



کارآیی روش بدون المان توسعه یافته جهت تحلیل پس کمانش میکرولوله‌های هدفمند حاوی سیال تحت میدان‌های دما و سرعت

بهروز آراین‌نژاد^{۱*}، امیر حشمت خدمتی بازکیایی^۲

۱. گروه مهندسی مکانیک، واحد اهواز، دانشگاه آزاد اسلامی، اهواز، ایران

۲. گروه مهندسی مکانیک، واحد سوسنگرد، دانشگاه آزاد اسلامی، سوسنگرد، ایران.

*نویسنده مسئول: behrooz_ariannezhad@iau.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱۱/۱۸ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۳/۲

چکیده:

میکرو/نانولوله‌ها هدفمند به دلیل هندسه و رفتار مکانیکی خاص کاربرد زیادی در سیستم‌های الکترومکانیکی دارند. در این تحقیق جهت یافتن معادلات حاکم بر تحلیل از تئوری غیرکلاسیک گرادیان کرنش مبتنی برمدل کلاسیک تیر اویلر برنولی با هندسه غیرخطی وون-کارمن استفاده می‌شود. در این تحلیل نحوه تاثیر تغییرات دما، قطر خارجی، سرعت بی بعد شده و قانون توانی بر رفتار غیرخطی میکرولوله نیز مورد مطالعه قرار گرفته است. با حل ضعیف معادلات دیفرانسیلی حاکم به روش درون یابی نقطه‌ای توسعه یافته، میدان جابجایی ناشی از کمانش میکرولوله هدفمند تحت میدان‌های سرعت و دما محاسبه گردیدند. یافته‌های تحقیق ضمن کارآیی استفاده از روش عددی یاد شده، بیان می‌دارند که کاهش قطر میکرولوله با فرکانس طبیعی و سرعت بحرانی نسبت عکس دارد. با تاثیر همزمان میدان‌های سرعت و تغییرات دما، محدوده قطر بحرانی خارجی بین ۱۲ تا ۱۵ میکرو متر و قطر خارجی بحرانی ۱۳ میکرو متر با دامنه بیشینه نوسان ۰/۰۱ تعیین گردید. این در حالی است که با این قطر بحرانی و افزایش دما، جابجایی عرضی میکرولوله هدفمند افزایش، سفتی آن کاهش یافته است. با افزایش اندیس توانی به ویژه در $n > 13$ ، مشاهده گردید که رفتار میکرولوله از جنس مواد خالص به میکرولوله‌ای از جنس مواد هدفمند نزدیکتر می‌شود.

کلمات کلیدی: کمانش، میکرولوله، مواد هدفمند، میدان‌های دما و سرعت سیال، روش بدون المان نقطه‌ای

مقدمه

نانو علم و نانو تکنولوژی رویکردی نسبتاً جدید جهت توصیف، کنترل، تولید و بهره‌برداری از خواص و تحلیل پدیده‌ها در مواد با ابعاد مولکولی و اتمی (نانو و میکرومتری) می‌باشد. از آنجا که رفتار مواد در مقیاس نانو با آنچه در ابعاد ماکرو وجود دارد متفاوت است، دانشمندان تئوری‌های مختلفی برای بررسی رفتار مواد در مقیاس نانو ارائه دادند. حسینی و همکاران [۱] در یک مطالعه مروری به بیان آخرین دستاوردهای پژوهشی در مورد خمش، کمانش و ارتعاش نانوصفحات، نانوتیرها، نانومیلها و نانولوله‌ها با استفاده از نظریه الاستیسیته غیرموضعی و نظریه گرادیان کرنش غیرموضعی پرداختند. ایچیکاوا [۲] به مزایای استفاده از مواد هدفمند در مقایسه با مواد مرکب و به کارگیری نانو ذرات در تولید این مواد اشاره نمودند. چرا که این مواد به دلیل تغییر تدریجی خواص، با چالش عدم هماهنگی بین ساختار زمینه و الیاف در مواد مرکب مواجه نیستند. جهت مطالعه و بررسی رفتارهای مکانیکی نانو مواد، علاوه بر روش‌های آزمایشگاهی از روش‌هایی نظیر مدل‌سازی اتمی-مولکولی، مدل‌سازی ترکیبی هم استفاده می‌شود. ارش و وانگ [۳] در پژوهش خود به بررسی کاربرد تئوری‌های غیر محلی در مدل‌سازی نانو لوله‌های کربنی پرداختند. آنها نشان دادند که استفاده از مدل‌سازی و مطالعه رفتار نانو ساختارها، تئوری‌های غیرکلاسیک توسعه یافته‌ای



نظیر؛ تئوری تنش کوپل^۱، تئوری گرادیان کرنش^۲، تئوری اثر سطح^۳ و تئوری غیر موضعی^۴ می‌تواند مشکلات هزینه و عدم کنترل مواد در مقیاس نانو حین تحلیل‌های تجربی را مرتفع سازند. ردی و کیم [۴] با تئوری تنش کوپل اصلاح شده به تحلیل ورق‌های ساخته شده از ماده مدرج تابعی و مقایسه آن با تئوری تغییر شکل مرتبه سوم برشی پرداختند. نتیجه مطالعه آنها از دقیق‌تر بودن نتایج تئوری غیر کلاسیک به کار گرفته شده حکایت دارد. سیمسک و همکاران [۵] خمش استاتیکی تیر تیموشنکو را با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده مورد تحلیل قرار دادند. در این تحقیق بیان نمودند که خیز محاسبه شده توسط تئوری کلاسیک، همواره بزرگتر از مقادیر محاسبه شده توسط تنش کوپل اصلاح شده است. ژیان لی و همکاران [۶] شکل بسته معادلات خمش استاتیکی و ارتعاشات آزاد یک میکروصفحه مستطیلی و قطاعی از ماده هدفمند با تکیه‌گاه ساده را ارایه کردند. نتایج آنها نشان می‌دهد که بکارگیری پارامتر طول در تئوری تنش کوپل در مقایسه با تئوری کلاسیک تنش، منجر به کاهش انعطاف‌پذیری میکروصفحه می‌شود. لذا این امر خیز ورق را کاهش و بسامد طبیعی در آن را افزایش می‌دهد. یکی از مهم‌ترین دلایل این اختلاف در محاسبات، به تفاوت اصلی بین نظریه کلاسیک و نظریه غیرمحملی در تعریف تنش مربوطه می‌شود. نظریه‌های کلاسیک مکانیک محیط‌های پیوسته عمدتاً مبتنی بر روابط ساختاری هاپرالاستیک استوار بوده و در آنها فرض می‌کنند تنش در هر نقطه به صورت تابعی از کرنش‌های همان نقطه است. ارینگن و ادلن [۷-۹] نظریه غیر محلی را مطرح نمودند. آنها ثابت نمودند که تنش در هر نقطه نه تنها تابع میدان کرنش آن نقطه است بلکه تابع کرنش تمام نقاط پیرامون و محیط پیوسته است. وانگ و همکاران [۱۰] به بررسی اثرات سطحی بر روی ارتعاشات عرضی و کمانش محوری نانو تیرهای مضاعف بر اساس مدل بهبود یافته تیر اویلر-برنولی پرداختند. آنها در سه حالت تغییر شکل رایج، فرکانس طبیعی و بار محوری بحرانی با در نظر گرفتن الاستیسیته سطحی و تنش باقی مانده سطح را محاسبه کردند. آنها بیان داشتند که اثرات سطحی هنگامی که اندازه مقطع تیرها به نانومتر می‌رسد، بسیار اهمیت دارد و فرکانس طبیعی و بار بحرانی را افزایش می‌دهند. وانگ [۱۱] به ارایه مدل غیر محلی اصلاح شده برای شناسایی تاثیر پارامتر غیرمحملی بر فرکانس‌های طبیعی و سرعت‌های جریان بحرانی پرداخت. او از طریق شبیه‌سازی عددی ارتعاش و پایداری نانو لوله‌های حاوی جریان دریافت که با لحاظ کردن این پارامترها، فرکانس‌های طبیعی بالاتر و سرعت‌های جریان بحرانی بالاتری را در مقایسه با نتایج به دست آمده از مدل‌های کلاسیک و غیرمحملی یافت می‌شود. محمود و همکاران [۱۲] به مطالعه اثرات وابسته خواص سطحی و الاستیسیته غیرمحملی بر انحراف استاتیک نانو تیرها پرداختند. آنها از تئوری الاستیسیته سطحی برای توصیف رفتار لایه سطحی و تئوری تیر اویلر-برنولی برای تعیین تغییر شکل تیر استفاده نمودند. جهت تحلیل از روش المان محدود استفاده کرده‌اند. سان و همکاران [۱۳] از مدل تیر اویلر-برنولی برای بررسی رفتار کمانش نانو لوله‌های کربنی تحت فشار محوری استفاده کردند. آنها ثابت نمودند که اثر اندازه و سطح در مقیاس کوچک دو ویژگی ذاتی و اجتناب‌ناپذیر در نانوساختارها هستند که هر دو باید در تئوری غیرمحملی در نظر گرفته شوند. آنها بیان صریحی از راه حل‌ها جهت یافتن بارهای بحرانی کمانش مطابق با شرایط مرزی معمول پرداختند. کومار و همکاران [۱۴] کمانش نانولوله کربنی تحت شرایط مرزی مختلف را با تئوری تیر اویلر-برنولی مدل‌سازی نمودند و نتایج خود را بر اساس روش انرژی در تئوری‌های الاستیسیته غیرمحملی و غیرمحملی اصلاح شده ارایه نمودند. آنها یافته‌های خود را با نتایج به دست آمده از روش دینامیک مولکولی مقایسه نمودند. بررسی آنها نشان داد که برای مقادیر بسیار کوچک پارامتر غیرمحملی، نتایج تئوری الاستیسیته غیرمحملی و تئوری الاستیسیته غیرمحملی اصلاح شده بر هم منطبق هستند. اما با افزایش پارامترهای غیرمحملی نتایج این دو نظریه از هم فاصله می‌گیرد. وانگ و همکاران [۱۵ و ۱۶] اثرات سطح بر روی کمانش محوری و ارتعاشات جانبی نانو میله‌ها را مورد بررسی قرار دادند. آنها اثرات الاستیسیته سطح و تنش باقیمانده سطحی را با روابط تیر تیموشنکو ترکیب کردند تا معادلات حاکم بر کمانش یا ارتعاش نانو میله را به دست آورند. آنها دریافتند که در نظر گرفتن اثرات سطحی برای موادی با ثابت‌های سطح مثبت، باعث افزایش نیروی کمانش بحرانی و فرکانس‌های طبیعی می‌شود. این موضوع برای

¹ Couple Stress² Strain Gradient³ Surface effect⁴ Nonlocal



نانومیله‌های با سطح مقطع دایره‌ای و با نسبت طول به قطر بزرگ خود را بیشتر نشان می‌دهد. لیو و همکاران [۱۷] یک مدل اجزا محدود برای بررسی اثرات انرژی سطحی و بار بحرانی کمانش بر روی نانوتیرها ارائه کردند. آنها با استفاده از نظریه سطح گورتین-مرداک و مدل‌سازی تیرهای نازک و ضخیم، فرکانس‌های طبیعی را به‌دست آورده و نتایج خود را با روش‌های تجربی مقایسه و صحت‌سنجی کردند و بیان نمودند روش اجزا محدود به عنوان ابزاری کارآمد برای تحلیل، طراحی و پیش‌بینی پاسخ مکانیکی عناصر تیر موجود در سیستم‌های نانو الکترومکانیکی و دیگر دستگاه‌های نانو مقیاس عمل می‌کند. صحت یافته‌های خود را از طریق مقایسه با نتایج دینامیک مولکولی، انجام دادند. لیم و همکاران [۱۸] و همچنین یانگ و همکاران [۱۹] کمانش حرارتی نانومیله را بر اساس تئوری غیرمحلی اصلاح شده مورد بررسی قرار دادند. آنها معادلات دیفرانسیل جدیدی با مرتبه بالاتر برای کمانش نانومیله با شرایط مرزی در هر دو جهت عرضی و محوری ارائه نمودند. این معادلات مبتنی بر تئوری غیرمحلی و اصل حساب تغییرات به‌دست آمده و اثرات مقیاس نانو و تغییر دما بر نیروی بحرانی بررسی می‌کردند. آنها نشان دادند که بار بحرانی کمانش نانو ساختارها با افزایش تغییرات دما در حد دمای محیط و کمی بالاتر افزایش می‌یابد. این در حالی است که در دمای بالا نیروی بحرانی کاهش می‌یابد. موسوی و همکاران [۲۰] نظریه جدید الاستیسیته غیرمحلی اصلاح شده کامل را معرفی نمودند. آنها بر اساس معادلات ساختاری غیرمحلی اصلاح شده پیشین و با استفاده از اصل همپلتون، خمش و کمانش نانوصفحات مستطیلی را بررسی کردند. مطالعات آنها نشان داد، بازآرایی سری ظاهر شده در روابط منجر به کاهش خطا در معادلات ساختاری اصلاح شده می‌شود. در این پژوهش برای مطالعه رفتار پس از کمانش میکرو لوله‌های هدمند حاوی جریان سیال تحت میدان‌های سرعت از تئوری غیرکلاسیک گرادیان کرنش و حل معادلات استاتیکی حاکم با روش بدون المان درون یابی نقطه‌ای استفاده خواهد شد. از طرفی با توجه به بکارگیری میکرولوله‌ها در سیستم‌های میکرو سیالی در شرایط مختلف محیطی، به شکل همزمان نقش دما نیز به عنوان یکی از پارامترهای تأثیرگذار در طراحی و رفتار میکرو/لوله‌ها بررسی می‌گردد. شایان ذکر است بکارگیری تئوری بیان شده، جنس و سایز لوله، روش حل و تأثیر همزمان میدان‌های سرعت و دما از جنبه‌های نوآوری تحقیق حاضر بشمار می‌رود.

تئوری تحقیق

تئوری‌های کلاسیک مکانیک محیط‌های پیوسته، توان تحلیل در ابعاد ماکرو برای مواد را دارا هستند. لذا تحلیل و مطالعه رفتارهای مکانیکی میکرو و نانو مواد با استفاده از تئوری‌های کلاسیک رایج در مکانیک شکست و خستگی امکان‌پذیر نیست. زیرا در این تئوری‌ها، اثرات اندازه در مدل‌سازی‌های ساختاری و سازه‌ها در مقیاس میکرو و نانو لحاظ نشده است. ضمن اینکه نتایج چنین رهیافتی از تقارب مطلوب با مدل‌سازی‌های تجربی، مولکولی یا ترکیبی برخوردار نخواهد بود. تحلیل‌های تجربی و ترکیبی بسیار هزینه‌بر هستند. لذا استفاده از روش‌های تحلیلی غیرکلاسیک رایج‌تر است. تئوری غیر موضعی اربینگن، تئوری‌های تنش کوپل و تنش کوپل اصلاح شده هر کدام با دارا بودن یک یا دو ثابت طولی، اثرات اندازه را در پیش‌بینی میدان جابجایی در محاسبه نتایج و تخمین مقادیر کرنش و تنش در خود دارا هستند. مطابق جدول (۱) تئوری گرادیان کرنشی با سه پارامتر مستقل طولی (گرادیان تأخیر، گرادیان انحراف طولی و گرادیان چرخش)، علاوه بر محاسبه جابجایی می‌تواند به یافتن چرخش‌ها حول محورها نیز بپردازد. البته به دلیل استفاده از مشتقات مرتبه بالا معادلات دیفرانسیل پیچیدگی خاص خود را داشته و نیازمند شرایط مرزی بیشتری جهت حل هستند.

تئوری گرادیان کرنشی فرم عمومی‌تر تئوری تنش کوپل است. بر اساس تئوری گرادیان کرنش، چگالی انرژی جنبشی تابعی از، تانسور کرنش متقارن^۱، بردار گرادیان تأخیر^۲، تانسور گرادیان انحراف اتساع و تانسور گرادیان چرخش متقارن است. در این تئوری، انرژی کرنشی برای مواد ایزوتروپیک الاستیک خطی بر روی دامنه تحلیلی نظیر Ω با در نظر گرفتن تغییر شکل‌های کوچک به صورت رابطه (۱) تعریف می‌شود [۲۲ و ۲۳]:

¹ Symmetric Strain Tensor

² Dilation Gradient Vector



جدول ۱: مقایسه کلی تئوری‌های مورد استفاده در تحلیل میکرو / نانو سازه‌ها

تئوری مورد استفاده در تحلیل میکرو/ نانو سازه‌ها	مزایا	معایب
تئوری‌های کلاسیک در مکانیک شکست و خستگی مبتنی بر مکانیک محیط‌های پیوسته	قابل استفاده در تحلیل سازه در مقیاس معمولی و ماکرو	عدم در نظر گرفتن تاثیر سایز، عدم تطبیق یافته‌ها با نتایج تجربی و ترکیبی در مقیاس مولکولی، وابستگی مقدار تنش در هر نقطه به مقدار کرنش در آن نقطه
تئوری غیرکلاسیک تنش کوپل	قابل استفاده در مقیاس میکرو و نانو با یک یا دو پارامتر طولی جهت تخمین میدان جابجایی، کم هزینه بودن نسبت به تحلیل‌های تجربی، تخمین تنش و کرنش در یک نقطه با مقادیر تنش و کرنش در تمامی نقاط پیرامون آن نقطه، در نظر گرفتن نیروی واندروالسی، سازگاری با اصول مکانیک محیط پیوسته	عدم پیش‌بینی و دقت لازم جهت تخمین میدان جابجایی و چرخش‌ها به شکل هم زمان، نیازمند تعیین پارامتر طول به کمک داده‌های تجربی، مشکل محاسبه تغییر شکل‌های بزرگ و رفتارهای غیرخطی، عدم مدل‌سازی مطلوب اثرات سطحی
تئوری غیر کلاسیک گرادیان کرنشی	قابل استفاده در تحلیل‌های خطی و غیرخطی با سه پارامتر طولی جهت تخمین میدان‌های جابجایی و چرخش همزمان، کم هزینه بودن نسبت به تحلیل‌های تجربی، تخمین تنش و کرنش با مقادیر تنش و کرنش در تمام نقاط با معادلات دیفرانسیلی غیرخطی با مشتقات مرتبه بالا	پیچیدگی فرمول بندی و حل عددی به دلیل وجود مشتقات مرتبه بالا در معادلات حاکم، نیاز به شروط مرزی اضافه برای حل، نبود داده‌های دقیق تجربی به دلیل پر هزینه بودن تحلیل‌های تجربی

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + p_i \gamma_i + \tau_{ijk}^{(1)} \eta_{ijk}^{(1)} + m_{ij} \chi_{ij}) dv \quad (1)$$

که در آن ε_{ij} تانسور کرنش وون کارمن، γ_i بردار گرادیان تأخیر، $\eta_{ijk}^{(1)}$ تانسور انحراف اتساع (طولی) و χ_{ij} تانسور گرادیان چرخش مقارن بوده و به ترتیب عبارتند از:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) + \frac{1}{2} (\partial_i u_m \partial_j u_m)$$

$$\gamma_i = \partial_i \varepsilon_{mm}$$

$$\eta_{ijk}^{(1)} = \frac{1}{3} (\partial_i \varepsilon_{jk} + \partial_j \varepsilon_{ki} + \partial_k \varepsilon_{ij}) - \frac{1}{15} [\delta_{ij} (\partial_k \varepsilon_{mm} + 2 \partial_m \varepsilon_{mk}) + \delta_{jk} (\partial_i \varepsilon_{mm} + 2 \partial_m \varepsilon_{mi}) + \delta_{ki} (\partial_j \varepsilon_{mm} + 2 \partial_m \varepsilon_{mj})] \quad (2)$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2} (e_{ipq} \partial_p \varepsilon_{qj} + e_{jpq} \partial_p \varepsilon_{qi})$$

در رابطه (۱)، σ_{ij} تانسور کلاسیک تنش است، که در واقع همان کار مزدوج تانسور کرنش ε_{ij} محسوب می‌شود. تنش‌های مرتبه بالای p_i ، $\tau_{ijk}^{(1)}$ و m_{ij} نیز به ترتیب، کارهای مزدوج γ_i ، $\eta_{ijk}^{(1)}$ و χ_{ij} بوده که عبارتند از:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{mm} + 2G \varepsilon_{ij}$$

$$p_i = 2l_0^2 G \gamma_i$$

$$\tau_{ijk}^{(1)} = 2l_1^2 G \eta_{ijk}^{(1)}$$

$$m_{ij} = 2l_2^2 G \chi_{ij}$$

(۳)



در رابطه (۳)، λ و G ثوابت کلاسیک تئوری الاستیسیته و l_0 ، l_1 و l_2 پارامترهای مستقل طولی بوده که به ترتیب مربوط به بردار گرادیان تاخیر، تانسور گرادیان انحراف طولی و تانسور گرادیان چرخش متقارن می‌باشند. در این پژوهش جهت مطالعه رفتار کمانش میکرو لوله حاوی جریان از روش انرژی و اصل همپلتون استفاده خواهد شد. لذا ابتدا انرژی سیستم (انرژی کرنشی و انرژی جنبشی) محاسبه می‌گردند. سپس به کمک اصل همپلتون و صفر در نظر گرفتن تغییرات انرژی کل سیستم، معادلات حاکم بر میکرولوله یافت می‌شوند. در مسائل پایداری که تحلیل از نوع استاتیکی است، از انرژی جنبشی سازه صرف‌نظر می‌گردد. تحت چنین شرایطی تنها مولفه انرژی جنبشی موجود که در مدل‌سازی برای میکرو لوله، انرژی جنبشی مربوط به ورود سیال بوده که عبارت است از [۲۶]:

$$T = \frac{m_f}{2} \int_0^L \left[\left(V \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + V^2 \right] dx \quad (4)$$

که در آن m_f ، جرم سیال بر واحد طول میکرو لوله و V سرعت متوسط سیال جاری درون میکرو لوله است. می‌توان اثر تغییر دما را با استفاده از اصول ترموالاستیک، به صورت یک نیروی خارجی بر میکرو لوله نشان داد. لذا این نیرو که به بار حرارتی موسوم است عبارت است از:

$$W_{ext} = \frac{EA}{2(1-2\nu)} \alpha_{th} \Delta T \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (5)$$

در رابطه (۵)، E مدول الاستیسیته، ν ضریب پواسون، α_{th} ضریب انبساط طولی و ΔT تغییر دمای میکرو لوله هستند. انرژی کل سیستم نیز برابر است با:

$$\Sigma e = T + W_{ext} - U \quad (6)$$

بر اساس اصل همپلتون، تغییرات انرژی کل در یک سیستم صفر است لذا:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T + W_{ext} - U) dt = 0 \quad (7)$$

اکنون با جایگذاری روابط (۱)، (۴) و (۵) در رابطه (۷) و استفاده از حساب تغییرات و انتگرال‌گیری جزء به جزء می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[N_0 + EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) - GA \left(2l_0^2 + \frac{4}{5} l_1^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \right] \frac{\partial w}{\partial x} \right\} + S \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - K \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} \\ + m_f V^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2m_f V \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + (m_p + m_f) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

نیروی محوری $\tilde{N}$ باعث جابجایی عرضی ذرات صفحه میانی در میکرو لوله نسبت به حالت اولیه در میکرو لوله حاوی جریان با سرعت بحرانی می‌شود. علاوه بر آن معادلات دیفرانسیل را غیرخطی می‌کند [۲۵ و ۲۶]. تحت چنین شرایطی فرم بی‌بعد و غیرکلاسیک معادله دیفرانسیل حاکم بر میکرو لوله در صفحه میانی را می‌توان به صورت زیر ارایه نمود:

$$(1 + \lambda) \frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} - \kappa \frac{\partial^6 \eta}{\partial \xi^6} - \chi \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \int_0^1 \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)^2 d\xi - \tilde{N}_{th} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} + \mu^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} = 0 \quad (9)$$

که در آن پارامترهای بی‌بعد عبارتند از [۲۲-۲۴]:



$$\begin{aligned}\xi &= \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{w}{L}, \quad \lambda = \frac{8(2r_0^2 + 8r_1^2/15 + 1)}{(1+\nu)(1+\alpha^2)\gamma^2} \\ \kappa &= \frac{r_0^2 + 2r_1^2/5}{(1+\nu)\psi^2}, \quad \chi = \frac{4l^2}{(1+\alpha^2)D^2} \\ \tilde{N}_{th} &= \frac{\bar{N}_{th}L^2}{EA}, \quad \mu = \left[\frac{m_f}{EI}\right]^{1/2} LV \\ r_0 &= \frac{l_0}{l_2}, \quad r_1 = \frac{l_1}{l_2}, \quad \gamma = \frac{D}{l_2}, \quad \psi = \frac{L}{l_2}\end{aligned}\quad (10)$$

معادله (۹) یک معادله دیفرانسیل انتگرالی غیرخطی بر حسب زمان و مکان است. می‌توان با استفاده از روش گالرکین آن را به یک معادله دیفرانسیل غیرخطی بر حسب زمان تبدیل نمود. برای این منظور ابتدا فرض می‌شود جابجایی عرضی میکرو لوله برابر است با:

$$\begin{aligned}w(\xi, \varphi) &= \psi(\xi)\zeta(\varphi) \\ &= \sin(\pi\xi)\zeta(\varphi)\end{aligned}\quad (11)$$

در رابطه (۱۱)، $\psi(\xi)$ مود اول کمانش میکرولوله و $\zeta(\varphi)$ جابجایی میکرولوله پس از کمانش معرفی می‌گردند. توجه دارید که انتخاب این توابع تک متغیره به نحوی صورت می‌گیرد که ارضا کننده شرایط مرزی میکرولوله (دو سر تکیه‌گاه ثابت) نیز باشند. برای شروع آسیب و طراحی، رسیدن به مود اول کافی است. چرا که وقتی شرایط بارگذاری و مرزی به نحوی پیش روند که سازه دچار ناپایداری (خیز و کمانش) شود، دیگر ضرورتی برای محاسبه شکل مودهای دیگر وجود ندارد. به عبارت بهتر همان رسیدن به مود اول باعث رخداد حادثه و تغییر شکل میکرو / نانو لوله و آسیب به سیستم خواهد شد. به همین منظور جهت رسیدن به حل معادله دیفرانسیلی-انتگرالی حاکم استفاده از تابعی سینوسی در تعریف شکل مود اول برای تقریب جواب استفاده می‌شود. با جایگذاری رابطه (۱۱) در رابطه (۹) و انتگرال‌گیری روی دامنه میکرو لوله، معادله دیفرانسیل حاصله به یک معادله دیفرانسیلی غیرخطی شبهه دافین منجر خواهد شد. با حل این معادله میزان جابجایی میکرو لوله حاوی جریان تحت میدان سرعت و دما، محاسبه می‌گردد. با صفر در نظر گرفتن جابجایی عرضی پیش از کمانش نیز، می‌توان به رابطه‌ای صریح برای سرعت بحرانی میکرولوله V_{cr} رسید. برای اعمال روش بدون المان درون یابی نقطه‌ای باید معادلات دیفرانسیل انتگرالی یافت شده برای کلیه نقاط گره‌ای توزیع شده در دامنه تحلیل (نقاط صفحه میانی میکرو لوله) نوشته و حل شوند. جهت انجام محاسبات، میکرو لوله هدفمند از جنس آلومینیوم و اپوکسی پلیمر با خواص زیر در نظر گرفته می‌شود (فرض بر این است که لایه‌های داخلی و خارجی به ترتیب غنی از آلومینیوم و اپوکسی پلیمر است و از وجود نیروی اولیه در میکرولوله صرف‌نظر می‌شود $(N_0 = 0)$)

$$\begin{aligned}E_{Al} &= 70\text{GPa}, \quad \nu_{Al} = 0.23, \quad \rho_{Al} = 2700\text{ kg/m}^3 \\ E_{epoxy} &= 1.44\text{GPa}, \quad \nu_{epoxy} = 0.38, \quad \rho_{epoxy} = 1220\text{ kg/m}^3\end{aligned}$$

برای بررسی رفتار کمانش میکرو لوله‌های هدفمند، نیاز به معادلات حاکم از نوع دیفرانسیلی-انتگرالی غیرخطی در حالت استاتیکی است. بنابراین با صرف‌نظر کردن از جمله‌های وابسته به زمان می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}S \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} - K \frac{\partial^6 \eta}{\partial x^6} - N \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + m_f V^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} &= 0 \\ N &= N_0 + \frac{EA}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial \eta \zeta}{\partial x} \right)^2 dx\end{aligned}\quad (12)$$



جابجایی عرضی میکرو لوله با توجه به مود اول کمانش و شرایط مرزی میکرو لوله که دو سر تکیه‌گاه ساده هستند، به صورت رابطه (۱۳) خواهد بود:

$$\eta(\xi) = \zeta \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (13)$$

سرعت بحرانی میکرولوله هدفمند نیز برابر است با [۲۴]:

$$V_{cr} = \sqrt{\frac{S \frac{\pi^2}{L^2} + K \frac{\pi^4}{L^4}}{m_f}} \quad (14)$$

اعمال روش بدون المان درون‌یابی نقطه‌ای بردارانه تحلیل

روش عددی بدون المان درون‌یابی نقطه‌ای را می‌توان برای حل انتگرالی معادلات دیفرانسیل حاکم بر تحلیل مسایل مکانیک بکار گرفت. در این روش عددی، تابع تقریب مورد استفاده برای میدان‌های جابجایی، تنش و کرنش مطابق رابطه (۱۵) است. در این تحقیق جهت دستیابی به پاسخ‌های دقیق‌تر با اضافه کردن تابع پایه چند ربعی، این روش توسعه داده می‌شود [۲۷].

$$u^h(X) = \sum_{j=1}^m P_j(X) b_j + \sum_{i=1}^n R_i(X) a_i \quad (15)$$

در این رابطه، $P_j(X)$ تابع پایه چند جمله‌ای مبتنی بر هرم خیام-پاسکال و $R_i(X)$ تابع پایه چند ربعی می‌باشند. m و n تعداد جملات توابع پایه چند جمله‌ای و چند ربعی، b_j و a_i ضرایب مجهول توابع پایه هستند. این ضرایب بر مبنای تعداد نقاط گره‌ای توزیع شده در دامنه پشتیبان و با حل دستگاه $m+n$ معادله با همان تعداد مجهول بدست می‌آیند. می‌توان این توابع را به صورت رابطه (۱۶) بیان نمود:

$$P^T(X) = [1 \ x \ y \ z], \quad R_i(x, y, z) = (r_i^2 + (\alpha_c d_c)^2)^{q_i} \quad (16)$$

در این رابطه، α_c و q دو پارامتر شکل مثبت فرض شده که توسط تحلیلگر با مقدار بهینه یا استاندارد تعیین می‌گردند. d_c بعد دامنه پشتیبان و r_i فاصله شعاعی بین نقطه مورد بررسی تا نقطه گره‌ای در مختصات دکارتی می‌باشند. با یافت شدن ضرایب مجهول، توابع شکل جهت تقریب میدان جابجایی برابرند با:

$$\phi(X)_{(1 \times n)} = \{R^T \ P^T\} G^{-1} \quad (17)$$

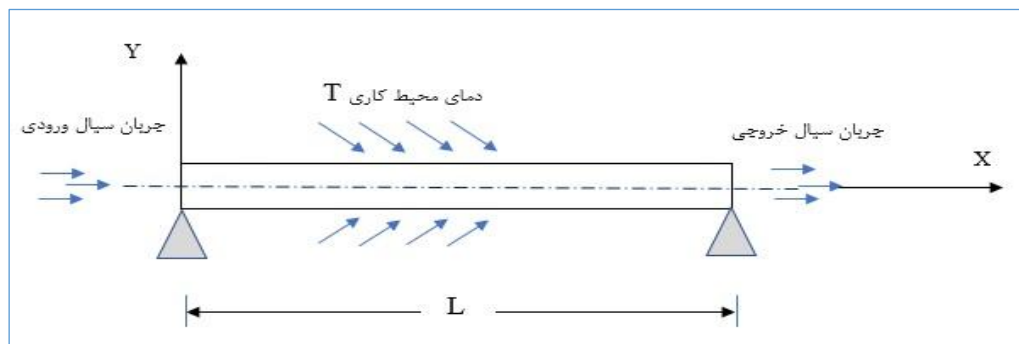
توابع شکل محاسبه شده در رابطه (۱۷)، همه مثبت و یکنوا هستند. این توابع شکل خواص تابع دلتای درایک را دارا بوده و مجموع آنها برابر واحد است. در این رابطه G ماتریس درون‌یاب کلی نامیده می‌شود. میدان جابجایی نقاط مختلف دامنه تحلیل بر حسب توابع شکل درون‌یاب تعریف شده با رابطه (۱۸) تقریب زده می‌شود:

$$u(X, t) = \begin{Bmatrix} u(X, t) \\ v(X, t) \\ w(X, t) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \phi_i(X) & 0 & 0 \\ 0 & \phi_i(X) & 0 \\ 0 & 0 & \phi_i(X) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i(t) \\ v_i(t) \\ w_i(t) \end{Bmatrix} = \phi(X) u(t) \quad (18)$$

مطابق شکل (۱) جهت مدل‌سازی میکرولوله روی دو تکیه‌گاه ساده قرارداد می‌شود. این میکرو لوله به طول L با سطح مقطع A ، قطر خارجی و داخلی d , D و جرم واحد طول m_p با چگالی ρ_p است. سیال درون آن دارای چگالی سیال ρ_f



بوده و سرعت آن V فرض می‌شود. جریان درون میکرولوله غیرقابل تراکم با سرعت ثابت در نظر گرفته شده و محور x منطبق بر محور مرکزی لوله است.



شکل ۱: میکرولوله حاوی جریان بر روی دو تکیه‌گاه ساده

بر اساس تئوری کلاسیک تیر اویلر-برنولی میدان جابجایی به صورت رابطه (۱۹) بیان می‌شود [۲۱]:

$$u_1 = u(x, t) - z \psi(x, t), \quad u_2 = 0, \quad u_3 = w(x, t) \quad (19)$$

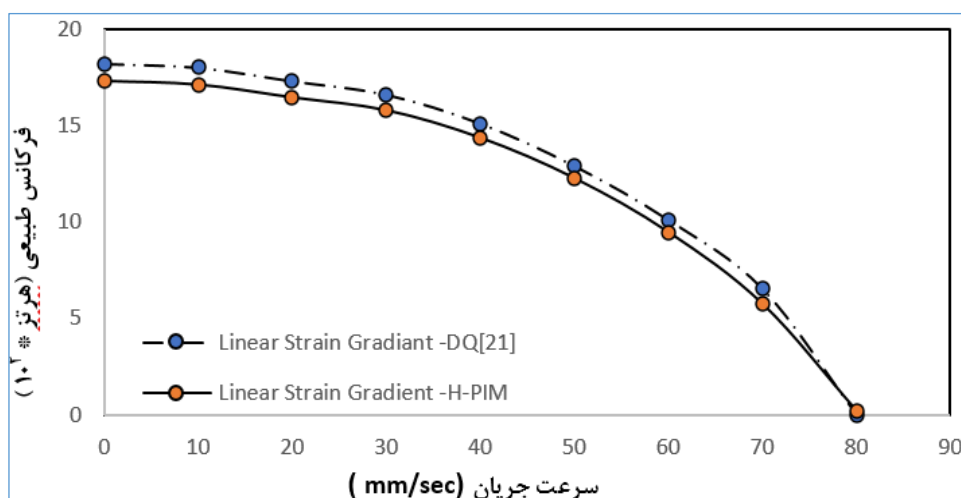
در این رابطه، u_1 و u_2 و u_3 مولفه‌های بردار جابجایی در جهات z و y و x بوده و $\psi(x, t)$ زاویه چرخش است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\psi(x, t) = \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \quad (20)$$

توجه دارید که معادلات انتگرالی حاصل از تعمیم معادله (۹) برای یافتن میدان جابجایی در هر نقطه گره‌ای، با استفاده از روش تربیعی گاوسی توسط روش درون یابی نقطه‌ای حل می‌گردند. برای این کار، ابتدا دامنه محلی در یک محدوده تربیعی از مختصات دکارتی به مختصات قطبی تبدیل می‌شود. سپس این محدوده به فضای استاندارد تربیعی گاوسی نگاشته می‌گردد. آنگاه با برهم گذاری ماتریس‌های سختی، جرم، نیرو ماتریس‌های کلی محاسبه می‌شوند. در نهایت مقادیر جابجایی و سایر پارامترهای مورد نیاز برای تحلیل کمانش یافت می‌گردند.

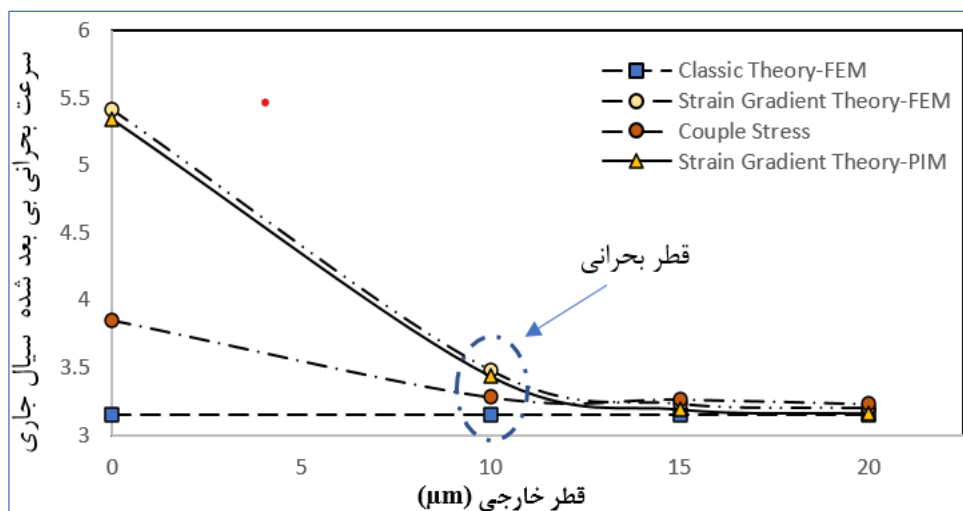
یافته‌ها:

میکرولوله‌ای که جهت محاسبات عددی و صحت مدل‌سازی استفاده می‌شود، از جنس آلومینیوم با مدول الاستیسیته ۸۰ گیگاپاسکال، نسبت پواسون ۰/۲۳ و چگالی ۲۷۰۰ کیلوگرم بر متر مکعب در نظر گرفته شده است [۲۱]. همچنین چگالی سیال جاری غیرقابل تراکم با سرعت ثابت در میکرولوله برابر با ۱۲۰۰ کیلوگرم بر متر مکعب است. اگر میکرولوله‌ای از جنس آلومینیوم اپوکسی پلیمر با خواص ذکر شده قبلی باشد، آنگاه $l_0 = l_1 = l_2 = l$ مقدار $17/6 \mu m$ و اگر میکرولوله‌ای از جنس آلومینیوم خالص در نظر گرفته شود $l = 1/5 \mu m$ است [۲۲]. برای صحت سنجی مدل‌سازی انجام شده در تحلیل عددی، ابتدا فرکانس‌های طبیعی خطی برای میکرولوله‌ای از جنس فلز (آلومینیوم خالص) بر حسب سرعت جریان از دو روش دیفرانسیل کوادراچر [۲۱] و روش بدون المان درون یابی نقطه‌ای توسعه یافته، مبتنی بر تئوری گرادیان کرنش مقایسه می‌گردند. نمودارهای ارائه شده در شکل (۳)، از انطباق خوب نتایج روش عددی و مدل‌سازی مطلوب حکایت دارند. همانگونه که واقف هستید، سرعتی از سیال جاری، که در آن میکرولوله ناپایدار شده و کمانش در آن آغاز می‌گردد، سرعت بحرانی نامیده می‌شود.



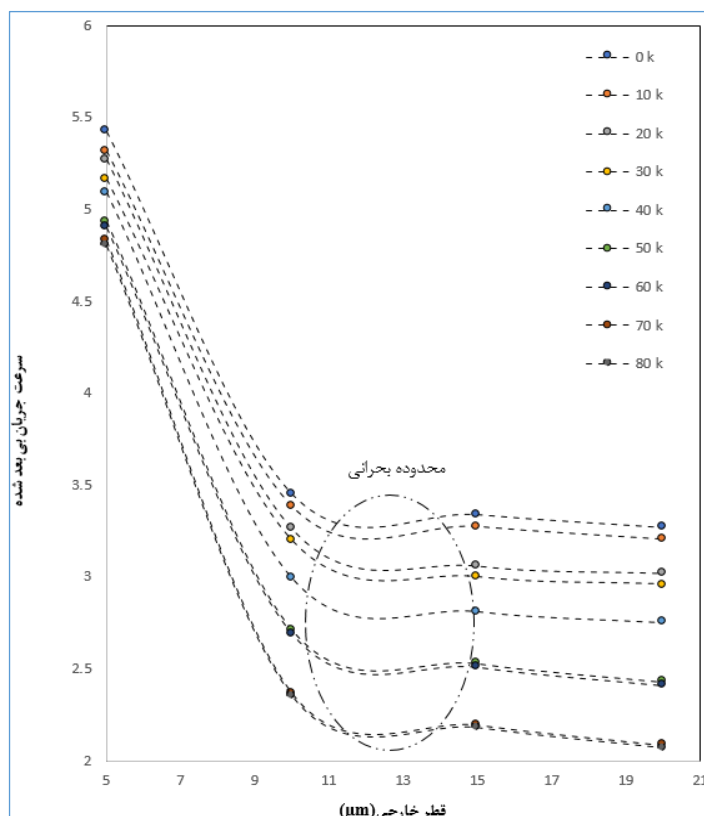
شکل ۳: مقایسه فرکانس طبیعی خطی میکرولوله از جنس آلومینیوم بر حسب سرعت جریان

در نمودارهای شکل (۴) تاثیر اندازه قطر خارجی میکرو لوله بر سرعت بحرانی سیال جاری در آن بر حسب تئوری‌های مختلف تحلیل تنش ارایه شدند.

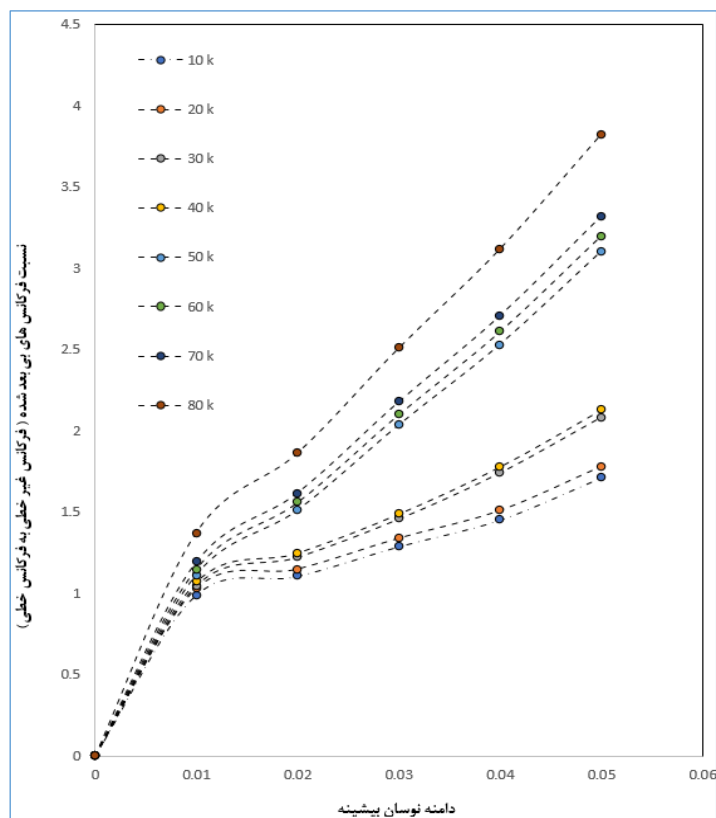


شکل ۴: نمودار تغییرات سرعت بحرانی بی بعد شده بر حسب تغییرات قطر خارجی میکرولوله هدفمند

نتایج حاصل از مقایسه نتایج تئوری‌های مختلف نشان می‌دهند که با کاهش قطر خارجی میکرو لوله هدفمند، سرعت بحرانی افزایش می‌یابد. این در حالی است که تئوری کلاسیک مکانیک محیط‌های پیوسته در تخمین درست سرعت بحرانی میکرو لوله حاوی جریان ناتوان است (شکل ۴). برای مطالعه تاثیر دما بر نحوه تغییرات سرعت بحرانی بی‌بعد شده بر حسب تغییر قطر خارجی میکرولوله هدفمند، نمودارهای شکل (۵) ترسیم شده‌اند. لازم به ذکر است تئوری بکار گرفته شده جهت انجام محاسبات و اعمال روش عددی انتخابی، تئوری غیر خطی گرادیان کرنشی است. می‌توان در نمودارهای شکل (۵) مشاهده نمود که با کاهش قطر میکرولوله هدفمند، تاثیر دما بر سرعت بحرانی کاهش یافته به نحوی که در قطرهای خیلی کوچک می‌توان از اثر دما صرف نظر کرد. ولیکن به طور کلی می‌توان گفت دما با سرعت بحرانی نسبت عکس دارد. به منظور بررسی تاثیر دما بر نسبت فرکانس های بی‌بعد شده (نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی) بر حسب بیشینه دامنه نوسان در میکرو لوله هدفمند با قطر خارجی بحرانی ۱۳ μm، نمودارهای شکل (۶) ترسیم شده‌اند.



شکل ۵: تغییرات سرعت بحرانی بی‌بعد شده بر حسب قطر خارجی میکرولوله هدفمند با در نظر گرفتن اثر دما



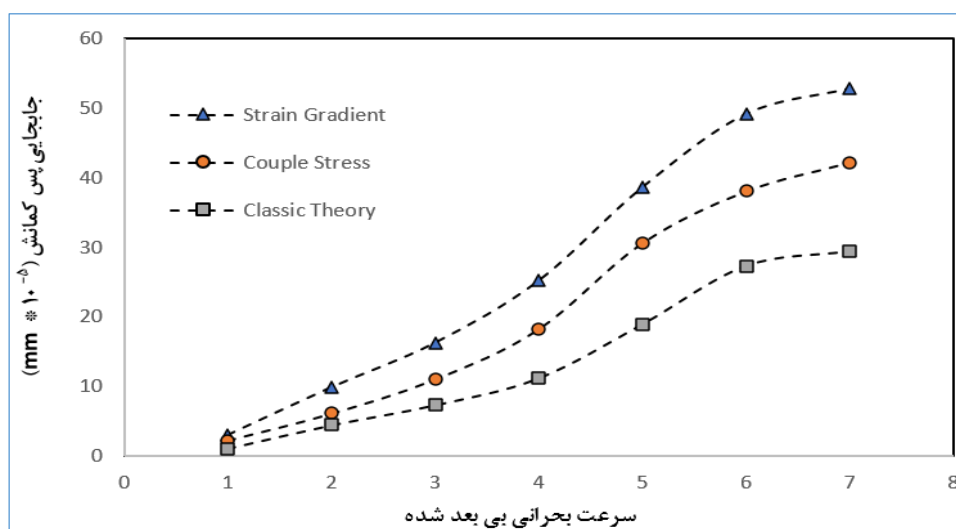
شکل ۶: تغییرات فرکانس بی‌بعد شده بر حسب پیشینه دامنه نوسان در میکرولوله هدفمند تحت تاثیر دما



با مقایسه نمودارهای شکل (۶) می‌توان دریافت که با افزایش دما، فرکانس بی‌بعد شده (نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی) در میکرولوله‌ی بیشتر و در نتیجه میکرولوله رفتار غیرخطی بیشتری از خود نشان می‌دهد. این میزان غیرخطی شدن رفتار از دامنه نوسان بیشینه از ۰/۱ شروع و بتدریج بیشتر خواهد شد. جابجایی عرضی بی‌بعد شده پس کمانش میکرولوله هدفمند حاوی جریان بر حسب سرعت بحرانی بی‌بعد شده سیال مبتنی بر تئوری‌های گرادیان کرنش، تنش کوپل و تئوری کلاسیک مکانیک پیوسته با قطرهای مختلف در جدول (۲) و قطر خارجی ۱۳ میکرومتر به عنوان قطر بحرانی و شروع کمانش در نمودار شکل (۷) به روش بدون امان درون‌یابی نقطه‌ای محاسبه و ترسیم شده است.

جدول ۲: جابجایی عرضی بی‌بعد شده ناشی از کمانش میکرولوله هدفمند حاوی جریان بر حسب سرعت بحرانی بی‌بعد شده

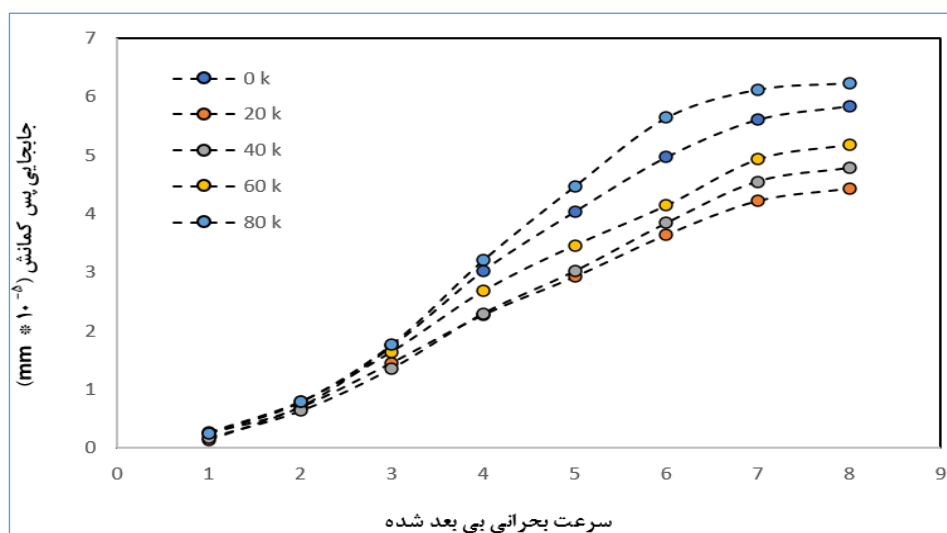
روش	قطر (μm)	جابجایی پس کمانش ($\text{mm} \times 10^{-5}$)						
		سرعت بی بعد شده (نسبت سرعت جریان سیال به سرعت بحرانی)						
		۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
Strain Gradient	۱۲	۹/۹	۱۰/۲۱	۱۷/۷	۲۶/۶	۳۸/۸	۴۵/۴۳	۵۶/۴
	۱۳	۳/۰۷	۹/۹۲	۱۶/۳	۲۵/۲	۳۸/۶	۴۹/۱۲	۵۲/۸
	۱۴	۱/۵۱	۱/۴۴	۱۲/۹	۲۲/۷	۳۱/۲	۴۱/۶	۴۹/۰۲
	۱۵	۰/۳۵۸	۰/۷۳۷	۹/۳۶	۱۷/۴۲	۲۸/۲	۳۲/۴	۳۶/۰۴
Couple Stress	۱۲	۳/۳۳	۷/۲۲	۱۰/۶۶	۲۶/۵۵	۳۰/۵۳	۳۶/۲	۴۱/۳۹
	۱۳	۲/۲۴	۶/۱۱	۱۱/۰۲	۱۸/۲۳	۳۰/۶۱	۳۸/۰۷	۴۲/۲۱
	۱۴	۲/۵۶	۲/۰۳	۵/۷	۱۸/۴	۲۳/۴۹	۳۱/۴۲	۳۴/۶۵
	۱۵	۱/۳۸	۱/۲۳	۳/۴۵	۱۱/۳۶	۱۷/۰۹	۲۶/۵	۲۹/۳
Classic	۱۲	۱/۲۱	۶/۱۲	۹/۰۶	۱۴/۱	۲۱/۴۳	۲۶/۴	۳۵/۱
	۱۳	۱/۰۹۱	۴/۴۵	۷/۳۲	۱۱/۱۸	۱۸/۹۲	۲۷/۳	۲۹/۴۱
	۱۴	۰/۸۲	۱/۷۷	۶/۴۲	۸/۳۸	۱۴/۵۳	۱۷/۳	۲۶/۰۵
	۱۵	۰/۱۶۴	۰/۳۵۴	۱/۵۱	۲/۷۲	۴/۱۴	۵/۰۳۴	۹/۶۲



شکل ۷: تغییرات جابجایی ناشی از کمانش بر حسب سرعت بی‌بعد شده جریان سیال در میکرولوله هدفمند



از نمودارهای شکل (۷) می‌توان دریافت که با افزایش سرعت سیال (چند برابر شد آن نسبت به سرعت بحرانی)، جابجایی عرضی نقاط مختلف میکرو لوله ناشی از مود اول کمانش افزایش و منجر به ناپایداری آن می‌شود. با توجه به انطباق بیشتر نتایج تئوری غیر کلاسیک گرادیان کرنشی میزان انحراف دو تئوری تنش کوپل و کلاسیک نیز مشهودتر است. تأثیر اختلاف دمای شرایط محیطی بر رفتار کمانش میکرولوله هدفمند با قطر بحرانی در سرعت‌های مختلف بی‌بعد شده جریان سیال، مطابق نمودارهای شکل (۸) ارایه می‌شود. همانطور که در این نمودارها مشاهده می‌گردد، با افزایش دما، سفتی میکرو لوله کاهش در نتیجه جابجایی عرضی میکرو لوله افزایش می‌یابد. این امر منجر به نوسانات و ناپایداری بیشتر می‌شود.



شکل ۸: تأثیر دما بر جابجایی ناشی از کمانش بر حسب سرعت بی‌بعد شده جریان سیال بر اساس تئوری گرادیان کرنش

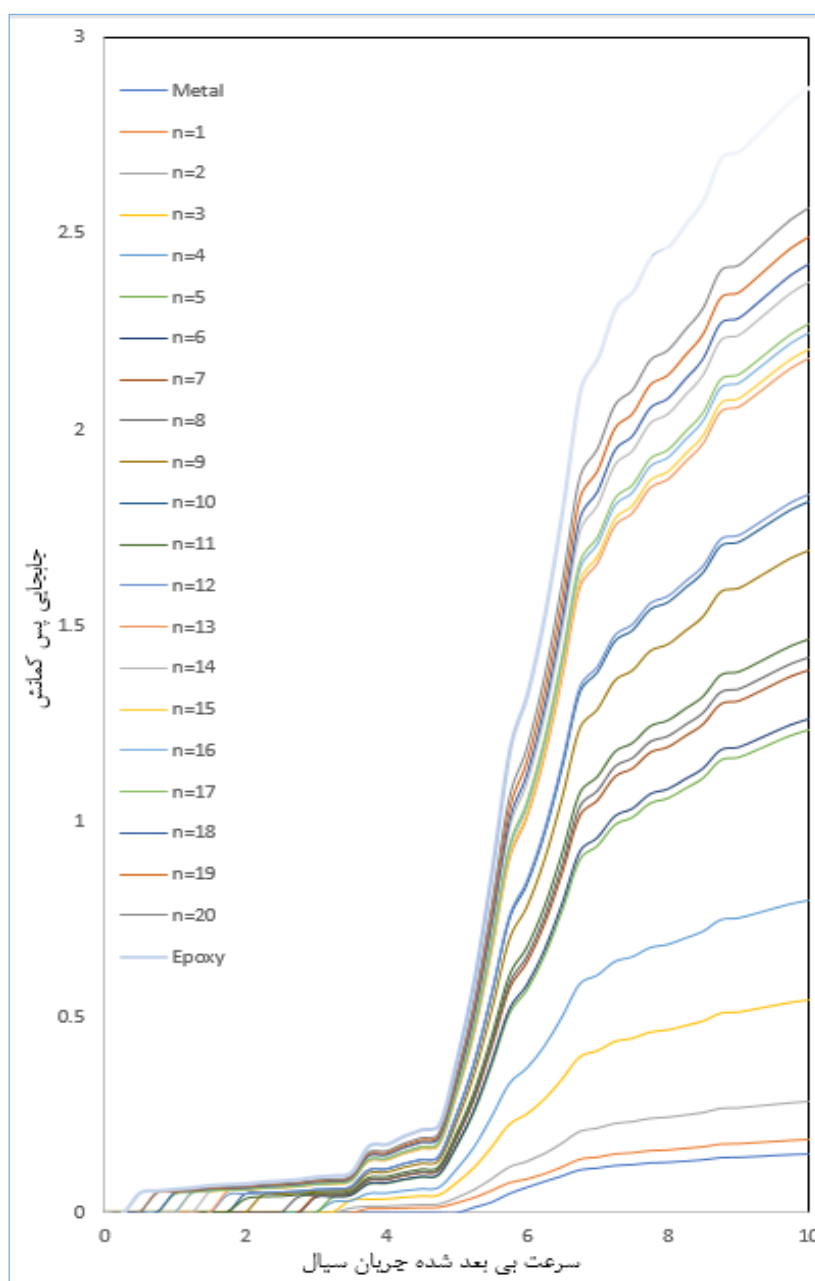
تأثیر اندیس قانون توانی بر رفتار پس از کمانش میکرو لوله‌های هدفمند بر حسب سرعت جریان در قطر بحرانی در شکل (۹) رسم شده است. نتایج نشان می‌دهند که با افزایش توان n ، جابجایی عرضی ناشی از کمانش میکرو لوله حاوی سیال، افزایش و رفتار میکرولوله‌ای از جنس آلومینیوم خالص به میکرولوله‌ای از جنس اپوکسی پلیمر به ویژه در $n > 13$ نزدیک‌تر می‌شود.

نتیجه گیری:

لوله های با قطر در ابعاد میکرو و نانو با طول زیاد ضمن اینکه از تکنولوژی ساخت خاصی برخوردار هستند، کاربردهای وسیعی در زمینه الکترومکانیک، حسگرهای زیستی، میکروسکوپ‌های اتمی، محرک‌ها، مخازن جهت انتقال سیال در دارو رسانی، مهندسی پزشکی و جراحی و... دارند. علت کاربرد فراوان میکرو لوله‌ها، هندسه تو خالی و خواص مکانیکی بسیار خوب آنها است. در این تحقیق به تحلیل کمانش میکرولوله هدفمند با بهره‌گیری از روش عددی درون یابی نقطه‌ای با توابع پایه توسعه یافته جهت حل ضعیف معادلات دیفرانسیلی حاکم بر تحلیل بر اساس مدل کلاسیک تیر اویلر برنولی و تئوری غیر کلاسیک گرادیان کرنش با سه پارامتر طول پرداخته شده است. با مقایسه نتایج تئوری‌های مختلف مشاهده گردید که قطر بحرانی ۱۰ میکرو متر به عنوان نقطه آغازین سرعت بحرانی سیال و شروع ناپایداری است. با توجه به حضور میکرولوله‌ها در شرایط مختلف محیطی، دما یکی از پارامترهای تأثیرگذار در طراحی دستگاه‌های میکروسیالی است. بنابراین اثر دما بر کمانش و میدان جابجایی و رفتار غیر خطی میکرو لوله هدفمند در کنار میدان سرعت و تغییرات قطر خارجی نیز مورد بررسی قرار گرفت. نتایج تحلیل و مدل سازی عددی نشان داد که محدوده قطر خارجی بحرانی بین ۱۲ تا ۱۵ است. به بررسی بیشتر مشخص گردید که در دامنه نوسان بیشینه ۰/۰۱ و قطر خارجی ۱۳ میکرون، مود اول کمانش در میکرو لوله هدفمند رخ می‌دهد. یافته‌های تحقیق ضمن کارایی استفاده از روش عددی یاد شده، بیان می‌دارند که کاهش قطر میکرولوله با فرکانس طبیعی و سرعت بحرانی نسبت عکس دارد. با تأثیر همزمان میدان‌های سرعت و تغییرات دما در قطر بحرانی ۱۳ میکرو متر، جابجایی عرضی میکرو لوله هدفمند



افزایش، سفتی آن کاهش می‌یابد. ولیکن افزایش اندیس توانی به ویژه در $n > 13$ ، جابجایی عرضی پس کمانش را افزایش داده و باعث می‌شود رفتار میکرولوله از جنس مواد خالص به میکرولوله به جنس مواد هدفمند نزدیک و نزدیکتر شود. نتایج حاصل از تحلیل کمانش میکرولوله‌ها تحت تاثیر همزمان دو میدان سرعت و دما نشان می‌دهند که، تئوری گرادیان کرنش با ۳ پارامتر طولی، مقادیر دقیق‌تر و در عین حال نزدیک‌تر با نتایج تحلیل مشابه به روش اجزاء محدود را نسبت به تئوری مکانیک کلاسیک و تئوری تنش کوپل پیش‌بینی می‌نماید.



شکل ۹: جابجایی عرضی میکرولوله ناشی از کمانش بر حسب سرعت بی‌بعد شده جریان سیال به ازای مقادیر مختلف اندیس قانون توانی و با قطری بحرانی



مراجع:

- [1] Hosseini, M., Hadi, A., Malekshahi, A., Shishesaz, M., (2018). A review of size-dependent elasticity for nanostructures. *Journal of Computational Applied Mechanics*, 49(1), pp 197-211.
- [2] Ichikawa, K. (Ed.), (2001). *Functionally graded materials in the 21st century: a workshop on trends and forecasts*. Springer Science & Business Media.
- [3] Arash, B., Wang, Q., (2014). A review on the application of nonlocal elastic models in modeling of carbon nanotubes and graphenes. *Modeling of carbon nanotubes, graphene and their composites*, pp 57-82.
- [4] Reddy, J. N., Kim, J., (2012). A nonlinear modified couple stress-based third-order theory of functionally graded plates. *Composite Structures*, 94(3), pp 1128-1143.
- [5] Şimşek, M., Kocatürk, T., Akbaş, Ş. D., (2013). Static bending of a functionally graded microscale Timoshenko beam based on the modified couple stress theory. *Composite Structures*, 95, pp 740-747.
- [6] Lei, J., He, Y., Zhang, B., Liu, D., Shen, L., Guo, S., (2015). A size-dependent FG micro-plate model incorporating higher-order shear and normal deformation effects based on a modified couple stress theory. *International Journal of Mechanical Sciences*, 104, pp 8-23.
- [7] Eringen, A. C., (1972). Nonlocal polar elastic continua. *International journal of engineering science*, 10(1), pp 1-16.
- [8] Eringen, A. C., Edelen, D., (1972). On nonlocal elasticity. *International journal of engineering science*, 10(3), pp 233-248.
- [9] Eringen, A. C., (1983). On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. *Journal of applied physics*, 54(9), pp 4703-4710.
- [10] Wang, D. H., Wang, G. F., (2011). Surface Effects on the Vibration and Buckling of Double-Nanobeam-Systems. *Journal of Nanomaterials*, 2011(1), 518706.
- [11] Wang, L., (2011). A modified nonlocal beam model for vibration and stability of nanotubes conveying fluid. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 44(1), pp 25-28.
- [12] Mahmoud, F. F., Eltaher, M. A., Alshorbagy, A. E., Meletis, E. I., (2012). Static analysis of nanobeams including surface effects by nonlocal finite element. *Journal of mechanical science and technology*, 26, pp 3555-3563.
- [13] Sun, Y. G., Yao, X. H., Liang, Y. J., & Han, Q., (2012). Nonlocal beam model for axial buckling of carbon nanotubes with surface effect. *Europhysics Letters*, 99(5), 56007.
- [14] Kumar, D., Heinrich, C., Waas, A. M., (2008). Buckling analysis of carbon nanotubes modeled using nonlocal continuum theories. *Journal of applied physics*, 103(7).
- [15] Wang, G. F., Feng, X. Q., (2009). Surface effects on buckling of nanowires under uniaxial compression. *Applied physics letters*, 94(14).
- [16] Wang, G. F., Feng, X. Q., (2009). Timoshenko beam model for buckling and vibration of nanowires with surface effects. *Journal of physics D: applied physics*, 42(15), 155411.
- [17] Liu, C., Rajapakse, R. K. N. D., Phani, A. S., (2011). Finite element modeling of beams with surface energy effects.
- [18] Lim, C. W., Yang, Q., Zhang, J. B., (2012). Thermal buckling of nanorod based on non-local elasticity theory. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 47(5), pp 496-505.
- [19] Yang, Q., Lim, C. W., (2012). Thermal effects on buckling of shear deformable nanocolumns with von Kármán nonlinearity based on nonlocal stress theory. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 13(2), pp 905-922.
- [20] Mousavi, Z., Shahidi, S. A., Boroomand, B., (2017). A new method for bending and buckling analysis of rectangular nano plate: full modified nonlocal theory. *Meccanica*, 52, pp 2751-2768.
- [21] Yin, L., Qian, Q., Wang, L., (2011). Strain gradient beam model for dynamics of microscale pipes conveying fluid. *Applied Mathematical Modelling*, 35(6), pp 2864-2873.
- [22] Lam, D. C., Yang, F., Chong, A. C. M., Wang, J., Tong, P., (2003). Experiments and theory in strain gradient elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 51(8), pp 1477-1508.
- [23] Yang, F. A. C. M., Chong, A. C. M., Lam, D. C. C., Tong, P., (2002). Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *International journal of solids and structures*, 39(10), pp 2731-2743.



- [24] Kong, S., Zhou, S., Nie, Z., Wang, K., (2009). Static and dynamic analysis of micro beams based on strain gradient elasticity theory. *International Journal of Engineering Science*, 47(4), pp 487-498.
- [25] Benjamin, T. B., (1962). Dynamics of a system of articulated pipes conveying fluid-I. Theory. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 261(1307), pp 457-486.
- [26] Zhang, Y. Q., Liu, X., Zhao, J. H., (2008). Influence of temperature change on column buckling of multiwalled carbon nanotubes. *Physics Letters A*, 372(10), pp 1676-1681.
- [27] Liu, G. R., Gu, Y. T., (2005). *An introduction to meshfree methods and their programming*. Springer Science & Business Media.