مدل تصمیم‌گیری چند شاخصه فازی (FMADM) برای اولویت‌بندی مدارس برای ثبت نام فرزند

دکتر منصور مؤمنی[1]

چکیده

یکی از مسایل و مشکلاتی که بسیاری از والدین و تا حدی دانش‌آموزان در تیرماه هر تابستان با آن روبرو هستند انتخاب مدرسه برای ثبت نام فرزند است. در این مقاله از مدل تصمیم‌گیری چند شاخصه فازی (FMADM) برای اولویت‌بندی و انتخاب گزینه‌ها استفاده شده است. برای تعیین ضرایب اهمیت شاخص‌های مختلف از روش حداقل مربعات وزنی (WLSM) استفاده شده است. سپس با استفاده از مدل یاگر تعدیل شده گزینه‌ها (مدارس مورد نظر) اولویت‌بندی شده‌اند.

واژه‌های کلیدی: اولویت‌بندی، فازی، تصمیم‌گیری چند شاخصه، انتخاب مدرسه.

۱- مقدمه

بهینه‌سازی یکی از محورهای اصلی تحقیق در عملیات و نظریه تصمیم است. روش‌ها و مدل‌هایی که طی دو دهه قبل مورد استفاده قرار می‌گرفته است، عمدتاً خشک، سخت و قطعی بودند بدین مفهوم که راه حل یا موجه تلقی می‌شد یا ناموجه. این ساختار دو حدی روش‌ها و مدل‌ها در بسیاری از اوقات مدل‌سازی را ناچار می‌کرد که موقعیت‌های واقعی مسأله را با تخمین و تقریب مدلسازی کند. به این دلیل در بعضی از موارد نتایج مدل منطبق با وضعیت واقعی نبود. این امر به خصوص در وضعیت‌هایی که متغیرها و روابط و ارزیابی‌های انسانی وارد مسأله می‌شد نمود بیشتری پیدا می‌کرد. تئوری فازی روشی برای تفوق بر این امر بود. در این مقاله سعی بر آن است که برای مدلسازی از تئوری فازی استفاده شود.

۲- تعریف مسأله

یکی از مسائلی که بسیاری از والدین در تیرماه تابستان، به خصوص در شهرهای بزرگ

۱- استادیار دانشگاه تهران

کشور، هر سال با آن مواجهند ثبت نام فرزندان خود در مدارس است. این امر به خصوص در هنگام شروع مقطع تحصیلی جدید (اول دبستان، اول راهنمایی، اول دبیرستان و پیش دانشگاهی) مشهود است. حساسیت موضوع تا حدی است که انتخاب مدرسه با ویژگی‌های مورد نظر و همچنین ثبت نام در آن به عنوان یک مسأله بزرگ و معضل جدی برای بسیاری از خانواده‌ها است و موجب دل مشغولی و نگرانی بسیاری از خانواده‌هایی است که نسبت به سرنوشت آینده فرزندان خود حساسند و به امر آموزش و تربیت آنان توجه دارند.

به طور مشخص‌تر، مسأله این است که از بین مدارس مقطع مورد نظر که امکان ثبت نام فرزندمان در آن وجود دارد کدام مدرسه را با توجه به شاخص‌های مختلف بهتر است انتخاب کنند؟ و یا به صورت کلی‌تر، اولویت‌بندی مدارس مقطع مورد نظر (که امکان ثبت نام فرزند در آن وجود دارد) از نظر یک خانواده مشخص به چه صورت است؟ معمولاً والدین برای انتخاب مدرسه فرزند خود شاخص‌های مختلفی را مد نظر قرار می‌دهند و مدرسه را با توجه به آن شاخص‌ها انتخاب می‌کنند.

۳- پیشینه تحقیق

تصمیم‌گیری چند معیاره برای اولین بار به صورت علمی در ۱۹۴۴ (جنگ جهانی دوم) برای مسایل با چند هدف متعارض مطرح شد. در سال ۱۹۵۱ کوپمنز (Kopmans) از مفهوم بردار کارا[1] در اینگونه مسایل استفاده کرد. در سال ۱۹۶۳ باب (Bob) شالوده برنامه‌ریزی خطی چند هدفه (MOLP)[2] را پایه‌ریزی کرد (۱).

در سال ۱۹۷۷ کیونگ و سونگ (Kyung & Soung) برای متغیرهای تصمیم گسسته، برخی از تکنیک‌های تصمیم‌گیری چند شاخصه (MADM[3]) را معرفی و مورد استفاده قرار دادند. در سال ۱۹۹۴ هابز و مایر (Hobbs & Meier) روش‌های تصمیم‌گیری چند معیاره را برای برنامه‌ریزی منابع مورد استفاده قرار دارند (۲).

درسال ۱۹۶۵ لطفی عسگرزاده (Lotfi Asgarzadeh) دانشمند ایرانی تبار و استاد دانشگاه برکلی امریکا، مقاله «مجموعه‌های فازی» را منتشر ساخت و پس از فازی طی دهه‌های اخیر توسعه یافته و کاربردهای مختلفی برای آن ارایه شده است (۳).

نظریه فازی نظریه‌ای است برای اقدام در شرایط عدم اطمینان، این نظریه قادر است بسیاری از مفاهیم و متغیرها و سیستم‌هایی را که نادقیق و مبهم هستند، چنانچه در عالم واقع چنین است، صورتبندی ریاضی ببخشد و زمینه را برای استدلال، استنتاج، کنترل و تصمیم‌گیری در شرایط عدم اطمینان فراهم آورد (٤).

افراد مختلفی همچون دوبوس و پراد [Dubois & Prade] ، چنگ و مک اینیس [Cheng & McInnis] ، یاگر [Yager] ، بونیسون [Bonissone] ،

1- Efficient Vector

2- MOLP: Multi Objective Linear Programming

3- MADM: Multi Attribute Decision Making

باکلی [Buckley] ، باآس [Baas] ، بالدوین [Baldwin] ، آدامو [Adamo] ، مابوچی [Mabuchi] طی سال‌های ۱۹۸۰ تا ۲۰۰۰ روش‌های مختلفی را برای استفاده از مجموعه‌های فازی در تصمیم‌گیری چند شاخصه مطرح کردند (٦ و ٥).

۴- مدل تصمیم‌گیری چند شاخصه فازی (FMADM)[1]

در صورتی که چندین شاخص برای انتخاب یا اولویت‌بندی گزینه‌ها وجود داشته باشد و گزینه‌ها متغیری گسسته[2] باشند از مدل‌های MADM استفاده می‌شود. این مدل‌ها از ماتریس تصمیم‌گیری زیر استفاده می‌کنند.

شاخص‌ها / گزینه‌ها	X_1	X_2	X_n
A_1	r_{11}	r_{12}	r_{1n}
A_2	r_{21}	r_{22}	r_{2n}
.	.		.
.	.		.
.	.		.
A_m	r_{m1}	r_{m2}	r_{mn}

ماتریس تصمیم‌گیری چند شاخصه (۷)

که در آن:

A_i: گزینه (انتخاب) iام ($i = ۱$ و ۲ و m)

X_j: گزینه (معیار) jام ($j = ۱$ و ۲ و n) و

r_{ij}: ارزش گزینه iام از نظر شاخص jام است.

در مسأله انتخاب مدرسه، فرض کنید سه مدرسه در مقطع مورد نظر مورد توجه هستند که قرار است یکی از آنها انتخاب شود که آنها را به ترتیب با A_1 و A_2 و A_3 نشان می‌دهیم.

با توجه به نظر خواهی صورت گرفته از والدین دانش‌آموز، شاخص‌هایی که تصمیم‌گیری براساس آنها صورت می‌گیرد عبارتند از:

۱- **سطح آموزش:** منظور از سطح آموزش میزان جدیت و توجه و همچنین توفیق مدیر و معلمان مدرسه در امر آموزش و سطح علمی مدرسه است.

۲- **میزان هزینه:** منظور از میزان هزینه مجموعه پولی است که از طرف اولیای یک دانش آموز چه برای ثبت نام و چه تحت عنوان موضوع‌های دیگر به مدرسه در طول سال تحصیلی پرداخت می‌شود.

۳- **میزان زمان:** منظور زمان طی مسیر از منزل تا مدرسه است.

شاخص اول (آموزش) کیفی و دو شاخص آخر (هزینه و زمان) کمی هستند. شاخص‌های مورد نظر را به ترتیب با X_1 ، X_2 و X_3 نشان می‌دهیم. از بین شاخص‌های مورد نظر شاخص اول مثبت است بدین

1- FMADM: Fuzzy Multi Attribute Decision Making

2- Discrete Variable

مفهوم که افزایش آن مطلوبتر است و دو شاخص آخر منفی‌اند بدین معنی که کاهش آنها مطلوبیت بیشتری را برای تصمیم گیرنده به دنبال خواهد داشت.

در مدل‌های MADM قطعی فرض بر این است که ارزش گزینه‌ای از نظر شاخصی (r_{ij}) به صورت یک عدد حقیقی قابل اندازه‌گیری است (در مسأله مورد نظر میزان هزینه هر مدرسه و همچنین میزان مسافت هر مدرسه تا منزل این چنین است، یعنی این دو شاخص کمی و از قبل قابل اندازه‌گیری است) اما در شرایط واقعی ممکن است برای برخی شاخص‌ها چنین فرضی وجود نداشته باشد و نتوان از اعداد قطعی برای بیان اهمیت شاخص‌ها یا ارزش گزینه‌ها از نظر شاخص‌ها استفاده کرد (در مسأله مورد نظر، وضعیت شاخص‌ها نسبت به هم و همچنین ارزش هر مدرسه از نظر شاخص آموزش بدین صورت است) در این حالت مدل‌های تصمیم‌گیری چند شاخصه فازی (FMADM) برای تصمیم‌گیری ترجیح داده می‌شود (۸).

برای اولویت بندی (انتخاب) مدارس مقطع مورد نظر از مدل یاگر (۹) استفاده می‌کنیم که مطابق با شرایط و اطلاعات مسأله است.

در ماتریس تصمیمی که A بیانگر مجموعه گزینه‌ها، X معرف مجموعه شاخص‌ها و $\tilde{C}_j$ برای ($j=1,2,...n$) نشان‌دهنده مجموعه‌های فازی که بیانگر درجهٔ ارضای معیار j ام توسط گزینه‌های مختلف است، یک تصمیم را می‌توان اشتراک تمام مجموعه‌های فازی $\tilde{C}_j$ در نظر گرفت: $\tilde{C}_j$ در نظر گرفت:

$$\tilde{D} = \tilde{C}_1^{W_1} \cap \tilde{C}_2^{W_2} \cap ... \cap \tilde{C}_m^{W_m}$$

که در آن W_j وزن شاخص jام است. بنابراین گزینه بهینه، گزینه‌ای است که بیشترین درجه عضویت را در $\tilde{D}$ داشته باشد. مدل یاگر دارای مراحلی به شرح زیر است:

گام ۱- با انجام مقایسات زوجی و با استفاده از روش حداقل مربعات وزنی[1] (۱۰)، وزن شاخص‌های مختلف (بردار w) را تعیین کنید.

گام ۲- درجه عضویت هر گزینه را از نظر هر شاخص از نظر تصمیم گیرنده ارزیابی کنید $\left[\mu_{\tilde{C}_j}(A_i)\right]$ و آن را به توان W_j برسانید تا مجموعه فازی $\tilde{C}_j(A_i)^{W_j}$ به دست آید.

گام ۳- اشتراک مجموعه فازی $\tilde{C}_j(A_i)^{W_j}$ را به دست آورید و بر اساس آن مجموعه فازی تصمیم $\tilde{D}$ را تشکیل دهید.

$$\tilde{D} = \{(A_i, \text{Min}[\mu_{\tilde{C}_j}(A_i)^{W_j}])$$

گام ۴- گزینه‌ای را که بالاترین درجه عضویت را در $\tilde{D}$ دارد، به عنوان گزینه بهینه انتخاب کنید (۱۰).

1- Weighted Least Square Method

همچنانکه گفته شد بنا به ماهیت مسأله و وجود دو شاخص کمی (زمان و هزینه)، لازم نیست درجه عضویت هر مدرسه از نظر این دو شاخص ارزیابی شود، (گام ۲ روش یاگر)، زیرا برای این دو شاخص مقادیر دقیق غیر فازی (کیلومتر برای مسافت و دقیقه برای شاخص زمان) وجود دارد. بنابراین مقادیر این دو شاخص نرمالایز شده سپس گام‌های بعدی طی می‌شود.

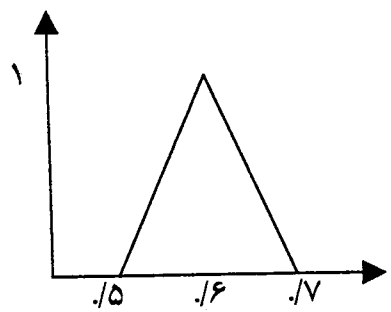
۵- به کارگیری مدل

همچانکه گفته شد مسأله مورد نظر دارای ۳ گزینه و ۳ شاخص بوده و جدول ۱ ارزش هر گزینه از نظر هر شاخص نشان می‌دهد (واحد هزینه هزار تومان و زمان بر حسب دقیقه است).

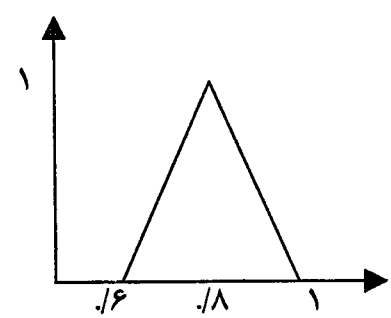
جدول ۱- ماتریس تصمیم اولیه

شاخص / مدرسه	آموزش (X_1)	هزینه (X_2)	زمان (X_3)
A_1	متوسط	۳۰	۵۰
A_2	عالی	۱۵۰	۴۰
A_3	خوب	۸۰۰	۲۵

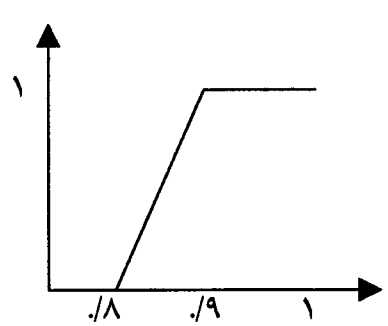
برای متغیر لفظی آموزش در ماتریس تصمیم اولیه، اعداد فازی به صورت زیر در نظر گرفته شده است:



متوسط



خوب



عالی

با استفاده از روش میانگین فازی[1]، اعداد فازی را به اعداد قطعی تبدیل می‌کنیم. مثلاً برای

متوسط ۰/۶ = (۰/۵ + ۰/۶ + ۰/۷) $\frac{۱}{۳}$ = عدد قطعی

همچنین برای خوب و عالی به ترتیب اعداد قطعی ۰/۸ و ۰/۹ به دست می‌آیند.

بنابراین عدد ۰/۶ نشان می‌دهد که میزان ارضای مدرسه A_1 از نظر شاخص آموزش از نظر والدین به میزان ۰/۶ (در مبنای ۱) است. ضمناً هزینه‌ای که در طی سال به این مدرسه بابت ثبت نام و موارد دیگر پرداخت می‌شود ۳۰ هزار تومان و زمان طی مسیر از منزل تا مدرسه (یا بالعکس) به طور متوسط ۵۰ دقیقه است.

برای حذف واحدهای اندازه‌گیری دو شاخص منفی هزینه (X_2) و زمان (X_3) از فرمول زیر استفاده کرد و آنها را بی مقیاس می‌کنیم.

$$r'_{ij} = \frac{\underset{i}{\text{Min}}\, r_{ij}}{r_{ij}}, \quad j = 2,3$$

که r'_{ij} ارزش بی مقیاس شده گزینه i ام از نظر شاخص i ام است (۱۱).

مثلاً برای شاخص هزینه، با استفاده از فرمول فوق داریم

$$r'_{32} = \frac{30}{800} = 0.072 \quad \text{و} \quad r'_{22} = \frac{30}{150} = 0.2 \quad \text{و}$$

$$r'_{12} = \frac{30}{30} = 1$$

همین کار را برای شاخص زمان نیز انجام و نتایج در جدول ۲ آورده شده است.

جدول ۲- ماتریس تصمیم بی مقیاس شده

شاخص / مدرسه	آموزش (X_1)	هزینه (X_2)	زمان (X_3)
A_1	۰/۶	۱	۰/۵۰۰
A_2	۰/۹	۰/۲	۰/۶۲۵
A_3	۰/۸	۰/۰۷۲	۱

برای تعیین وزن شاخص‌های مختلف ماتریس مقایسات زوجی را تشکیل داده و از روش حداقل مربعات وزنی استفاده می‌کنیم. ماتریس مقایسات زوجی شاخص‌های مختلف از نظر والدین در جدول ۳ آورده شده است.

جدول ۳- ماتریس مقایسات زوجی

شاخص / مدرسه	(X_1)	(X_2)	(X_3)
A_1	۱	۳	۳
A_2	۱/۳	۱	۲
A_3	۱/۳	۱/۲	۱

روش حداقل مربعات وزنی (WLSM) توسط چو و دیگران (۱۲) برای محاسبه وزنها

1- Fuzzy Mean Method

پیشنهاد شده است. این روش برای محاسبه وزنها از معادلات همزمان استفاده می کند. روش بدین صورت است:

اگر a_{ij} عنصر سطر i و ستون j در ماتریس مقایسه زوجی باشد، هدف آن است که w_j به گونه‌ای تعیین شود با توجه به اینکه $a_{ij}= w_i/w_j$ است. وزنها را می‌توان با حل مسأله بهینه سازی زیر حل کرد.

$$\text{MinZ} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}w_j - w_i)^2$$

$$\text{st}\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

برای پیدا کردن ضرایب می‌توان تابع لاگرانژ را به صورت زیر تشکیل داد:

$$L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}w_j - w_i)^2 + 2\lambda(\sum_{i=1}^{n} w_i - 1)$$

اگر بخواهیم تابع فوق حداقل شود، لازم است مشتق‌های جزیی مرتبه اول را محاسبه و برابر صفر قرار داد که n معادله زیر به دست می‌آید:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{ik}w_k - w_i)a_{ik} - \sum_{j=1}^{n}(a_{kj}w_j - w_k) + \lambda = 0,$$

$$k = 1,2,...,n$$

با جایگزین کردن مقادیر جدول ۳ در معادلات فوق خواهیم داشت:

$$\frac{20}{9}w_i - \frac{10}{3}w_2 - \frac{10}{3}w_3 + \lambda = 0$$

$$-\frac{10}{3}w_i + 15w_2 - \frac{5}{2}w_3 + \lambda = 0$$

$$-\frac{10}{3}w_i - \frac{5}{2}w_2 + \frac{45}{4}w_3 + \lambda = 0$$

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1$$

با حل دستگاه فوق ضرایب اهمیت شاخص‌ها به صورت زیر به دست می‌آید:

W=(0.61 , 0.17 , 0.22)

چنانچه از بردار اوزان مشخص است، شاخص آموزش از همه مهمتر است، سپس به ترتیب شاخص‌های هزینه و زمان قرار دارند.

تا کنون اولین گام طی شده است. در گام دوم لازم است درجه عضویت گزینه‌ها را از نظر شاخص‌های مختلف ارزیابی نماییم $\lfloor \mu_{\tilde{C}_j}(A_i) \rfloor$ و به توان w_j برسانیم تا مجموعه فازی $\tilde{C}_j(A_i)^{W_i}$ به دست آید:

$\tilde{C}_1^{W_2}$ برای شاخص X_1 $= \{(A_1, ۰/۶^{۰/۶۱}), (A_2, ۰/۹^{۰/۱۷}), (A_3, ۰/۸^{۰/۲۲})\}$

$= \{(A_1, ۰/۷۳۲), (A_2, ۰/۹۸۲), (A_3, ۰/۹۵۲)\}$

همین محاسبات برای شاخص‌های دیگر نیز انجام گرفته و نتایج در جدول ۴ خلاصه شده است.

جدول ۴

شاخص / گزینه	X_1	X_2	X_3	Min
A_1	۰/۷۳۲	۱	۰/۶۵۵	۰/۶۵۵
A_2	۰/۹۸۲	۰/۷۶۱	۰/۹۲۳	۰/۷۶۱
A_3	۰/۹۵۲	۰/۵۷۵	۱	۰/۵۷۵

حال می‌توان مجموعه فازی تقسیم $\tilde{D}$ را تشکیل داد (گام سوم):

حال در مرحله‌ای (گام ۴) هستیم که گزینه‌ها را بر اساس مجموعه فازی تصمیم $\tilde{D}$ رتبه بندی کنیم. چنانچه مشخص است مدرسه دوم (A_2) از بیشترین درجه عضویت برخوردار است، بنابراین رتبه اول را به خود اختصاص می‌دهد و به ترتیب مدرسه اول (A_1) و مدرسه سوم (A_3) رتبه‌های دوم و سوم را به خود اختصاص می‌دهند.

۶- نتیجه گیری

همچنانکه در قسمت‌های قبل اشاره شده در بسیاری از موقعیت‌های تصمیم‌گیری، تصمیم‌گیرندگان برای اولویت بندی گزینه‌ها همزمان چندین شاخص را در نظر می‌گیرند. شاخص‌های مورد نظر می‌توانند کمی و یا کیفی باشند. با استفاده از رویکرد فازی، می‌توان مدل‌های مختلف علم مدیریت را با تغییراتی اندک در تصمیم‌گیری‌ها و برنامه‌ریزی‌ها به‌کار گرفت.

در این نوشتار یک مسأله ملموس که بسیاری از والدین هر سال (یا هر چند یک سال) با آن مواجهند- یعنی انتخاب مدرسه فرزند- مدلسازی شده و در آن شاخص‌های مختلف (سطح آموزش، میزان هزینه و میزان زمان) شناسایی شدند. سپس با استفاده از مقایسات زوجی و روش حداقل مربعات وزنی هر شاخص محاسبه گردید. و نهایتاً با استفاده از یکی از مدل‌های تصمیم‌گیری چند شاخصه فازی، یعنی مدل یاگر تعدیل شده، گزینه‌های موجود (مدارس) از نظر والدین برای ثبت نام فرزند اولویت بندی شده است.

برای تحقیقات آتی زمینه‌های زیر پیشنهاد می‌شود:

- تعداد شاخص‌های مورد نظر جهت بررسی افزایش یابد و برای هر شاخص اصلی نیز در صورت لزوم شاخص‌های فرعی مورد بررسی قرار گیرد.
- در این نوشتار برای تعیین وزن شاخص‌های مختلف از روش حداقل مربعات وزنی استفاده شده است. می‌توان با روش‌های دیگر نیز وزن شاخص‌ها را محاسبه و نتایج را مقایسه کرد.
- در این پژوهش از بین مدل‌های مختلف تصمیم‌گیری چند شاخصه فازی از مدل یاگر (توام با تغییراتی) استفاده شد. می‌توان مدل‌های مختلف دیگری را همچون دوبوس و پراد، بونیسون، بالکی، باآس، مابوچی و ... را به کار گرفت و نتایج مختلف را مقایسه کرد.

مراجع

1. Ching-Lai Hwang and Abu Syed Md. Masud, Multiple Objective Descision Making-Methods and Application, New York, 1979.

2. Ching-Lai Hwang and M.L.Lin, Group Decision Making under Multiple Critieria, Springer-Verlag 13 Berlin Heidelberg, 1987.

3. Bodily S.E, Modern Decision Marking, Prentice Hall, 1990.

4. Thomas L. Saaty, Decision Marking for Leaders, RWS Publications, 1990.

5. Lotfi A. Zadeh, "Fuzzy Sets" , Information and Control 8, pp 338-353, 1965.

۶- سید محمود طاهری، آشنایی با نظریه مجموعه‌های فازی، انتشارات جهاد دانشگاهی مشهد، ۱۳۷۸.

۷- محمد جواد اصغرپور، تصمیم‌گیری چند معیاره، انتشارات دانشگاه تهران، ۱۳۷۷.

۸- عادل آذر و حجت فرجی، علم مدیریت فازی، انتشارات مرکز مطالعات مدیریت و بهره‌وری ایران، ۱۳۸۱.

9. J. Karprzyk and S. Aorlovski, Optimization Models Using Fuzzy Sets and Possibility Theory, Kluwer Academic Publishers, 1987.

10. H. J. Zimmermann, Fuzzy Set Theory and Its Application, Kluwer Academic Publishers, 1996.

11. Ching-Lai Hwang and Kwangsun Yoon, Multiple Attribute Decision Making: Methods and Application, Springer Verlag, 1981.