نشان دهیم رابطه

$$\sum_{j=3i+3}^m \alpha_j H_{i+1} a_j = 0, \tag{۲۱}$$

نشان می‌دهد برای هر j، $3i+3 \leq j \leq m$، $\alpha_j = 0$ است. با استفاده از رابطه (۲۰) می‌توانیم رابطه (۲۱) را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$\sum_{j=3i+3}^m \alpha_j H_{l_i} a_j - \beta_1' H_{l_i} c_{3i+1} - \beta_2' H_{l_i} c_{3i+2} = 0,$$

β_1' و β_2' در روابط فوق به‌صورت ذیل تعریف می‌شوند:

$$\beta'_1 = \sum_{j=3i+3}^m \alpha_j w_{3i+1}^T H_{l_i} a_j,$$
$$\beta'_2 = \sum_{j=3+3}^m \alpha_j w_{3i+2}^T H_{l_i} a_j.$$

در نتیجه می‌توانیم داشته باشیم:

$$\sum_{j=3i+3}^m \alpha_j H_{l_i} a_j - \beta_1' H_{l_i} (a_{3i+3} - a_{3i+1}) - \beta_2' H_{l_i} (a_{3i+3} - a_{3i+2}) = 0,$$

یا به‌طور معادل خواهیم داشت:

$$\sum_{j=3i+4}^{m} \alpha_j H_{l_i} a_j + \beta_1' H_{l_i} a_{3i+1} + \beta_2' H_{l_i} a_{3i+2} - (\beta_1' + \beta_2' - \alpha_{3i+3}) H_{l_i} a_{3i+3} = 0. \quad (۲۲)$$

با استفاده از فرض استقراء، بردارهای $H_i a_j$ برای $3i \leq j \leq m$، غیر صفر و مستقل خطی‌اند. حال با استفاده از فرض استقراء نشان می‌دهیم بردارهای $H_{l_i} a_j$ برای $3i + 1 \leq j \leq m$ غیر صفر و مستقل خطی‌اند. با استفاده از رابطه (۱۵) داریم:

$$H_{l_i} a_j = H_i a_j - H_i a_{3i} w_{3i}^T H_i a_j. \quad (۲۳)$$

حال باید نشان دهیم رابطه ذیل

$$\sum_{j=3i+1}^{m} \alpha'_j H_{l_i} a_j = 0, \quad (۲۴)$$

بیان می‌کند که برای $j \geq 3i + 1$، $\alpha'_j = 0$ است. با استفاده از رابطه (۲۳)، رابطه (۲۴) به‌صورت ذیل ارائه می‌دهیم:

$$\sum_{j=3i+1}^{m} \alpha'_j H_i a_j - \left(\sum_{j=3i+1}^{m} \alpha'_j w_{3i}^T H_i a_j\right) H_i a_{3i} = 0,$$

از استقلال خطی بردارهای $H_i a_j$، $3i \leq j \leq m$، نتیجه می‌شود برای $j \geq 3i + 1$، $\alpha'_j = 0$ است. پس در رابطه (۲۲) داریم:

$$\beta_1' = \beta_2' = \alpha_{3i+3} = \alpha_{3i+4} = \cdots = \alpha_m = 0$$

در نتیجه بردارهای $H_{i+1} a_j$، $3i + 3 \leq j \leq m$ غیر صفر و مستقل خطی می‌باشند.■

نتیجه ۴. ۲. با در نظر گرفتن مفروضات دو قضیه قبل، گزاره‌های زیر برقرارند:

(الف) هنگامی‌که در تکرار i-اُم هستیم داریم:

$$H_i a_{3i-2} = H_i a_{3i-1} = H_i a_{3i} \neq 0\ ،$$

بنابراین بردارهای $w_{3i} \in \mathbb{R}^n$ و $z_i \in \mathbb{R}^n$ وجود دارند به‌طوری‌که $z_i^T H_i a_{3i} \neq 0$ و $w_{3i}^T H_i a_{3i} \neq 0$.

(ب) دستگاه‌های (۱۳) و (۱۹) جواب دارند.

(ج) برای هر $i = 1, \cdots, l$، H_i، H_{l_i}، x_i و x_{l_i} خوش تعریفند.

نتیجه ۵. ۲. برای ماتریس‌های H_i تولیدشده توسط روابط (۱۴) و (۱۸) و ماتریس‌های H_{l_i} به‌دست‌آمده از رابطه (۱۵) داریم:

$$\begin{aligned}
&\dim R(H_i) = n - 3i + 1, && 1 \leq i \leq l,\\
&\dim N(H_i) = 3i - 1, && 1 \leq i \leq l,\\
&\dim R(H_{l_i}) = n - 3i, && 1 \leq i \leq l,\\
&\dim N(H_{l_i}) = 3i, && 1 \leq i \leq l,\\
&\dim R(H_{l_l}) = n - m, &&\\
&\dim N(H_{l_l}) = m. &&
\end{aligned}$$

تذکر ۶. ۲. برای ماتریس‌های تولیدشده توسط روابط (۱۴) و (۱۸) داریم:

$$x_i = x_{i-1} - \lambda_i H_i^T z_i, \quad i = 1, \cdots, l.$$

یادآوری می‌نمائیم که x_i جوابی از $3i$ معادله اول دستگاه و λ_i طول گام است که در الگوریتم ۱، حالت‌های مختلفِ آن بررسی‌شده است.

حال فرض کنیم بردارهای $a_1, \cdots, a_m$ مستقل خطی باشند. طبق نتیجه ۲.۵، داریم $\dim N(H_i) = 3i - 1$ و $\dim N(H_{l_i}) = 3i$ است. بنابراین $3i - 1$ سطر از ماتریس‌های H_i وابستگی خطی به دیگر سطرهای H_i دارند و همینطور $3i$ سطر از ماتریس‌های H_{l_i} وابسته خطی به دیگر سطرهای این ماتریس می‌باشند. ازآنجایی‌که ماتریس‌های H_i و H_{l_i} را طوری تعریف کرده بودیم که این مقدار از سطرهای وابسته خطی همگی صفر بودند، می‌توانیم با استفاده از یک عملگر مناسب این سطرها را حذف نمائیم تا با این روش تا حد امکان فضا را فشرده و اقتصادی نمائیم.

۳- یک الگوریتم جدید سه‌گامی ABS

با توجه به توضیحاتی که در بخش‌های قبل داده شد اکنون آماده‌ایم تا یک الگوریتم جدید سه‌گامی برای حل دستگاه‌های معادلات خطی تمام رتبه سطری سازگار ارائه دهیم.

الگوریتم ۱

۰- فرض کنید $A_{m\times n}$ یک ماتریس تمام رتبه سطری باشد که $m = 3l$ و $Ax = b$ سازگار باشد.
$(A = [a_1, a_2, \cdots, a_m]^T, x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m)$

۱- بردار دلخواه $x_0 \in \mathbb{R}^n$ و ماتریس نامنفرد دلخواه $H_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ را در نظر بگیرید و قرار دهید $i = 1$.

۲- (a) محاسبه کن:

$$\begin{cases} r_1(x_0) = a_1^T x_0 - b_1, \\ r_2(x_0) = a_2^T x_0 - b_2, \\ r_3(x_0) = a_3^T x_0 - b_3. \end{cases}$$

(b) اگر، $r_1(x_0)r_2(x_0)r_3(x_0) \neq 0$ آنگاه قرار دهید:

$$\begin{cases} a_1 = r_2(x_0)r_3(x_0)a_1, \\ b_1 = r_2(x_0)r_3(x_0)b_1, \end{cases} \begin{cases} a_2 = r_1(x_0)r_3(x_0)a_2, \\ b_2 = r_1(x_0)r_3(x_0)b_2, \end{cases} \begin{cases} a_3 = r_1(x_0)r_2(x_0)a_3, \\ b_3 = r_1(x_0)r_2(x_0)b_3. \end{cases}$$

(c) اگر $r_1(x_0)r_2(x_0)r_3(x_0) = 0$ درحالی‌که تمام بردارهای باقیمانده در این تکرار صفر نیستند، بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض می‌کنیم $r_3(x_0)$ مخالف صفر باشد.

اگر $r_3(x) \neq 0$ و $r_1(x_0) = r_2(x_0) = 0$ قرار دهید:

$$\begin{cases} a_1 = a_1 + a_3, \\ b_1 = b_1 + b_3, \end{cases} \begin{cases} a_2 = a_2 + a_3, \\ b_2 = b_2 + b_3, \end{cases} \begin{cases} a_3 = a_3, \\ b_3 = b_3. \end{cases}$$

اگر $r_3(x_0) \neq 0$ و $r_2(x_0) \neq 0$ و $r_1(x_0) = 0$ قرار دهید:

$$\begin{cases} a_2 = r_3(x_0)a_2, \\ b_2 = r_3(x_0)b_2, \end{cases} \begin{cases} a_3 = r_2(x_0)a_3, \\ b_3 = r_2(x_0)b_3, \end{cases} \begin{cases} a_1 = a_1 + a_3, \\ b_1 = b_1 + b_3. \end{cases}$$

اگر $r_3(x_0) \neq 0$ و $r_2(x_0) = 0$ و $r_1(x_0) \neq 0$ قرار دهید:

$$\begin{cases} a_1 = r_3(x_0)a_1, \\ b_1 = r_3(x_0)b_1, \end{cases} \begin{cases} a_3 = r_1(x_0)a_3, \\ b_3 = r_1(x_0)b_3, \end{cases} \begin{cases} a_2 = a_2 + a_3, \\ b_2 = b_2 + b_3. \end{cases}$$

حال بردارهای جدید a_1, a_2, a_3 و باقیمانده‌های جدید b_1, b_2, b_3 را مرتب کن.

(d) اگر $r_1(x_0) = r_2(x_0) = r_3(x_0) = 0$، x_1 همان x_0 خواهد بود و به گام (۵) برو.

(۳) (a) بردارهای ذیل را محاسبه کن:

$$c_1 = a_3 - a_1, \qquad c_2 = a_3 - a_2.$$

(b) بردارهای $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$ را طوری اختیار کن که در دستگاه ذیل صدق کنند:

$$\begin{cases} w_1^T H_0 c_1 = 1, \\ w_1^T H_0 c_2 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} w_2^T H_0 c_1 = 0, \\ w_2^T H_0 c_2 = 1. \end{cases}$$

سپس ماتریس H_1 را از رابطه ذیل محاسبه کن:

$$H_1 = D(H_0 - H_0 c_1 w_1^T H_0 - H_0 c_2 w_2^T H_0).$$

(D در رابطه فوق عملگر حذف سطرهای صفر است.)

(c) بردار $w_3 \in \mathbb{R}^{n-2}$ را طوری انتخاب کن که داشته باشیم $w_3^T H_1 a_3 = 1$ شود و سپس رابطه زیر را محاسبه کن:

$$H_{l_1} = D(H_1 - H_1 a_3 w_3^T H_1).$$

(d) $z_1 \in \mathbb{R}^{n-2}$ را طوری انتخاب کن که داشته باشیم $z_1^T H_1 a_3 \neq 0$ و سپس مقادیر زیر را محاسبه کن:
اگر دو یا سه بردار باقیمانده‌ی مخالف صفر داشته باشیم قرار بده:

$$\lambda_1 = \frac{\text{حاصلضرب بردارهای باقیمانده مخالف صفر}}{z_1^T H_1 a_3},$$

اگر فقط یک بردار باقیمانده مخالف صفر داشته باشیم قرار بده:

$$\lambda_1 = \frac{\text{بردار باقیمانده مخالف صفر}}{z_1^T H_1 a_3},$$

(۴) (a) محاسبه کن:

$$x_1 = x_0 - \lambda_1 H_1^T z_1.$$

(۵) قرار بده $i = 2$ و به (۶) برو.

(۶) تا زمانی که $i \leq \frac{m}{3}$ است گام‌های ۶(a) تا ۸(b) را انجام بده.

(a) بردارهای زیر را محاسبه کن:

$$r_{3i-2}(x_{i-1}) = a_{3i-2}^T x_{i-1} - b_{3i-2},$$
$$r_{3i-1}(x_{i-1}) = a_{3i-1}^T x_{i-1} - b_{3i-1},$$
$$r_{3i}(x_{i-1}) = a_{3i}^T x_{i-1} - b_{3i}.$$

(b) اگر $r_{3i-2}(x_{i-1}) r_{3i-1}(x_{i-1}) r_{3i}(x_{i-1}) \neq 0$، مقادیر زیر را محاسبه کن:

$$\begin{cases} a_{3i-2} = r_{3i-1}(x_{i-1}) r_{3i}(x_{i-1}) a_{3i-2}, \\ b_{3i-2} = r_{3i-1}(x_{i-1}) r_{3i}(x_{i-1}) b_{3i-2}, \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_{3i-1} = r_{3i-2}(x_{i-1}) r_{3i}(x_{i-1}) a_{3i-1}, \\ b_{3i-1} = r_{3i-2}(x_{i-1}) r_{3i}(x_{i-1}) b_{3i-1}, \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_{3i} = r_{3i-2}(x_{i-1}) r_{3i-1}(x_{i-1}) a_{3i}, \\ b_{3i} = r_{3i-2}(x_{i-1}) r_{3i-1}(x_{i-1}) b_{3i}. \end{cases}$$

(c) اگر $r_{3i-1}(x_{i-1}) r_{3i-2}(x_{i-1}) r_{3i}(x_{i-1}) = 0$ درحالی‌که تمامی بردارهای باقی‌مانده در این تکرار صفر نیستند، بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض می‌کنیم $r_{3i}(x_{i-1})$ مخالف صفر باشد.

اگر $r_{3i}(x_{i-1}) \neq 0$ و $r_{3i-2}(x_{i-1}) = r_{3i-1}(x_{i-1}) = 0$ قرار دهید:

$$\begin{cases} a_{3i-2} = a_{3i-2} + a_{3i}, \\ b_{3i-2} = b_{3i-2} + b_{3i}, \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_{3i-1} = a_{3i-1} + a_{3i}, \\ b_{3i-1} = b_{3i-1} + b_{3i}, \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_{3i} = a_{3i}, \\ b_{3i} = b_{3i}. \end{cases}$$

اگر $r_{3i}(x_{i-1}) \neq 0$ و $r_{3i-1}(x_{i-1}) \neq 0$ و $r_{3i-2}(x_{i-1}) = 0$ قرار دهید:

$$\begin{cases} a_{3i-1} = r_{3i}(x_{i-1}) a_{3i-1}, \\ b_{3i-1} = r_{3i}(x_{i-1}) b_{3i-1}, \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_{3i} = r_{3i-1}(x_{i-1}) a_{3i}, \\ b_{3i} = r_{3i-1}(x_{i-1}) b_{3i}, \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_{3i-2} = a_{3i-2} + a_{3i}, \\ b_{3i-2} = b_{3i-2} + b_{3i}. \end{cases}$$

اگر $r_{3i}(x_{i-1}) \neq 0$ و $r_{3i-1}(x_{i-1}) = 0$ و $r_{3i-2}(x_{i-1}) \neq 0$ قرار دهید:

$$\begin{cases} a_{3i-2} = r_{3i}(x_{i-1}) a_{3i-2}, \\ b_{3i-2} = r_{3i}(x_{i-1}) b_{3i-2}, \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_{3i} = r_{3i-2}(x_{i-1}) a_{3i}, \\ b_{3i} = r_{3i-2}(x_{i-1}) b_{3i}, \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_{3i-1} = a_{3i-1} + a_{3i}, \\ b_{3i-1} = b_{3i-1} + b_{3i}. \end{cases}$$

حال بردارهای جدید a_{3i}، a_{3i-1} و a_{3i-2} و باقیمانده‌های جدید b_{3i}، b_{3i-1} و b_{3i-2} را مرتب کن.

(d) اگر $r_{3i-2}(x_{i-1}) = r_{3i-1}(x_{i-1}) = r_{3i}(x_{i-1}) = 0$، x_i همان x_{i-1} خواهد بود و به ۸(b) برو.

(۷) (a) بردارهای زیر را محاسبه کن:

$$c_{3i-2} = a_{3i} - a_{3i-2},$$
$$c_{3i-1} = a_{3i} - a_{3i-1}.$$

(b) بردارهای $w_{3i-1}, w_{3i-2} \in \mathbb{R}^{n-(3i-3)}$ را طوری انتخاب کن که در دستگاه ذیل صدق نمایند:

$$\begin{cases} w_{3i-2}^T H_{l_{i-1}} c_{3i-2} = 1, \\ w_{3i-2}^T H_{l_{i-1}} c_{3i-1} = 0, \end{cases}$$
$$\begin{cases} w_{3i-1}^T H_{l_{i-1}} c_{3i-2} = 0, \\ w_{3i-1}^T H_{l_{i-1}} c_{3i-1} = 1. \end{cases}$$

سپس محاسبه کن:

$$H_i = D\left(H_{l_{i-1}} - H_{l_{i-1}} c_{3i-2} w_{3i-2}^T H_{l_{i-1}} - H_{l_{i-1}} c_{3i-1} w_{3i-1}^T H_{l_{i-1}}\right).$$

(c) بردار $w_{3i} \in \mathbb{R}^{n-(3i-1)}$ را طوری انتخاب کن که داشته باشیم $w_{3i}^T H_i a_{3i} = 1$ شود و سپس رابطه زیر را محاسبه کن:

$$H_{l_i} = D\left(H_i - H_i a_{3i} w_{3i}^T H_i\right).$$

(d) بردار $z_i \in \mathbb{R}^{n-(3i-1)}$ را طوری انتخاب کن که داشته باشیم $z_i^T H_i a_{3i} \neq 0$ و سپس مقادیر زیر را محاسبه کن:

اگر دو یا سه بردار باقیمانده مخالف صفر داشته باشیم، قرار بده:

$$\lambda_i = \frac{\text{حاصلضرب بردارهای باقیمانده مخالف صفر}}{z_i^T H_i a_{3i}}$$

اگر یک بردار باقیمانده مخالف صفر داشته باشیم، قرار بده:

$$\lambda_i = \frac{\text{بردار باقیمانده مخالف صفر}}{z_i^T H_i a_{3i}}$$

(۸) (a) محاسبه کن:

$$x_i = x_{i-1} - \lambda_i H_i^T z_i.$$

(b) قرار بده $i = i + 1$.

پایان حلقه.

(۹) توقف. (x_l جوابی از دستگاه است.)

از رابطه (۱۷) می‌توانیم جواب عمومی دستگاه را بعد از آخرین تکرار با استفاده از فرمول زیر به دست آوریم:

$$x_{l_l} = x_l - H_{l_l}^T s, \qquad s \in \mathbb{R}^{n-3i} \text{ برای هر}$$

تذکر ۱. ۳. برای کاهش حجم محاسبات استفاده از نکات ذیل پیشنهاد می‌شود:

۱- برای محاسبه‌ی $w_{3i-2}, w_{3i-1} \in \mathbb{R}^{n-(3i-3)}$ می‌توانیم $n-2$ درایه متناظر هرکدام از این بردارها را برابر صفر قرار داده و برای محاسبه بقیه مؤلفه‌ها در هر تکرار می‌توان از دو رتبه بهنگام مرتبه دو استفاده کرد. بهنگام رتبه دو این روش حالت خاصی از رتبه ۳ بهنگام همین روش است ولی حجم محاسبات آن‌ها متفاوت است [۷ و ۸].

۲- برای محاسبه $w_{3i}, z_i \in \mathbb{R}^{n-(3i-1)}$ می‌توانیم پارامترهای زیر را تعریف نمائیم، قرار دهید $d_j = H_i a_{3i}$ و سپس:

$$w_{3i} = z_i = \begin{cases} \frac{1}{d_{j_M}}, & i = j_M, \\ 0, & i \neq j_M, \end{cases}$$

که در آن

$$|d_{j_M}| = \max\left\{|d_j| : j \in \{1, \cdots, n-(3i-1)\}\right\}.$$

۴- حجم محاسبات و مثال‌های عددی

اکنون تعداد ضرب‌های لازم برای الگوریتم ۱ را ارائه می‌دهیم، جدول ۱ را ملاحظه فرمائید.

پس تعداد کل ضرب‌های لازم برای l تکرار به‌صورت زیر است:

$$N = \sum_{i=1}^{l} \begin{bmatrix} 3n + 2 + 3n + 3 \\ +2(3n+2)(n-3i+3) \\ +(2n+1)(n-3i+1) + 2n \end{bmatrix}$$

$$N = \frac{8}{3} mn^2 - \frac{4}{3} m^2 n + O(mn) - O(m^2) + O(m)$$

جدول (۱): تعداد ضرب‌های لازم برای حل m معادله خطی در m/3 تکرار برای پارامترهای اساسی

طبقه	منابع
$3n$	بردارهای باقی‌مانده
2	حاصلضرب بردارهای باقی مانده
$3n$	$a_{3i-2}, a_{3i-1}, a_{3i}$
3	$b_{3i-2}, b_{3i-1}, b_{3i}$
$2(3n+2)(n-3i+3)$	H_i
$(2n+1)(n-3i+1)$	H_{l_i}
$2n$	x_i
$3n$	بردارهای باقی مانده

توجه می‌کنیم که برای روش دوگامی متناظر ارائه‌شده توسط دکتر امینی و همکارانشان تعداد ضرب‌های لازم برابر است با:

$$3mn^2 - \frac{7}{4}m^2n + \frac{1}{6}m^3 + O(mn) + O(m^2) + O(n^2)$$

است. همچنین روش هوانگ متناظر دارای $\frac{3}{2}mn^2 + O(mn)$ ضرب است که وقتی دستگاه مربعی می‌شود و m به n نزدیک می‌شود این تعداد ضرب‌ها برای روش هوانگ برابر $\frac{3}{2}n^3$ و برای روش دوگامی ارائه‌شده در [۴و۵] برابر $\frac{17}{12}n^3$ و برای روش ما $\frac{4}{3}n^3$ است. بنابراین نتایج کار ما بسیار قابل‌ملاحظه است.

مثال ۱. ۴. ماتریس $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ یک ماتریس تمام رتبه سطری و بردار $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ را در نظر می‌گیریم؛ برای به دست آوردن بردار جواب با توجه به الگوریتم سه‌گامی ارائه‌شده پیش می‌رویم.

با انتخاب $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ و $H_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

داریم:

$$r_1(x_0) = -3, \quad r_2(x_0) = 0, \quad r_3(x_0) = 1$$

$$\begin{cases} a_1 = r_3(x_0)a_1 \\ b_1 = r_3(x_0)b_1 \end{cases},$$

$$\begin{cases} a_3 = r_1(x_0)a_3 \\ b_3 = r_1(x_0)b_3 \end{cases}, \quad \begin{cases} a_2 = a_2 + a_3 \\ b_2 = b_2 + b_3 \end{cases}$$

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c_1 = a_3 - a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow H_0c_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow w_1^T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c_2 = a_3 - a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow H_0c_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow w_2^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_1 = D(H_0 - H_0c_1w_1^TH_0 - H_0c_2w_2^TH_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_1a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow w_3^T = z_1^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_{l_1} = D(H_1 - H_1a_3w_3^TH_1) = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)$$

$$\lambda_1 = \frac{r_1(x_0)r_3(x_0)}{z_1^TH_1a_3} = -3$$

$$x_1 = x_0 - \lambda_1H_1^Tz_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - (-3)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌نمائید x_1 جوابی از دستگاه است. حال برای جواب عمومی دستگاه داریم:

$$x_{l_l} = x_l - H_{l_l}^Ts, \quad \left(s \in \mathbb{R}^{(n-3i)} \quad \text{برای هر}\right)$$

$$x_{l_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}s \qquad (s \in \mathbb{R})$$

مثال ۲. ۴. حال اگر بخواهیم مثال قبل را با استفاده از روش دو گامی اولیه حل نمائیم، نیاز به دو تکرار برای حل دستگاه است. در تکرار اول از یک رتبه دوبهنگام استفاده نموده و تکرار دوم به یک رتبه یک بهنگام نیاز دارد. در تکرار اول خواهیم داشت:

$$\alpha_1 = r_1(x_0) = -3, \quad \beta_1 = r_2(x_0) = 0,$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{H}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

طبق الگوریتم دوگامی اولیه قرار می‌دهیم:

$$\beta_1 = \alpha_1, \quad a_2 = a_1 + a_2,$$

$$b_2 = b_1 + b_2, \quad c_1 = a_1, \quad c_2 = a_2 - a_1$$

$$\Longrightarrow a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$c_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$H_0 = \hat{G}_0 \hat{H}_0 \text{ و } \bar{c}_2 = \hat{H}_0 c_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

($\hat{G}_0$ از گام (b)۲، الگوریتم دو گامی اولیه به دست آید)

$$\Longrightarrow H_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$H_0 a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

z_0 نیز از گام (c)۲ الگوریتم دو گامی اولیه محاسبه شده است. حال داریم:

$$x_1 = x_0 - \gamma_0 H_0^T z_0, \quad \gamma_0 = \frac{\alpha_1 \beta_1}{z_0^T H_0 a_1},$$

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\Longrightarrow x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{(-3)(-3)}{1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود روش دوگامی اولیه در دو معامله اول دستگاه صدق نمی‌نماید و با ادامه این روند در تکرار دوم نیز با خطا مواجه خواهیم شد. با اصلاح طول گام که در [۶] به طور کامل توضیحات آن آمده داریم:

$$\gamma_0 = \frac{\alpha_1}{z_0^T H_0 a_1}, \quad x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

که x_1 در معادله‌ی اول دستگاه صدق می‌کند. البته لازم به ذکر است که روش دوگامی اولیه [۵و۴]، سرشار از ایده‌های جالبی بود که طول گام آن در دو حالت خاص نیاز به اصلاح داشت. ما با الهام گرفتن از روش دوگامی اولیه، روش‌های جدید دوگامی را در [۷و۸] ارائه کردیم که ضمن قابلیت رقابت با روش‌های مذکور، رقابت قابل توجهی با روش حذفی گاوس را دارد.

نتیجه‌گیری

در این تحقیق، یک روش سه‌گامی جدید ABS برای حل دستگاه‌های معادلات خطی تمام رتبه سطری ارائه دادیم. بهنگام کردن ماتریس آبافی را در هر گام در دو فاز انجام داده و با استفاده از یک عملگر مناسب فضای محاسبات را فشرده و اقتصادی نمودیم. در مقایسه با روش هوانگ متناظر و روش‌های دوگامی اولیه به دستاوردهای خوبی رسیدیم. روش جدیدِ ما انعطاف پذیری خاصی را برای ماتریس آبافی فراهم ساخته است.

فهرست منابع

[1] Abaffy, J., Broyden, C.G., Spedicato, E., "A class of direct methods for linear systems", Numerische Mathematik, 45 (1984) 361-376

[2] Abaffy, J., Spedicato, E., "ABS projection algorithms: mathematical techniques for linear and nonlinear equations", Prentice-Hall, Inc., 1989

[3] Adrash, M., Sharma, S., "ABS methods to solve optimization problems: A review", Research Journal of Mathematical and Statistical Sciences, 1(2) (2013) 19-21.

[4] J. Amini, K., Mahdavi-Amiri, N., Peyghami, M.R., "ABS-type methods for solving full row rank linear systems using a new rank two update", Bulletin of the Australian Mathematical Society, 70(1) (2004), 17-34.

[5] Amini, K., Mahdavi-Amiri, N., Peyghami, M,R. "Extended reduced rank two Abaffian update schemes in the ABS-type methods", Applied Mathematics and Compution, 185(1) (2007) 255-265.

[6] Asadbeigi, L., Paripour, M., "A note on extended reduced rank-two Abaffian update schemes in the ABS-type methods", Applied Mathematics and Computation, 326 (2018) 105-107.

[7] Asadbeigi, L., Paripour, M., Babolian, E., "General solution of full row rank linear systems of equations via a new extended ABS model", U.P.B. Scientfic Bulletin., Series A, 79(4) (2017) 61-68.

[8] Asadbeigi, L., Paripour, M., Babolian, E., Javadi, Sh. "General solution of full row rank linear systems of equations using a new compression ABS model", Mathematical Sciences, 11(4) (2017) 333-343.

[9] Emilio, S., Spedicato, E., Bodon, E., Xi, Z., Mahdavi-Amiri, N., "ABS methods for coninous and integer linear equations and optimization", Central European Journal of Operation Research, 18(1) (2010) 73-95.

[10] Ghanbari, R., Mahdavi-Amiri, N., "New solutions of LR linear systems using ranking functions and ABS algorithms", Applied Mathematical Modelling, 34 (2010) 3363-3375.