



## Thermal Buckling of Monitoring Micro Scale-Sensors of Agricultural Products via Tow Variable Strain Gradient Theory

Hamed Farahmand<sup>1\*</sup> and Amin Reza Jamshidi<sup>2</sup>

<sup>1\*</sup> Assistant Professor, Department of Mechanics Engineering, Ke.C., Islamic Azad University, Kerman, Iran

<sup>2</sup> Assistant Professor, Department of Agricultural Mechanization Engineering, Ke.C., Islamic Azad University, Kerman, Iran

\* Corresponding Author's Email: [farahmand.acad.p@iauk.ac.ir](mailto:farahmand.acad.p@iauk.ac.ir)

(Received: October. 13, 2025 – Accepted: December. 12, 2025)

### ABSTRACT

**Objective:** In this paper, thermal behaviors of micro plate is investigated in order to diminish errors in sensors and increase the agricultural products.

**Material and methods:** In this regard, thermal buckling of moderately thick micro-plate is practiced. In order to have accurate result, strain gradient and two variable theories are utilized simultaneously. Simply supported boundary conditions along all edges and uniform temperature for the rectangular micro-plate is determined. Consequently, two dependent governing equations for thermal buckling of moderately thick micro-plate is solved. Finally, non-dimensionalized critical buckling temperature for the micro-plate is derived.

**Results:** In all studied cases via two variable strain gradient theory (TVSGT), severe variation of non-dimensionalized thermal buckling load is observed for  $(a/b \leq 3)$  and is approximately constant for  $(a/b > 3)$ . Moreover, due to increasing micro length scale parameter, the influence of rising thickness on non-dimentionalized thermal buckling load is diminished and the error of classical plate theory is decreased for investigating thermal buckling of moderately thick micro-plate

**Conclusion.** Results show that, classical plate theory underestimates the critical thermal buckling load of the micro-plate and should be modified.

**Keywords:** Sustainable agriculture; Sensors, Micro-plate, Moderately thick plate, Thermal buckling, Analytical solution, Strain gradient theory, Two variable theory.

**Cite this article:** Farahmand, H., Jamshidi, A.R. 2025. Thermal Buckling of Monitoring Micro Scale-Sensors of Agricultural Products via Tow Variable Strain Gradient Theory. *Journal of Sustainable Agricultural Science Research*, 5 (3), 1-16.

DOI: <https://doi.org/10.71667/sarj.2025.1220960>



© The Author (s).

DOI: <https://doi.org/10.71667/sarj.2025.1220960>

Publisher: Islamic Azad University of Kerman Branch Press.

## تحلیل کمانش حرارتی سنسورهای پایش محصولات کشاورزی در ابعاد میکرو با استفاده از تئوری گرادیان کرنش و تئوری دو متغیره

حامد فرهمند<sup>۱\*</sup> و امین رضا جمشیدی<sup>۲</sup>

۱- استادیار، گروه مهندسی مکانیک، واحد کرمان، دانشگاه آزاد اسلامی، کرمان، ایران

۲- استادیار، گروه مهندسی مکانیزاسیون کشاورزی، واحد کرمان، دانشگاه آزاد اسلامی، کرمان، ایران

\* ایمیل نویسنده مسئول: [farahmand.acad.p@iauk.ac.ir](mailto:farahmand.acad.p@iauk.ac.ir)

(تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۷/۲۱ - تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۹/۲۲ - تاریخ چاپ: ۱۴۰۴/۰۹/۳۰)

### چکیده

**هدف:** در این مقاله به تحلیل دمایی برای کاهش خطای سنسورهای که برای افزایش تولید محصولات کشاورزی در ابعاد میکرو در گیاهان استفاده می گردد پرداخته می شود.

**مواد و روش ها:** در راستا تحلیل مکانیکی مورد نظر، بررسی کمانش حرارتی در میکرو ورق های نیمه ضخیم بکار می رود. برای مدلسازی از معادلات گرادیان کرنش به همراه تئوری دو متغیره جهت دقت در مدل میکرو ورق ها مستطیلی نیمه ضخیم استفاده می شود. شرایط مرزی برای این میکرو ورق، بصورت مرز ساده در تمامی لبه ها به همراه دمای یکنواخت در کل ورق در نظر گرفته می شود که مدل تابش خورشید به سنسور می باشد. معادلات پایه ای برای کمانش حرارتی میکرو ورق نیمه ضخیم به دو معادله وابسته تبدیل می شوند. در نهایت دمای بحرانی که باعث ناپایداری میکرو ورق نیمه ضخیم می گردد به صورت بی بعد تعیین می گردد.

**یافته ها:** در تمامی موارد بررسی شده توسط تئوری گرادیان کرنش به همراه تئوری دو متغیره تغییرات دمای بحرانی بی بعد تا نسبت ابعادی تقریباً  $(a/b \leq 3)$  شدید می باشد و بعد از آن تقریباً ثابت می شود. با افزایش پارامتر طول میکرو، اثر افزایش ضخامت بر دمای بحرانی بی بعد کاهش می یابد و خطای تئوری کلاسیک در تحلیل کاهش می یابد.

**نتیجه گیری:** نتایج نشان می دهد که تئوری کلاسیک برای بررسی کمانش حرارتی میکرو ورق های نیمه ضخیم با اشتباه در تخمین مقدار دمای بحرانی آنها مواجه می باشد و نیاز به تصحیح دارد.

**واژه های کلیدی:** کشاورزی پایدار، سنسورها، میکرو ورق، ورق نیمه ضخیم، کمانش حرارتی، حل تحلیلی، تئوری گرادیان کرنش، تئوری دو متغیره

استناد:

Cite this article: Farahmand, H., Jamshidi, A.R. 2025. Thermal Buckling of Monitoring Micro Scale-Sensors of Agricultural Products via Tow Variable Strain Gradient Theory. *Journal of Sustainable Agricultural Science Research*, 5 (3), 1-16.

DOI: <https://doi.org/10.71667/sarj.2025.1220960>



© The Author(s).

ناشر: انتشارات دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرمان

<https://doi.org/10.71667/sarj.2025.1220960>

## مقدمه

پایش محصولات کشاورزی یک از موضوعات مهم و موثر در حجم تولید این محصولات می باشد. پیشرفت در سنسورهای پایشی در سالهای اخیر مورد توجه دانشمندان بسیاری قرار گرفته است. این سنسورهای که می توانند در لحظه به پایش محصول، آب و هوا و وضعیت خاک بپردازند، اهمیت ویژه ای در نقش اینترنت اشیا در کشاورزی پایدار پیدا نموده اند (Wolfert & Isakhanyan, 2022; Kim *et al.*, 2025). سنسورهای مورد استفاده معمولاً شامل لایه هایی از ورق های بسیار نازک در ابعاد میکرو متری هستند که قطعات الکترونیکی بر روی آنها قرار می گیرند و رفتار مکانیکی این ورق ها در نتیجه سنجش سنسورها تاثیر بسزایی دارد. امروزه تقاضا برای محصولات و سیستم ها با قطعات میکرو و نانو رو به افزایش است از این رو تحقیق در مورد میکرو و نانو ورق ها توسعه فراوان یافته است. میکرو ورق ها به طور گسترده ای در وسائل میکرو الکترو مکانیکی از قبیل سنسورها (Kamat *et al.*, 2023) (Vurro *et al.*, 2023) تشدید کننده های فشار در سیستم های نانو الکترومکانیکی و سیستم های میکرو الکترومکانیکی (Chuang *et al.*, 2010) (Batra *et al.*, 2007) کاربرد دارند.

با کم شدن ضخامت ورق ها تا ابعاد میکرون اثر اندازه، تاثیر بسیاریادی بر مقاومت مکانیکی آنها پیدا می کند. از آنجایی که تئوری کلاسیک ورق ها قادر به اعمال تاثیرات کاهش ابعاد در اندازه میکرو را ندارد، بنابراین به منظور بررسی رفتار مکانیکی دقیق میکرو ورق های نیاز به بهبود تئوری های کلاسیک با اعمال اثرات ابعاد در معادلات ورق ها می باشد. برخی از تئوری های ارائه شده در زمینه مدل سازی

اثر ابعاد، تئوری میندلین و کوپل تنش می باشند. در هر دو تئوری کوپل تنش لحاظ می گردد و معادلات اضافی براساس پارامتر کوپل تنش ایجاد می شوند (Mindlin & Eshel, 1968) روش دیگری برای اعمال اثر ابعاد، تئوری گرایان کرنش می باشد. تئوری گرایان کرنش که توسط میندلین و اشل ارائه شده است، برای تحلیل میکرو سازه های ایزوتروپیک در منطقه الاستیک خطی به کار گرفته شد. وارد کردن اثر گرایان کرنش به همراه پارامتر طول در الاستیسیته تغییر شکل های بزرگ به وسیله فرهمند و عرب نژاد (Farahmand & Arabnejad, 2010) مورد بحث قرار گرفت. نظریه الاستیسیته غیرمحملی برای تحلیل میکروصفحات ارائه شده است. در همین راستا، لازاپولس (Lazopoulos, 2009) آنالیز خمش ورق های نازک را بر اساس تئوری ورق کیرشهف و تئوری گرایان کرنش مورد مطالعه قرار داد. وانگ و همکارانش (Wang *et al.*, 2011) با استفاده از روش انرژی معادلات حاکم گرایان کرنش و شرایط مرزی به کار گرفته شده برای میکرو ورق نازک را استخراج نمودند. دراین مقاله اثرات اندازه متفاوت مورد بررسی قرار گرفته است و خمش و ارتعاشات ازاد میکرو ورق را مورد مطالعه قرار دادند.

دراین تحقیق به بررسی میکرو ورق های نیمه ضخیم پرداخته شده است. به منظور مدل سازی ورق های نیمه ضخیم، اثرات برشی نیز در معادلات اساسی در نظر گرفته شده است. بدین منظور تئوری های تغییر شکل برشی از جمله تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول (Wang, 2011)، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه دوم و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم (Reddy, 2006) (Nguyen & Niiranen, 2021) مورد استفاده قرار گرفته اند. تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم

مورد مطالعه قرار گرفته است (Kianian *et al.*, 2017).

تحلیل کماتش حرارتی میکرو ورق‌های مسلح شده با نانو گرافن‌هاکه با تئوری تصحیح شده کوپل تنش توسط عارفی و همکاران مورد ارزیابی قرار گرفته است (Arefi *et al.*, 2019). دراین تحقیق اثر توزیع مختلف نانو گرافن‌ها بر روی ناپایداری حرارتی مورد بررسی قرار گرفته است. تحلیل ارتعاشاتی و کماتش حرارتی میکرو ورق‌های ساخته شده با مواد مرکب تابعی با استفاده از تئوری کوپل تنش نیز در مرجع (Ghadiri *et al.*, 2017) انجام پذیرفته است. دراین مقاله اثر ابعاد و شرایط مرزی مختلف بر روی دمای بحرانی مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین کماتش حرارتی میکرو ورق‌ها با استفاده از تئوری کوپل تنش و گرادیان کرنش توسط انصاری و همکاران با روش تعمیم یافته مربعات دیفرانسیلی، مورد تحلیل قرار گرفت (Ansari *et al.*, 2013).

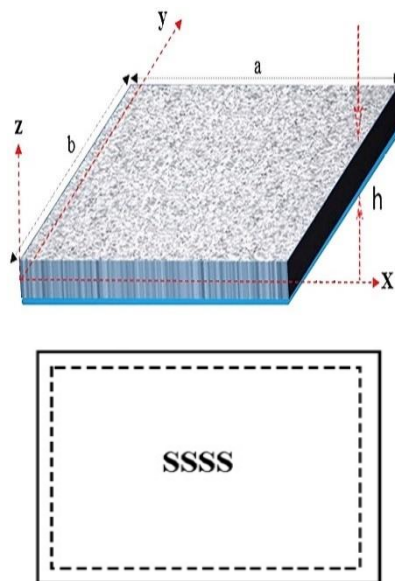
برای تحلیل پایداری میکرو ورق‌های نیمه ضخیم از ترکیبتئوری‌های کوپل تنش و گرادیان کرنش با تئوری تغییر شکل برشی مختلف استفاده شده است (Nuhu & Safaei, 2023). ملک زاده و همکاران به تحلیل اثر حرارتی بر روی میکرو ورق‌های ضخیم با استفاده از تئوری کوپل تنش به همراه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول پرداخته است (Ghorbani, Shenan & Malekzadeh, 2017). همچنین تئوری گرادیان کرنش به همراه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم برای تحلیل میکرو ورق دوار مورد استفاده قرار گرفته است (Zhang *et al.*, 2015). فرهمند و همکاران از تئوری گرادیان کرنش و تئوری دو متغیره جهت بررسی پایداری و رفتار ارتعاشی میکرو

یکی از مشهورترین و کاربردی ترین تئوری‌های مرتبه بالاتر می‌باشد. اگرچه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم منجر به بهبود نتایج می‌شود اما باعث پیچیدگی‌های محاسباتی می‌شود و زمان حل معادلات را افزایش می‌دهد، ازاین رو در سالهای اخیر، محققان با هدف رسیدن به روش‌های کارآمدتری، بررسی‌های متعددی انجام داده اند. دراین رابطه شیمپی (Shimpi, 2002) تئوری دو متغیره را مطرح نمود که شبیه به تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم است لیکن با استفاده از جابجایی‌های برشی، پیچیدگی در معادلات کاهش می‌یابد. دراین تئوری فرض می‌شود جا به جایی‌های عرضی شامل دو مولفه خمش و برشی می‌باشند. در واقع در استفاده ازاین تئوری، درمیدان جابجایی تغییر شکل برشی به تغییر شکل در اثر خمش اضافه می‌گردد. با توجه به‌اینکه دراین تئوری، میدان جابه جایی که در بردارنده انحراف برشی بود ارائه شد و معادلات حاکم به منظور توضیح پاسخ‌های مکانیکی ورق ارائه شدند. برای بررسی اثر ضخامت در ورق‌های نیمه ضخیم و ضخیم تئوری‌های متعددی ارائه شده است که یکی از بهینه ترین آنها به لحاظ دقت و سهولت در تحلیل، تئوری دو متغیره می‌باشد (Shimpi & Patel, 2006). علاوه براین، در سالهای اخیرتئوری‌های ورق اصلاح شده دیگری نیز پیشنهاد شده اند (Huu-Tai *et al.*, 2013-2014) (Bahreman *et al.*, 2019) اما این تئوری‌ها در محاسبات نسبت به تئوری دو متغیره اصلاح شده ورق بسیار پیچیده تر هستند. برای اثبات دقت تئوری دو متغیره، این تئوری در تحلیل مسائل مختلف ورق استفاده شده است، مانند بررسی ورق ضخیم با مواد مرکب تابعی که توسط تئوری دو متغیره اصلاح شده

## معادلات اساسی

### معادلات میکرو ورق نیمه ضخیم

شکل (۱)، شکل میکرو ورق نیمه ضخیم با شرایط مرزی نشان داده شده است. در میکرو ورق نیمه ضخیم مستطیل  $a$  طول،  $b$  عرض و  $h$  ضخامت آن هستند.



شکل ۱- میکرو ورق نیمه ضخیم با تکیه گاه ساده

که در آن  $\sigma_0$  تنش اولیه،  $\varepsilon$  کرنش،  $g$  پارامتر طول میکرو و  $\nabla^n \varepsilon$  گرادیان کرنش هستند. اثر پارامتر میکرو به ابعاد دانه بندی و ساختار داخلی ماده بستگی دارد.

تئوری گرادیان کرنش و تئوری دو متغیره ورق برای مدل سازی یک میکرو ورق نیمه ضخیم مورد استفاده قرار گرفته است.

ورق های نازک و نیمه ضخیم و پرداخته است (Farahmand, 2021) (Ahmadi & Farahmand, 2012). در این تحقیق به کمانش میکرو ورق نیمه ضخیم با استفاده از تئوری گرادیان کرنش و تئوری دو متغیره (تئوری گرادیان کرنش دو متغیره) پرداخته شده است و در نهایت نتایج به صورت بی بعد برای بررسی اثرات ابعاد ورق و اثر ابعاد میکرو بر بار بحرانی حرارتی ارائه می گردد.

از آنجایی که اثرات ابعاد میکرو در پاسخ های مکانیکی میکروسازه ها بسیار حائز اهمیت است، از این رو باید در معادلات در نظر گرفته شود. بنابراین روابط تنش و کرنش را به صورت زیر خواهیم داشت (Farahmand & Arabnejad, 2010):

$$\sigma = f(\sigma_0, \varepsilon, g^n, \nabla^n \varepsilon) \quad (1)$$

به دلیل اثرات ناشی از ابعاد میکرو در رفتار میکرو ورق، تئوری گرا دیان کرنش استفاده می‌شود. بنابراین تنش‌ها علاوه بر کرنش کلاسیک با گرا دیان کرنش نیز در ارتباط هستند. از این رو، مولفه‌های تنش مرتبط با کرنش به صورت زیر بیان می‌شوند (Ahmadi & Farahmand, 2012).

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E(z)}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) - g^2 \frac{E(z)}{1-\nu^2} \nabla^2 (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E(z)}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) - g^2 \frac{E(z)}{1-\nu^2} \nabla^2 (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) \\ \tau_{xy} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)} (\gamma_{xy}) - g^2 \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \nabla^2 (\gamma_{xy}) \quad (4) \\ \tau_{yz} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)} (\gamma_{yz}) - g^2 \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \nabla^2 (\gamma_{yz}) \\ \tau_{xz} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)} (\gamma_{xz}) - g^2 \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \nabla^2 (\gamma_{xz})\end{aligned}$$

که در آن  $\nabla^2$  عملگر لاپلاس دو بعدی  $(\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2)$ ، (g) نشان دهنده تاثیر ابعاد میکرو بر روابط میکرو سازه است.

معادلات زیر متجه‌های تنش را نشان می‌دهند (Ventsel et al., 2002):

$$\begin{aligned}(N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) dz \\ (M_{xx}^b, M_{yy}^b, M_{xy}^b) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) z dz \\ (Q_{xz}, Q_{yz}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) dz \\ (M_{xx}^s, M_{yy}^s, M_{xy}^s) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) z \left( -\frac{1}{4} + \frac{3}{5} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right) dz\end{aligned} \quad (5)$$

در راستای اعمال تئوری دو متغیره ورق میدان برشی به میدان جابه جایی در معادلات میدان جابجایی اضافه می‌گردد. بنابراین میدان جابه جایی زیر را می‌تواند برای میکرو ورق نیمه ضخیم در نظر گرفته می‌شود (Shimpi & Patel, 2006):

$$\begin{aligned}w(x, y, z) &= w_s(x, y) + w_b(x, y) \\ u(x, y, z) &= h \left( \frac{z}{4h} - \frac{5z^3}{3h^3} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} w_s(x, y) \right) - z \left( \frac{\partial}{\partial x} w_b(x, y) \right) \quad (2) \\ v(x, y, z) &= h \left( \frac{z}{4h} - \frac{5z^3}{3h^3} \right) \left( \frac{\partial}{\partial y} w_s(x, y) \right) - z \left( \frac{\partial}{\partial y} w_b(x, y) \right)\end{aligned}$$

که در آن  $w$  نشان دهنده جابه جایی عرضی و  $u$  و  $v$  نشان دهنده مولفه‌های جابه جایی درون صفحه‌ای در جهت‌های  $x$  و  $y$  در صفحه میانی می‌باشند. همچنین پانویس (s) و (b) نمایانگر مولفه‌های تغییر شکل‌های ناشی از برش و خمش هستند. با استفاده از تئوری ون-کارمن برای ارتباط خطی کرنش - جابه‌جایی، مولفه‌های کرنش به صورت زیر ارائه می‌شوند (Ahmadi & Farahmand, 2012):

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= h \left( \frac{z}{4h} - \frac{5z^3}{3h^3} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_s(x, y) \right) - z \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_b(x, y) \right) \\ \epsilon_y &= h \left( \frac{z}{4h} - \frac{5z^3}{3h^3} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} w_s(x, y) \right) - z \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} w_b(x, y) \right) \\ \gamma_{xy} &= 2h \left( \frac{z}{4h} - \frac{5z^3}{3h^3} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} w_s(x, y) \right) - 2z \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} w_b(x, y) \right) \quad (3) \\ \gamma_{yz} &= \left( \frac{5}{4} - \frac{5z^2}{h^2} \right) \left( \frac{\partial}{\partial y} w_s(x, y) \right) \\ \gamma_{xz} &= \left( \frac{5}{4} - \frac{5z^2}{h^2} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} w_s(x, y) \right)\end{aligned}$$

که در آن  $\epsilon_x$  و  $\epsilon_y$  کرنش‌های نرمال و  $\gamma_{xy}$  کرنش برشی درون صفحه‌ای و  $\gamma_{yz}$  و  $\gamma_{xz}$  کرنش برشی عرضی هستند.

که در آن  $N_{ij}$  و  $Q_{ij}$  متجه‌های نیرو و  $M_{ij}^b$  و  $M_{ij}^s$  متجه‌های ناشی از مولفه‌های خمش و برش هستند که با انتگرال گیری از مولفه‌های تنش در راستای ضخامت به دست آمده اند.

برای بدست آوردن معادلات کمانش حرارتی میکرو ورق با استفاده از اصل مینیم انرژی پتانسیل کل، معادله زیر بدست می‌آید

$$\delta \Pi = \delta(U - W^T) = 0 \quad (6)$$

که انرژی پتانسیل کل ( $U$ ) به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV \quad (7)$$

و کار انجام شده که توسط دمای ثابت اعمالی به میکرو ورق ایجاد می‌شود ( $W^T$ )، در معادله (۸) ارائه می‌گردد

$$W^T = \frac{1}{2} \iint_A N^T w_{,i} w_{,j} dA \quad (8)$$

که در این معادله  $N^T$  بار بحرانی حرارتی می‌باشد

با جایگذاری معادلات (۳)، (۴) و (۵) در معادله (۶)، معادلات پایداری به صورت زیر بدست خواهند آمد:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_s \\ W_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} M_{x,xx}^s + M_{y,yy}^s + 2M_{xy,xy}^s + Q_{xz,x} + Q_{yz,y} \\ = N^T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N^T \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (9)$$

$$M_{x,xx}^b + M_{y,yy}^b + 2M_{xy,xy}^b = N^T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N^T \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

### شرایط مرزی

در تمام لبه‌های مرزهای میکرو ورق مستطیل، تکیه گاه‌های ساده و همچنین دمای ثابت بر روی کل ورق در نظر گرفته شده است. شرایط مرزی برای تکیه گاه ساده در راستای محور  $y$  ( $x=0, x=a$ )، به صورت زیر خواهند بود:

$$w^b = w^s = 0 \quad (10)$$

$$M_{xx}^b = M_{xx}^s = 0$$

در نهایت شرایط مرزی برای تمام لبه‌ها به صورت زیر خواهد بود (Papargyri-Beskou et al., 2010):

$$\begin{aligned} w^b = w^s = 0 \\ w_{,xx}^b = w_{,yy}^b = w_{,xx}^s = w_{,yy}^s = 0 \\ w_{,xxxx}^b = w_{,xyxy}^b = w_{,yyyy}^b = w_{,xxxx}^s \\ = w_{,xyxy}^s = w_{,yyyy}^s = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

بر همین اساس جابجایی‌ها بر اساس شرایط مرزی ساده به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\begin{aligned} w^s(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{mn}^s \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ w^b(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{mn}^b \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\alpha = \left( \frac{m\pi}{a} \right), \beta = \left( \frac{n\pi}{b} \right)$$

با جایگذاری جابجایی‌های معادله (۱۲) در معادله (۹)، معادله زیر بدست می‌آید

که پارامترها در معادله (۱۳) به صورت زیر می‌باشند

$$\begin{aligned} A_{11} &= \overline{\eta_1 \psi_1} + N \overline{\psi_2} \\ A_{12} &= N \overline{\psi_2} \\ A_{22} &= -\eta_2 \overline{\psi_1} + N \overline{\psi_2} \end{aligned} \quad (14)$$

$$N^T = \frac{E\alpha\Delta T}{1-\nu^2} \quad (18)$$

که در آن  $E$  مدول یانگ،  $\alpha$  ضریب انبساط حرارتی،  $\nu$  ضریب پواسون و افزایش دما  $\Delta T$  می‌باشد.

### نتایج و بحث

بر اساس حدس میدان جابجایی به فرم معادله (۱۲) دمای بحرانی ( $\Delta T_{cr}^c$ ) برای  $m=n=1$  بدست می‌آیند. تمام نتایج به منظور محفوظ ماندن نتایج تعمیم یافته به صورت بی بعد بر حسب نتایج تئوری کلاسیک ارائه می‌شوند. نتایج تئوری کلاسیک با بالا نویسی (c) نشان داده شده اند. نتایج کلاسیک با مقدار پارامتر طول میکرو صفر ( $g=0$ ) و برای ضخامت بسیار کم در نظر رفته می شود ( $h \ll 0$ ).

در جدول (۱) دمای بحرانی بی بعد ( $\Delta T_{cr}/\Delta T_{cr}^c$ ) برحسب پارامتر طول میکرو بی بعد مختلف، نسبت ابعادی بی بعد ( $a/b=1$ ) و نسبت ضخامت ( $h/b=0.0005$ ) با نتایج مرجع (Farahmand et al., 2011) مقایسه شده است. جواب‌ها تئوری گرادیان کرنش و دو متغیره با جواب المان محدود در مقادیر مختلف پارامتر طول میکرو بی بعد همخوانی بسیار خوبی دارند. در صورتی که عامل برشی از تئوری گرادیان کرنش و دو متغیره حذف گردد، جواب‌های تحلیل دقیقاً با مقادیر تحلیلی گزارش شده در مقاله (Farahmand et al., 2011) یکسان خواهند بود

که در معادله (۱۴) پارامترها به صورت زیر تعریف می‌گردند

$$\overline{\Psi}_1 = \frac{Eh\pi^2}{1008(1-\nu^2)a^6b^6} \left[ ((an)^2 + (bm)^2)(\pi g an)^2 + (\pi g bm)^2 + (ab)^2 \right] \quad (15)$$

$$\overline{\Psi}_2 = \frac{\pi^2(an)^2 + (bm)^2}{Da^2b^2}$$

$$\overline{\eta}_1 = (\pi h an)^2 + (\pi h bm)^2 + 420(ab)^2(1-\nu)$$

$$\overline{\eta}_2 = 84(h\pi)^2(an)^2 + (bm)^2$$

برای بدست آوردن بار بحرانی حرارتی میکرو ورق نیمه ضخیم، جواب غیر صفر معادله (۱۳) که می‌توان به صورت فرم ماتریسی ( $AW=0$ ) ارائه گردد، می‌بایست بدست‌آید. در همین راستا دترمینان ماتریس ( $A$ ) که به عنوان ضریب ماتریس جابجایی ( $W$ ) است، باید برابر با صفر باشد. در نتیجه

$$A_{11}A_{22} - A_{12}^2 = 0 \quad (16)$$

در نهایت بار بحرانی میکرو ورق نیمه ضخیم با شرایط مرزی ساده به صورت معادله (۱۷) ارائه می‌گردد

$$N^T = \frac{\overline{\eta}_1 \overline{\eta}_2}{(\overline{\eta}_1 - \overline{\eta}_2)} \frac{\overline{\Psi}_1}{\overline{\Psi}_2} \quad (17)$$

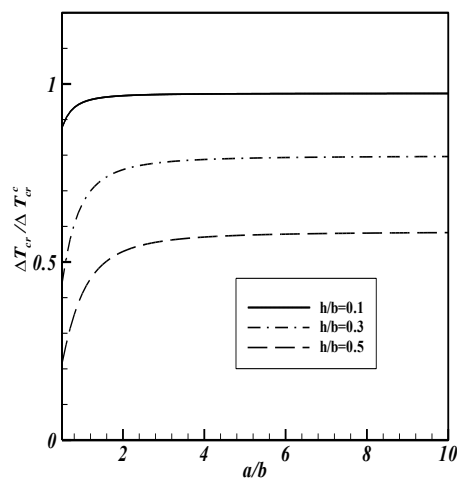
حرارت بحرانی و بار بحرانی حرارتی به صورت زیر با یکدیگر مرتبط می‌باشند.

جدول ۱- دمای بحرانی بی بعد بر حسب نسبت پارامتر اثر میکرو بی بعد برای میکرو ورق نازک ( $h/b=0.0005$ ) و نسبت ابعاد بی بعد ( $a/b=1$ ).

| g/b | مرجع (Farahmand <i>et al.</i> , 2011) | تحلیل کنونی |
|-----|---------------------------------------|-------------|
| ۰.۱ | ۱.۲۳۱                                 | ۱.۱۹۷       |
| ۰.۲ | ۱.۷۸۴                                 | ۱.۷۸۹       |
| ۰.۳ | ۲.۷۶۹                                 | ۲.۷۷۷       |

در شکل (۲)، نمودارهای دمای بحرانی بی بعد ( $a/b \leq 3$ ) شدید می‌باشد و بعد از آن تقریباً ثابت می‌شود. این تغییرات برای میکرو ورق‌های با ضخامت ( $h/b=0.01$ ) بسیار کمتر از بقیه موارد می‌باشد. با توجه به نمودارها با افزایش ضخامت دمای بحرانی میکرو ورق بی بعد کاهش می‌یابد. اثر ابعاد بی بعد بر دمای بحرانی بی بعد در این شکل کاملاً مشخص و واضح می‌باشد.

در شکل (۲)، نمودارهای دمای بحرانی بی بعد ( $a/b \leq 3$ ) شدید می‌باشد و بعد از آن تقریباً ثابت می‌شود. این تغییرات برای میکرو ورق‌های با ضخامت ( $h/b=0.01$ ) بسیار کمتر از بقیه موارد می‌باشد. با توجه به نمودارها با افزایش ضخامت دمای بحرانی میکرو ورق بی بعد کاهش می‌یابد. اثر ابعاد بی بعد بر دمای بحرانی بی بعد در این شکل کاملاً مشخص و واضح می‌باشد.

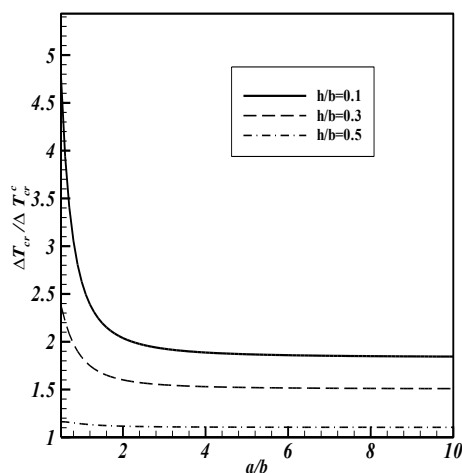


شکل ۲- تغییرات دمای بحرانی بی بعد بر حسب نسبت ابعادی بی بعد و پارامتر طول میکرو بی بعد ( $g/b=0.01$ ) و نسبت ضخامت‌های بی بعد مختلف

در شکل (۳)، نمودارهای دمای بحرانی بی بعد ( $a/b \leq 3$ ) شدید می‌باشد و بعد از آن تقریباً ثابت می‌شود. این تغییرات برای میکرو ورق‌های با ضخامت ( $h/b=0.01$ ) بسیار کمتر از بقیه موارد می‌باشد. با توجه به نمودارها با افزایش ضخامت دمای بحرانی میکرو ورق بی بعد کاهش می‌یابد. اثر ابعاد بی بعد بر دمای بحرانی بی بعد در این شکل کاملاً مشخص و واضح می‌باشد.

در شکل (۳)، نمودارهای دمای بحرانی بی بعد ( $a/b \leq 3$ ) شدید می‌باشد و بعد از آن تقریباً ثابت می‌شود. این تغییرات برای میکرو ورق‌های با ضخامت ( $h/b=0.01$ ) بسیار کمتر از بقیه موارد می‌باشد. با توجه به نمودارها با افزایش ضخامت دمای بحرانی میکرو ورق بی بعد کاهش می‌یابد. اثر ابعاد بی بعد بر دمای بحرانی بی بعد در این شکل کاملاً مشخص و واضح می‌باشد.

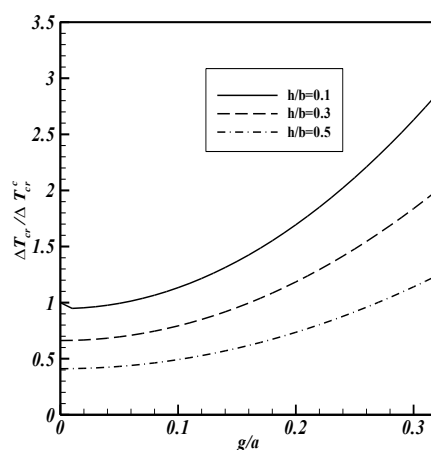
افزایش نسبت ابعادی بی بعد مواجه می‌گردد. این کاهش نیز تا نسبت ابعادی تقریباً  $(a/b \leq 3)$  شدید می‌باشد.



شکل ۳- تغییرات دمای بحرانی بی بعد میکرو ورق بر حسب نسبت ابعادی بی بعد و پارامتر طول میکرو بی بعد  $(h/b=0.3)$  و نسبت ضخامت‌های بی بعد مختلف

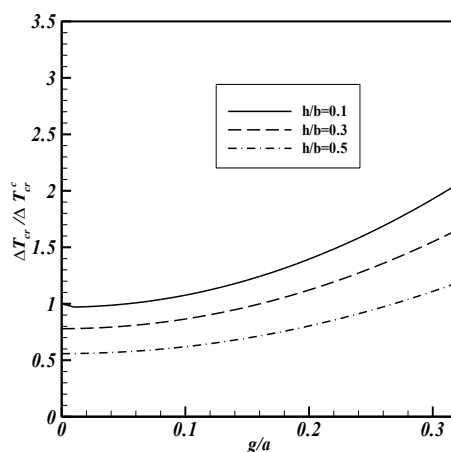
افزایش پارامتر طول میکرو بی بعد دمای بحرانی بی بعد نیز افزایش می‌یابد. این افزایش برای پارامتر طول میکرو بیشتر در ضخامت بی بعد  $(h/b=0.1)$  شدیدتر می‌باشد.

نمودارهای دمای بحرانی بی بعد  $(\Delta T_{cr}/\Delta T_{cr}^c)$  بر حسب پارامتر طول میکرو بی بعد مختلف و برای ضخامت‌های مختلف  $(h/b=0.1)$ ،  $(h/b=0.3)$  و  $(h/b=0.5)$  در شکل‌های (۴) و (۵) به ترتیب برای نسبت‌های ابعادی بی بعد  $(a/b=1)$  و  $(a/b=3)$  ترسیم شده‌اند. در شکل (۴)، نمودارها نشان می‌دهند که با



شکل ۴- تغییرات دمای بحرانی بی بعد میکرو ورق بر حسب نسبت ابعادی بی بعد و پارامتر طول میکرو بی بعد ( $a/b=1$ ) و نسبت ضخامت‌های بی بعد مختلف

در شکل (۵) تغییرات بار بحرانی بر حسب پارامتر طول میکرو به نسبت شکل (۴) با شدت کمتری افزایش می‌یابد.

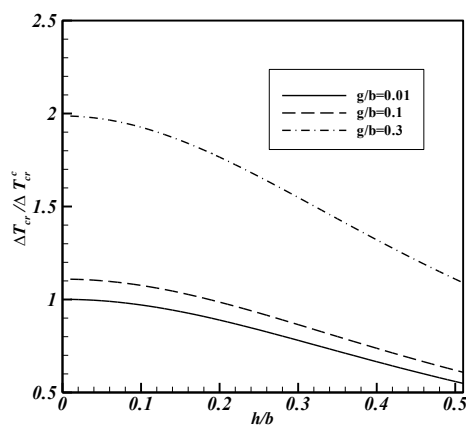


شکل ۵- تغییرات دمای بحرانی بی بعد میکرو ورق بر حسب پارامتر طول میکرو بی بعد و نسبت ابعادی بی بعد ( $a/b=3$ ) و نسبت ضخامت‌های بی بعد مختلف

میکرو ( $g/b=0.01$ )، ( $g/b=0.1$ ) و ( $g/b=0.3$ ) ترسیم شده است. کاهش دمای بحرانی بی بعد برای پارامتر طول میکرو ( $g/b=0.01$ ) بسیار زیاد است. با افزایش

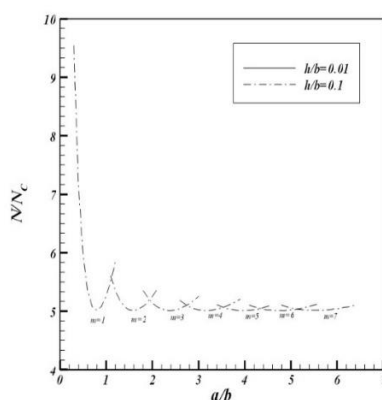
در شکل (۶) دمای بحرانی بی بعد ( $\Delta T_{cr}/\Delta T_{cr}^c$ ) بر حسب ضخامت‌های بی بعد مختلف و نسبت ابعادی بی بعد ( $a/b=3$ ) و همچنین برای پارامترهای طول

پارامتر طول میکرو اثر افزایش ضخامت بر دمای بحرانی بی بعد کاهش می‌یابد و در نتیجه خطای تئوری کلاسیک کاهش می‌یابد.



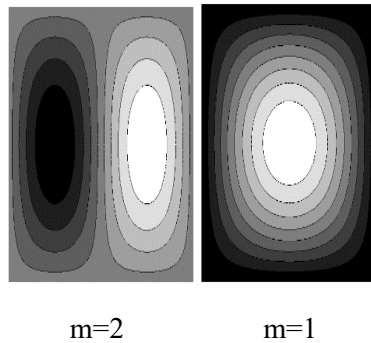
شکل ۶- تغییرات دمای بحرانی بی بعد میکرو ورق بر حسب نسبت ضخامت بی بعد و نسبت ابعاد ( $a/b=3$ ) و پارامترهای طول میکرو بی بعد مختلف

در شکل (۷) بار دمایی بحرانی بی بعد بر حسب نسبت ابعادی بی بعد مختلف و برای پارامتر طول میکرو بی بعد ( $g/b=0.3$ ) و نسبت ضخامت ( $h/b=0.1$ ) برای مودهای مختلف (مقادیر مختلف  $m$ ) نمایش داده شده است.



شکل ۷- تغییرات بار بحرانی بی بعد میکرو ورق بر حسب نسبت ابعادی بی بعد و پارامتر طول میکرو بی بعد ( $g/b=0.3$ ) و نسبت بی بعد ضخامت ( $h/b=0.1$ ) برای مودهای مختلف (مقادیر مختلف  $m$ )

نمودار تغییرات مودها کماتر حرارتی برای نسبت ابعادی بی بعد مختلف در این شکل نمایش داده شده است. شکل دو مود اول و دوم کماتر حرارتی میکرو ورق نیمه ضخیم، در شکل (۸) مشاهده می گردد.



شکل ۸- شکل مودهای کماتر حرارتی برای میکرو ورق نیمه ضخیم و نسبت ابعادی بی بعد ( $a/b=1$ ) و نسبت ضخامت بی بعد ( $h/b=0.1$ ) و پارامتر طول میکرو بی بعد ( $g/b=0.3$ ) برای مودهای اول و دوم

حالتی که نسبت ابعادی بیشتر از سه ( $a/b \geq 3$ ) باشد، تغییرات نتایج بی بعد بار بحرانی کماتر ناشی از تئوری گرادیان کرنش دو متغیره قابل ملاحظه نیستند. ناپایداری میکرو ورقها نیمه ضخیم با افزایش پارامتر اثر میکرو در دماهای بالاتری نسبت به اثرات میکرو کمتر اتفاق می افتد. همچنین برای میکرو ورقهای نیمه ضخیم برای نسبت ابعادی بی بعد ( $a/b=3$ ) شدت تغییرات بار بحرانی حرارتی بی بعد به نسبت تغییرات ضخامت بی بعد در مقایسه با نسبت بی بعد ابعادی کمتر در ورق، کاهش می یابد.

بنابراین سه پارامتر ضخامت، نسبت ابعاد ورق و ضخامت در طراحی پایداری حرارتی میکرو ورق نیمه ضخیم نقش مهمی دارند.

#### تائیده های اخلاقی و تعارض منافع

نویسندگان این مقاله تأیید می کنند که هیچ گونه تعارض منافع مالی یا غیرمالی در این تحقیق وجود

#### نتیجه گیری

در این مقاله به منظور بررسی کماتر حرارتی میکرو ورقهای نیمه ضخیم، تئوری گرادیان کرنش دو متغیره استفاده شده است. معادلات حاکم برای میکرو ورق مستطیل شکل با تکیه گاه ساده به همراه بار دماییکنواخت در تمام ورق به دست آورده شده اند. با اعمال تئوری دو متغیره، اثرات برش در محاسبه نتایج در نظر گرفته شده اند. در نتیجه دو معادله وابسته حاصل می گردد که بر اساس جواب غیر صفر این معادلات بار بحرانی حرارتی برای میکرو ورق نیمه ضخیم بدست می آید.

در معادلات نهایی اثرات نسبت ابعادی، اثرات ناشی از میکروسازه و اثرات ضخامت بر اساس تئوری گرادیان کرنش دو متغیره مورد ارزیابی قرار گرفته است. نتایج کماتر حرارتی با استفاده از تئوری گرادیان کرنش دو متغیره برای میکرو ورق نشان از اثر قابل ملاحظه ی ضخامت در جوابها دارد. برای

ندارد و کلیه مراحل تحقیق با رعایت اصول اخلاقی انجام شده است.

## REFERENCES

- Afshari, H., and N. Adab, 2020. Size-dependent buckling and vibration analyses of GNP reinforced microplates based on the quasi-3D sinusoidal shear deformation theory, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, pp. 1-22, 2020. doi:10.1080/15397734.2020.1833540
- Ahmadi, A.R. and Farahmand, H., 2012. Static deflection analysis of flexural rectangular microplate using higher continuity finite-element method. *Mechanics & Industry*, 13(4), pp.261-269
- AlZubi, A.A. and Galyna, K., 2023. Artificial intelligence and internet of things for sustainable farming and smart agriculture. *IEEE access*, 11, pp.78686-78692.
- Ansari, R. 2013. Thermal buckling analysis of a Mindlin rectangular FGM microplate based on the strain gradient theory, *Journal of Thermal Stresses*, vol. 36, no. 5, pp. 446-465, 2013. doi:10.1080/01495739.2013.742965
- Arefi, M., Bidgoli, E.M.R., and T. Rabczuk, 2019. Effect of various characteristics of graphene nanoplatelets on thermal buckling behavior of FGRC micro plate based on MCST,” *European Journal of Mechanics-A/Solids*, vol. 77, p. 103802, 2019. doi:10.1016/j.euromechsol.2019.103802
- Batra, R. C., Porfiri, M., and D. Spinello, 2007. Review of modeling electrostatically actuated microelectromechanical systems, *Smart Materials and Structures*, vol. 16, no. 6, p. R23, 2007. doi:10.1088/0964-1726/16/6/R01
- Bahreman, M., Darijani, H., and A. B. Fard, 2019. The size-dependent analysis of microplates via a newly developed shear deformation theory, *Acta Mechanica*, vol. 230, no. 1, pp. 49-65, 2019. doi:10.1007/s00707-018-2429-4
- Chuang, W. C. and Lee, H. L., P. Z. Chang, and Y. C. Hu, 2010. Review on the modeling of electrostatic MEMS, *Sensors*, vol. 10, no. 6, pp. 6149-6171, 2010. doi:10.3390/s100606149
- Farahmand, H., and S. Arabnejad. 2010. Developing a novel finite elastic approach in strain gradient theory for microstructures, *Int. J. Multiscale Comput. Eng.*, vol. 8, no. 4, pp. 441-446, 2010. doi:10.1615/Int.J.Multiscale.Comput.Eng. v8.i4.30
- Farahmand, H., 2021. A variational approach for analytical buckling solution of moderately thick microplate using strain gradient theory incorporating two-variable refined plate theory: a benchmark study. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 43(3), p.125.
- Farahmand, H., A. R. Ahmadi, and S. Arabnejad. 2011. Thermal buckling analysis of rectangular microplates using higher continuity p-version finite element method, *Thin-walled hstructures*, vol. 49, no. 12, pp. 1584-1591, 2011. doi:10.1016/j.tws.2011.05.001
- Ghadiri, M. 2017. On size-dependent thermal buckling and free vibration of circular FG Microplates in thermal environments, *Microsystem Technologies*, vol. 23, pp. 4989-5001, 2017. doi:10.1007/s00542-017-3597-5
- Ghorbani Shenass, A., and P. Malekzadeh. 2017. Thermal environmental effects on free vibration of functionally graded isosceles triangular microplates, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, vol. 24, no. 11, pp. 885-907, 2017. doi:10.1080/15376494.2016.1200882

- Huu-Tai, H. 2014. Quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded plates, *Acta Mechanica*, vol. 225, no. 3, pp. 951-964, 2014. [doi:10.1007/s00707-013-0898-3](https://doi.org/10.1007/s00707-013-0898-3)
- Huu-Tai, H., and P. Vo Thuc, 2012. A new sinusoidal shear deformation theory for bending, buckling, and vibration of functionally graded plates, *Applied Mathematical Modelling*, vol. 37, no. 5, pp. 3269 – 3281, 2013. [doi:10.1016/j.apm.2012.08.014](https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.08.014)
- Kianian, O., Sarrami-Foroushani, S., and M. Azhari. 2017. Buckling Analysis of Functionally Graded Plates Based on Two-Variable Refined Plate Theory Using the Bubble Finite Strip Method, *AUT Journal of Civil Engineering*, vol. 1, no. 2, pp. 145-152, 2017. [doi:10.22060/ajce.2017.11857.1006](https://doi.org/10.22060/ajce.2017.11857.1006)
- Kim, D., Zarei, M., Lee, S., Lee, H., Lee, G. and Lee, S.G., 2025. Wearable Standalone Sensing Systems for Smart Agriculture. *Advanced Science*, 12(16), p.2414748.
- Kamat, V., Burton, L., Venkadesh, V., Jayachandran, K. and Bhansali, S., 2023. Enabling smart agriculture through sensor-integrated microfluidic chip to monitor nutrient uptake in plants. *ECS Sensors Plus*, 2(4), p.043201.
- Lazopoulos, K. A.2009. On bending of strain elastic micro-plates,” *Mechanics Research Communications*, vol. 36, pp. 777-783, 2009. [doi:10.1016/j.mechrescom.2009.04.007](https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2009.04.007)
- Mindlin., R. D. and N. N. Eshel, 1968. “On first strain-gradient theories in linear elasticity,” *Int. J. Solids Struct.*, vol. 4, pp. 109–124, 1968. [doi:10.1016/0020-7683\(68\)90012-5](https://doi.org/10.1016/0020-7683(68)90012-5)
- Nguyen and J. Niiranen, 2021. Nonlocal continuum damage modeling for functionally graded plates of third-order shear deformation theory, *Thin-Walled Structures*, vol. 164, p. 107876, 2021. [doi:10.1016/j.tws.2021.107876](https://doi.org/10.1016/j.tws.2021.107876)
- Nuhu, A.A., and B. Safaei. 2023. “On the Advances of Computational Nonclassical Continuum Theories of Elasticity for Bending Analyses of Small-Sized Plate-Based Structures: A Review, *Archives of Computational Methods in Engineering*, pp. 1-71, 2023. [doi:10.1007/s11831-023-00738-0](https://doi.org/10.1007/s11831-023-00738-0)
- Papargyri-Beskou, S., and A. E. Giannakopoulos, and D. E. Beskos. 2010. Variational analysis of gradient elastic flexural plates under static loading, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 47, no. 20, pp. 2755-2766, 2010. [doi:10.1016/j.ijsolstr.2010.08.002](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.08.002)
- Reddy, J. N. 2006. Theory and analysis of elastic plates and shells, 2nd ed. Philadelphia: Taylor and Francis, 2006. [doi:10.1201/9780203488484](https://doi.org/10.1201/9780203488484)
- Shimpi, R. 2002. “Refined plate theory and its variants,” *AIAA J.*, vol. 40, no. 1, pp. 137–146, 2002. [doi:10.2514/2.1753](https://doi.org/10.2514/2.1753)
- Shimpi, R. P., and H. G. Patel, A two variable refined plate theory for orthotropic, *Journal of Composite Materials*, 2006. [doi:10.1177/0021998306060206](https://doi.org/10.1177/0021998306060206)
- Sayyad, A.S. 2019. Flexure of thick orthotropic plates by exponential shear deformation theory, *Latin American Journal of Solids and Structures*, 2019. [doi:10.1590/1679-78251603](https://doi.org/10.1590/1679-78251603)
- Thai , H.T., and D. H. Choi, 2013. A simple first-order shear deformation theory for laminated composite plates, *Composite Structures*, vol. 106, pp. 754-763, 2013. [doi:10.1016/j.compstruct.2013.06.021](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.06.021)
- Ventsel, E., T. Krauthammer, and E. J. A. M. R. Carrera. 2002. Thin plates and shells: theory, analysis, and applications, *Appl. Mech. Rev.*, vol. 55, no. 4, pp. B72-B73, 2002. [doi:10.1115/1.1484222](https://doi.org/10.1115/1.1484222)

- Vurro, F., Croci, M., Impollonia, G., Marchetti, E., Gracia-Romero, A., Bettelli, M., Araus, J.L., Amaducci, S. and Janni, M., 2023. Field plant monitoring from macro to micro scale: feasibility and validation of combined field monitoring approaches from remote to in vivo to cope with drought stress in tomato. *J, Plants*, 12(22), p.3851.
- Wang, B., Zhou, S., J. Zhao, and X. Chen, 2011. A size dependent Kirchhoff micro-plate model based on strain gradient elasticity theory, *European Journal of Mechanics A/Solids*, vol. 30, pp. 517-524, 2011. [doi:10.1016/j.euromechsol.2011.04.004](https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2011.04.004)
- Wang C. M., 2001. Relationships between bending solutions of Reissner and Mindlin plate theories, *Engineering Structures*, vol. 23, no. 7, pp. 838-849, 2001. [doi:10.1016/S0141-0296\(01\)00054-5](https://doi.org/10.1016/S0141-0296(01)00054-5)
- Wolfert, S. and Isakhanyan, G., 2022. Sustainable agriculture by the Internet of Things—A practitioner's approach to monitor sustainability progress. *Computers and Electronics in Agriculture*, 200, p.107226
- Zhang, B. 2015. A size-dependent third-order shear deformable plate model incorporating strain gradient effects for mechanical analysis of functionally graded circular/annular microplates, *Composites Part B: Engineering*, vol. 79, pp. 553-580, 2015. [doi:10.1016/j.compositesb.2015.05.007](https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2015.05.007)