نوشتهٔ: میربهادرقلی آریا نـژاد

یک الـگـوریـتـم جدید
برای
برنامه ریزی سفارش خرید

مقدمه:

اغلب مؤسسات تولیـدی و شرکـتهای خدمـاتی با مسئله سفارش خرید کالاهای نیمه ساخته و لوازم یدکی مواجه هستند که بـرای هـر بار سفـارش خـرید خـود بـاید هزیـنهٔ ثابـت قـابل ملاحظه‌ای را صـرف نظر از قیمـت کالای سفـارش داده شده، متحمل گـردند. به عبارت بهتر وقتی که سفارش خریدی انجام نگـیرد هزینه‌ای هـم پرداخت نـخواهـد شـد. اگر میزان سفارش کالا بیش از تقاضـای همان مرحله باشد، مابقی به انبار انتقال داده مـی شـود و بابت آن هـزیـنهٔ نگهـداری پـرداخت می‌گردد. حال این سئوال مطرح می شـود که باید درچه مـواقعـی، به چه مقدار کالا سفارش داد که ضـمن تأمین نیاز موجود، کل هزینه ثبت سفارش و نگهداری نیز به حداقل ممکن برسد.

درحـال حاضر سـاده‌تـرین روشی که بـرای حل این مشکل وجود دارد، بکـار بسـتـن مـدل «و یـتـیـن» (Whitin) و «واگـنـر» (Wagner) است کـه به هـمـیـن نـام هم در دنـیا معروفیت دارد و لیکـن چون این روش از مدل برنامه ریزی پویا استفاده مـی‌کند، عـلاوه بر مشکل بودن درک آن تعداد عـملیات محـاسبـاتی آن نـیز خسته کـننده است. لـذا ما در ایـن مقـاله می خواهیـم یـک الگـوریتم جدیـد و فوق‌العـاده کارایی را برای حـالـتی که هزینـه ثبـت سفارش و قیمـت خـرید کالا و هزینه نگـهـداری مستـقل ارزان بـاشد،ارائه‌دهیـم این الـگوریـتم را به زبان Basic طوری نوشته‌ایم کـه مدیران براحتی بتوانند با دادن هزیـنهٔ ثبت سفـارش، هزیـنه نگهداری هـر واحد کالاو تقاضای دوره به کامـپیوتربه‌برنامه سفارش و نگهداری خود در طول دوره دست یابند. درپـایان نیز دامنـه تحقیقات جدید را در این زمینه باز نموده‌ایم.

بیان ریاضی مسئله:

شرکتی را در نظر بگیرید که برای خرید T دورهٔ آتی خود باید برنامه‌ریزی کـند. در دوره t شرکت باید تقـاضای D_t را برآورده سازد ($t = ۱،۲، .... T$). در صورتی که در یـکی از دوره هـا، مقـدار خریـد بیش از تـقاضا بـاشد، شـرکت مـجبور است ایـن مقـدار مازاد را جهـت‌مصرف در دوره‌های بـعدی در انـبار خود نگـهـداری کند و به ازاء هـر واحـد محصول h ریال

هزینه نگهداری در هر دوره پرداخت کند. هر بار که شرکت دست به خرید می زند، مجبور است هزینهٔ ثابت A ریال را تحت عنوان هزینهٔ سربار متحمل گردد. این هزینه ثابت است و به تعداد خرید بستگی ندارد. قیمت خرید هر واحد محصول C ریال است و نیز فرض می‌کنیم که کالای سفارش داده شده در همان دوره تحویل داده می شود.

بنابر این اگر X_t مقدار کالای سفارش داده شده در دوره t و I_t موجودی پایانی دوره t باشد، مدل ریاضی مسئلهٔ فوق به شکل زیر خواهد بود:

$$\text{Min}Z = \sum_{t=1}^{T} A\,\delta(x_t) + hI_t + Cx_t \qquad (\text{مدل } P)$$

به طوری که:

$$I_t + X_t - I_{t-1} = D_t \qquad t=1.2,\dots T$$

$$X_t,\ I_t \geq 0 \qquad t=1.2,\dots T$$

$$\delta(x_t) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } X_t \neq 0 \text{ باشد} \\ 0 & \text{اگر } X_t = 0 \text{ باشد} \end{cases}$$

مدل P یک مسئله برنامه‌ریزی اعداد صحیح ترکیبی[1] است که حل مستقیم آن نه تنها مشکل است بلکه در بسیاری از موارد واقعی و کاربردی — که طول دورهٔ برنامه‌ریزی طولانی می‌گردد — به علت گسترش بعد غیر ممکن می شود. لذا محققین همواره در این فکر بوده‌اند که راه حل دیگری را جایگزین حل مستقیم آن سازند. از جمله دانشمندانی که راه دیگری برگزیده و این مسئله را از طریق برنامه‌ریزی پویا حل کرده‌اند، می توان (Wagner) و (Whitin) را نام برد و لیکن چون ما این مسئله را به ساده‌ترین نوع مدلهای تحقیق در عملیات یعنی برنامه‌ریزی خطی تبدیل کرده‌ایم، بنابر این لازم نمی دانیم که ذهن خوانندگان را به مدلهای دیگری مثل برنامه‌ریزی پویا — که معرفی آن مستلزم آوردن مقدمات بسیاری است مشغول گردانیم.

مدل برنامه‌ریزی خطی مسئله:

«بیتران» Bitran و یاران او (۲) با معرفی متغیرهای جدید مدل P را به صورت یک مدل برنامه‌ریزی دیگری در آوردند. در این مدل جدید آنها فرض کردند که متغیر دوگانه Y_i مبین تولید و یا عدم تولید در پریود i بوده و X_{ij} نمایشگر کسری از تقاضای دوره j باشد که با سفارس دوره i تأمین گردد. بنابر این داریم:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{T} \sum_{j=i}^{T} C_{ij} X_{ij} + \sum_{i=1}^{T} Ay_i \qquad (\text{مدل } \acute{P})$$

$$\text{بطوریکه} \quad \sum_{i=1}^{j} X_{ij} = 1 \qquad j=1.2,\dots,T$$

$$0 \leqslant X_{ij} \leqslant y_i \qquad i=1.2,\dots T,\ J \geqslant i$$

$$Y_i \leqslant 1 \text{ ، } y_i \text{ عدد صحیح}$$

$$C_{ij} = (C+(j-i)h)\,D_j \qquad i=1,2,\dots,T,\ j \geqslant i$$

مسلم است که اگر تقاضای دورهٔ j در دورهٔ i خریداری شود، علاوه بر هزینه ثبت سفارش و قیمت کالا یعنی CD_j باید مبلغ $(j-i)\,hD_j$ ریال بابت هزینه نگهداری پرداخت گردد.

«بیتران» Bitran و یاران او با استفاده از خواص ریاضی مدل P' ثابت می‌کنند که از عدد صحیح بودن Y_i می‌توان صرف نظر کرد و در نتیجه مدل برنامه‌ریزی اعداد صحیح ترکیبی P' به مدل برنامه‌ریزی خطی زیر قابل تبدیل است.

$$\text{Min } Z = \sum_{i=t}^{T} \sum_{J=i}^{T} C_{ij} X_{ij} + \sum_{i=1}^{T} A\ Y_i \qquad (\text{مدل } P'')$$

به طوری ک

$$\sum_{i=1}^{j} X_{ij} = 1 \qquad J = 1.2,\dots,T \qquad (۱)$$

$$-X_{ij} + Y_i \geqslant 0 \qquad i=1.2,\dots,T,\ j \geqslant i \qquad (۲)$$

$$X_{ij} \geqslant 0 \qquad i=1.2,\dots,T,\ j \geqslant i$$

1- Mixed integer programming

2- Dual

با افزایش طول دورهٔ برنامه‌ریزی ابعاد مدل P''' فوق‌العاده در حال گسترش بوده و در نتیجه حل آن به روش برنامه‌ریزی خطی به صرفه نیست. لذا ما سعی کردیم که از مزدوج[2] این مدل برنامه‌ریزی خطی بهره بگیریم. برای این منظور فرض کنید که U_i و r_{ij} بترتیب متغیرهای مزدوج محدودیتهای (۱) و (۲) باشند. در آن صورت داریم:

$$\text{Max } u_0 = \sum_{j=1}^{T} u_j \qquad (۳)$$

به طوری که:

$$u_j - r_{ij} \leqslant C_{ij} \qquad j = 1.2, \dots T,\ j \geqslant i \qquad (٤)$$

$$\sum_{j=i}^{T} r_{ij} \leqslant A \qquad i=1.2, \dots, T \qquad (٥)$$

چونکه در حل بهینه روابط (٥) و (٦) باید به ازاء جمیع مقادیر i و j برقرار باشند. لذا برای هر مقدار i باید جمع آنها تا دوره K $(K = I, I+1, \dots\dots, T)$ نیز برقرار باشد. پس داریم:

$$\sum_{j=i}^{K} u_j - \sum_{j=i}^{K} r_{ij} \leqslant \sum_{j=i}^{K} C_{ij} \qquad i=1.2,\dots T,\ K=i, i+1, \dots, T \qquad (٦)$$

$$\sum_{j=i}^{K} r_{ij} \leqslant A \qquad i=1.2, \dots, T,\ k=i,\ i+1, \dots T \qquad (٧)$$

با جمع دو رابطه (٦) و (٧) و تابع هدف (۳) به مدل برنامه‌ریزی خطی مورد نظر زیر خواهیم رسید.

(مدل LP)

$$\text{Max } U_0 = \sum_{j-i}^{T} U_j \qquad I=1.2, \dots T \qquad (۸)$$

به طوری که

$$\sum_{J=i}^{K} U_j \leqslant A + \sum_{J=i}^{K} (C+(j-i)h) D_i$$
$$K = i, i+1, \dots, T$$

روش جدید:

مدل برنامه‌ریزی خطی جدید (LP) گرچه از مدل (P''') «بیتران» (Bitran)، یاران او به مراتب کوچکتر و تشکیل آن نیز ساده‌تر است و حداکثر دارای $T(T+1)/2$ محدودیت و T متغیر است. مع‌الوصف به علت فرم خاص آن (خلوت بدون جدول ضرایب) ما ترجیح داده‌ایم که با اثبات دو قضیهٔ زیر مسئله اصلی را به مسایل کوچک مستقل از هم بشکنیم و سپس محدودیتهای مازاد این مدل LP را در هر مسئله کوچک از قبل تشخیص دهیم و مدل LP را تا حد ممکن کوچک کنیم و سپس برای حل مدل کوچک شده یک الگوریتم جدید و کارآ را غیر از روش برنامه‌ریزی خطی ارائه دهیم.

قضیه ۱: در دوره‌هایی که تقاضا از مقدار A/h بزرگتر است مسئله اصلی به مسایل کوچکتر مجزا و مستقل از هم تجزیه می‌گردد.

اثبات: «وگنر» و «ویتین» ثابت کرده‌اند که تقاضای یک دوره باید یا از موجودی پریودهای قبل تأمین گردد و یا اینکه سفارش داده شود. لذا در دوره‌هایی که تقاضایشان از A/h بزرگتر است معنی آن این است که حداقل هزینه نگهداری این تقاضا یعنی hD_j از مقدار ثابت هزینهٔ سفارش بیشتر می شود پس بهیچوجه بصرفه نخواهد بود که این تقاضا را از قبل سفارش داده و در انبار نگهداریم و اجباراً باید در این دوره حداقل برای خود این دوره سفارش دهیم پس در اینجا مسئله جدیدی شروع می شود و در نتیجه مسئله اصلی از این دوره به دو مسئله مجزا و مستقل از هم تقسیم می‌گردد.

قضیه ۲: تقاضای پریود J $(j > i)$ را در صورتی به توسط سفارش در پریود i تأمین می‌کنیم که $(J-i)h\, D_j < A$ باشد.

اثبات: وقتی که تقاضای دوره j، $(j > i)$ به توسط سفارش در دوره i تأمین گردد، این تقاضا باید به انبار انتقال داده شود و در این مدت به اندازه $(j-i)\, hD_j$ هزینه نگهداری پرداخت گردد حال اگر $(J-i)\, hD_j > A$ باشد در خواهیم یافت که هزینه نگهداری تقاضای دوره j بیشتر از سفارش آن است پس بهتر است‌که در این حالت تقاضای دوره j را به توسط سفارش در همان پریود J تأمین کنیم.

بنابر این با اثبات قضیه ۱ مدل کلی LP به مسایل کوچک مستقل از هم تقسیم می شود و با اثبات قضیه ۲ در هر مسئله کوچک بسیاری از محدودیتهای این مدل مازاد تشخیص داده خواهند شد. حال به ارائه این الگوریتم جدید می پردازیم:

الگوریتم:

قدم ۰: ابتدا تمام دوره‌هایی را که‌تقاضایشان از $\frac{A}{h}$ بیشتر است جدا کنید و هر یک از این دوره‌ها را به عنوان شروع یک مسئله جدید در نظر بگیرید.

حال برای هر مسئله کوچک بطور مجزا قدمهای زیر را بردارید:

قدم ۱: فرض کنید پریودهای این مسئله فرعی با دورهٔ i شروع و در دورهٔ n ختم گردد. برای هر یک از دوره‌های t ، $i \leqslant t < n$ دوره‌های بعدی‌آنرا آن قدر انتخاب می‌کنیم که جمع تقاضاهای آن از A/h کوچکتر باشد. بنابر این دوره‌ها بعد از t که جمع تقاضای تجمعی شان از A/h بزرگتر باشد از ملاحظات بعدی حذف می‌گردند.

قدم ۲: به‌جای حل‌ّمدل (LP) دستگاه معادلات مجاز (۸) را با استفاده از مقادیر بدست آمده در قدم ۱ تشکیل دهید. این دستگاه را یکجا حل نکنید. بلکه با شروع $U_i = A$ و حل آن به طورپی در پی مقادیر $u^*_{i+1}, u^*_{i+2}, \dots u^*_n$ یکی پس از دیگری بدست آورید. پس از بدست آمدن U^*_n برای تعیین حل بهینه به قدم ۳ بروید.

قدم ۳: ابتدا دریابید که U^*_n از چه نامعادله‌ای بدست آمده است فرض کنید آن نامعادله شامل U^*_t و U^*_{t-1} و U^*_n باشد. لذا معنی آن این است که در دوره t باید برای **مصرف** دوره‌های t و $t+1$ و .... و n سفارش دهیم. سپس با فرض $n = t-1$ و برگشت به اول این قدم حل بهینه این مسئله فرعی بدست خواهد آمد.

مثال عددی:

یک شرکت حمل ونقل در نظر دارد که برای ۱۲ ماه بعدی خود به برنامه‌ریزی خرید لوازم یدکی بپردازد. شرکت در هر ماه می باید تعداد معینی تقاضا را برآورده سازد. تقاضای ۱۲ ماه آینده این شرکت بترتیب ۱۰، ۶۲، ۱۲، ۱۳۰، ۱۵٤، ۱۲۹، ۸۸، ۵۲، ۱۲٤، ۱٦۰، ۲۳۸، ٤۱ تعداد محصول است. در صورتی که در یکی از ماهها مقدار خرید بیش از مقدار تقاضا باشد، شرکت مجبور است این مقدار مازاد را جهت مصرف در ماههای بعدی در انبار خود نگهداری کند و در ازای هر واحد آن $h = ۰/٤$ هزینه نگهداری بپردازد هر بار که شرکت دست به خرید می زند، مجبور است هزینه ثابت $A = ۵٤$ را تحت عنوان هزینه سربار متحمل گردد. این هزینه ثابت بوده است و بستگی به تعداد خرید ندارد. بنابر فرض فقط در حالتی‌که در یکی از ماهها خرید صفر باشد، این هزینه نیز در آن ماه صفر می‌گردد. قیمت خرید هر واحد محصول $C = ۲۰$ فرض گردیده است اینک سئوال این است که شرکت مزبور با توجه به اطلاعات فوق در هر ماه چقدر خرید باید داشته باشد تا علاوه بر تأمین تقاضا، مجموع هزینه‌های سفارش خرید و انبارداری خود را نیز به حداقل برساند؟

حل:

چون پرداخت هزینه خرید $C \sum_{j=1}^{۱۲} D_j$ اجتناب ناپذیر است لذا این مقدار ثابت را کنار می گذاریم و پس از حل مسئله مقدار آن را به هزینهٔ کل اضافه می کنیم.

با توجه به قدم ۰ الگوریتم چون $A/h = ۱۳۵$ است بنابر این مسئله اصلی در دوره‌های ۵ و ۱۰ و ۱۱ شکسته شده در نتیجه به جای یک مسئله ۱۲دوره‌ای چهار مسئله فرعی به‌شرح زیر خواهیم داشت:

مسئله فرعی ۱ شامل دوره‌های ۱ و ۲ و ۳ و ٤

مسئله فرعی ۲ شامل دوره‌های ۵ و ٦ و ۷ و ۸ و ۹

مسئلهٔ فرعی ۳ شامل دوره ۱۰

و بالاخره مسئله فرعی ٤ شامل دوره‌های ۱۱ و ۱۲ است.

حال باید هر یک از این مسئله‌های فرعی را جداگانه حل کنیم ولی چون حل تمام مسئله‌های فرعی شبیه هم هستند، لذا اجازه بدهید که ما فقط فرعی ۲ را که شامل دوره‌های بیشتری است، به طور کامل حل کنیم و سپس جواب بهینهٔ کل مسئله را ارائه دهیم.

در مسئلهٔ فرعی ۲ طبق قدم ۱ الگوریتم ابتدا دوره‌های مجاز را برای دوره‌های ۵، ٦، ۷، ۸ و ۹ به شرح زیر محاسبه می‌کنیم:

از پریود ۵ شروع می‌کنیم چون تقاضای دوره ٦ برابر ۱۲۹ و از $A/h = ۱۳۵$ کوچکتر است، بنابر این آن را باید نگه داریم،و لیکن چون $D_6 + D_7 > ۱۳۵$ است پس تأمین تقاضای

دوره‌های ۷ به بعداز طریق سفارش در دورهٔ ۵ به صرفه نخواهد بود به همین ترتیب دورهٔ ٦ چون D_7<۱۳۵ است آن را نگه می داریم و لیکن چون D_7+D_8 >۱۳۵ است پس در این ردیف از دوره ۸ به بعد را حذف می‌کنیم. برای ردیف ۷ پریود ۹ را حذف می کنیم. اینک برای سهولت امر و نمایش محاسبات بعدی تعداد $(j-i)hD_j$ را محاسبه و در جدول ذیل می آوریم. ضمناً اعداد روی قطر همان مقدار A یعنی هزینهٔ ثابت ثبت سفارش هستند.

* مسئلهٔ فرعی دوم *

نمایش دهندهٔ هزینه $(j-i)hD_j$ و دوره‌های مجاز

پریودمصرف / پریود تولید	۵	٦	۷	۸	۹
۵	٥٤	٥١/٦			
٦		٥٤	۳٥/۲		
۷			٥٤	۲۰/۸	
۸				٥٤	٤۹/٦
۹					٥٤
D_j	۱٥٤	۱۲۹	۸۸	٥۲	۱۲٤

حال دستگاه معادلات (۸) مجاز را برای این مسئله فرعی تشکیل می دهیم.

$$U_5 \leq ٥٤ \quad (۹)$$
$$U_5 + U_6 \leq ٥٤ + ٥١/٦ \quad (۱۰)$$
$$U_6 \leq ٥٤ \quad (۱۱)$$
$$U_6 + U_7 \leq ٥٤ + ۳٥/۲ \quad (۱۲)$$
$$U_7 \leq ٥٤ \quad (۱۳)$$
$$U_7 + U_8 \leq ٥٤ + ۲۰/۸ \quad (۱٤)$$
$$U_8 \leq ٥٤ \quad (۱٥)$$
$$U_8 + U_9 \leq ٥٤ + ٤۹/٦ \quad (۱٦)$$
$$U_9 \leq ٥٤ \quad (۱۷)$$

برای حل این دستگاه معادلات خطی هیچ لازم نیست که تمام سیستم یکجا حل شود بلکه با شروع U_1^*=٥٤ ابتدا مقدار U_6^* و سپس مقدار U_7^* و به همین ترتیب U_8^* و U_9^* بترتیب و بطور پی در پی قابل استخراج است. بنابر این داریم U_6^*=٥١/٦، U_7^*=۳۹/٦ و U_8^*=۳٥/۲ و U_9^*=٥٤ حال برای تعیین حل بهینه این مسئله فرعی ابتدا باید دریابیم که U_9^* از کدام نامعادله بدست آمده است؟ U_9^* از معادله (۱۷) بدست آمده است لذا دوره ۹ باید فقط برای پریود ۹ سفارش دهد. چون U_8^* از معادلهٔ (۱٤) بدست آمده است. لذا معنی آن این است که در دوره (۷) باید برای دوره‌های ۷ و ۸ سفارش داده شود. به همین ترتیب در دوره ۵ باید

برای مصرف دوره‌های ۵ و ٦ سفارش گردد.

اگر عین عملیات فوق را برای مسایل فرعی ۱ و ۳ و ٤ انجام دهیم، حل بهینهٔ نهائی به صورت زیر خواهد بود:

برنامه سفارش بهینه مثال عددی:

پریود ۱ برای مصرف دوره‌های ۱ و ۲ و ۳ سفارش دهد.

دوره ٤ فقط برای مصرف خودش سفارش دهد.

دوره ۵ برای مصرف دوره‌های ۵ و ٦ سفارش دهد.

دوره ۷ برای مصرف دوره‌های ۷ و ۸ سفارش دهد.

دوره‌های ۹ و ۱۰ هر یک برای خود سفارش دهند.

دوره ۱۱برای مصرف دوره‌های ۱۱ و ۱۲ سفارش دهد.

دامنه تحقیقاتی آتی:

اگر چه مدل برنامه‌ریزی سفارش خرید بدون محدودیت در میزان سفارش در سال ۱۹۵۸ توسط «واگنر» (Wagner) و «ویتین» (Whitin) با استفاده از مدل برنامه‌ریزی پویا حل گردیده بود و لیکن ما در این مقاله روش جدیدی را برای حل آن با استفاده از ساده‌ترین مدل تحقیق در عملیات یعنی برنامه‌ریزی خطی عرضه داشتیم. از همه مهمتر اینکه برای حل این مدل برنامه‌ریزی خطی به دلیل شکل خاص آن روش ساده‌تری را ارائه دادیم و در ضمن محاسبات سعی کردیم که از کلیهٔ محاسبات زاید جلوگیری کنیم. مع الوصف جا دارد که در این روش جدید یک راه حل پیشنهادی آنچنان ارائه شود که فی الفور بهینه هم باشد.

مدل برنامه‌ریزی سفارش خرید موقعی جالبتر می شود و به واقعیت نزدیکتر می‌گردد که برای سفارش خرید، یک حد بالایی قایل شویم. با وجود اینکه مقالات بسیار زیادی در مورد حل این مدل اخیر نوشته شده، ولیکن تاکنون یک الگوریتم ساده و کارا برای آن ارائه نگردیده است.

تشکر و قدردانی:

در خاتمه لازم می بینم که از آقای مهندس داریوش رضایت به خاطر نوشتن برنامه کامپیوتری این الگوریتم به زبان Basic تشکر و قدردانی بنمایم.

منابع:

1- Aryanezhad, M.B.Sufficient condition of optimality in Dynamic lot size model.European journal. of operations research, under reveiw.

2- Bitran, G.R.Magnanti,T.L. and yanasse, H.H. Approximation methods for the Uncapacitated Dynamic lot size problems.. Management science, Vol. 30.No.9. (1984), 1121-1140.

3. Eppen. G.D.Gould, F.J.and Pashigian, R.P. .Extensions of the planning horizon Theorem in the Dynamic lot size model,. Management Science, Vol, 15, No. 5,(1965), 268-277.

4.Hax.A.C. and Candea, D., Production and Inventory management, prentice-Hall, Inc. Englewood cliffs, N.J. 1984.

5- Johnson, L.A.and Montgomery, D.C., Operations Research in production planning, scheduling, and inventory control wiley New York, 1974

6. Peterson. R.and Silver, E.A., Decision systems for inventory Management and production planning, wiley, New York, 2nd Edition 1985.

7. Richter, K,. "Stability of the constant cost Dynamic lot size model,. European journal of operations Research 31.(1987), 61-65.

8- Wagner. H.and whitin , T.M. "Dynamic Version of the Economic lot size model. Management science, vol. 5(1958) 89-96.

9. Zangwill, W.I. "A Determinstic Multi-Period Production scheduling Model with backlogging, Management Science, vol.13, No,1. (1966), 105-119.

10- Zangwill, W.I.. From EOQ Towards ZI "Management Science. vol. 33. No.10, (1987), 1209-1223.