Journal of New Approahces to Learning Management Vol 1, No. 1, Autumn 2024

Research Article

Evaluation of Students' Conceptual Understanding of Double Integral Using APOS Theory

Zahra JafariBehbahani [1*], Mohsen Roodaki [2]

1.Assistant Professor, Department of Mathematics, Marvdasht Branch, Islamic Azad University, Marvdasht, Iran

2.Assistant Professor, Department of Mathematics, Marvdasht Branch, Islamic Azad University, Marvdasht, Iran

Received: 16/01/2025
Revised: 18/01/2025
Accepted: 10/02/2025
PP: 29-37

OPEN ACCESS

Keywords:
APOS theory, Conceptual understanding, Bivariate functions, Double integrals.

Abstract

Introduction: One of the important topics that plays an important role in the education of engineering students is double integral. The present research has investigated the level of conceptual understanding of undergraduate engineering students of the double integral by using the APOS theory.

Methodology: The sample was 127 undergraduate students of engineering fields and generally students of the second semester. After teaching the subject of double integral to the students, a test consisting of questions corresponding to the topics taught to the students was held. Evaluation of the level of conceptual understanding and examination of students' challenges was done by analyzing their answers to this test based on the four levels of APOS.

Findings: More than 60% of the students didn't deeply understand the consept of double integral. Most of the students' understanding of the double integral does not rise above the level of the process, and their biggest challenge was changing the order of integration. Few of them had reached the surface of the object. The examining students' answers and interviewing them after the test showed that a large number of them have learned this important topic in a procedural way.

Conclusion: The results showed the lack of deep and conceptual understanding of a large number of undergraduate engineering students on the topic of double integral. Due to the importance of conceptual understanding of this topic and the inability of the traditional method to create this deep understanding, the need to improve educational strategies and use more suitable teaching methods for learning this topic is felt. One of the weaknesses of the students that had a negative effect on their performance was the weakness in drawing the integration area when necessary, which shows the lack of deep learning of related basic topics. To solve this problem, education can be developed using appropriate software, as well as solving more problems and generally using active teaching methods in math classes.

Citation: JafariBehbahani, Z. Roodaki, M.(2024). Evaluation of Students' Conceptual Understanding of Double Integral Using APOS Theory, Journal of New approaches to learning management. Vol 1, No 1, pp 29-37.

*Corresponding Author: Zahra JafariBehbahani
Email: zjbehbahani@yahoo.com

©2022 The author(s). This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution (CC BY 4.0), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, as long as the original authors and source are cited. No permission is required from the authors or the publishers.

مقاله پژوهشی

ارزیابی سطح درک مفهومی دانشجویان از انتگرال دوگانه با بکارگیری نظریه APOS

زهرا جعفری بهبهانی [۱*]، محسن رودکی [۲]

۱. استادیار گروه ریاضی، واحد مرودشت، دانشگاه آزاد اسلامی، مرودشت، ایران

۲. استادیار گروه ریاضی، واحد مرودشت، دانشگاه آزاد اسلامی، مرودشت، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱۰/۲۷

تاریخ اصلاح: ۱۴۰۳/۱۰/۲۹

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۱۱/۲۲

شماره صفحات: ۳۷-۲۹

واژه‌های کلیدی:

نظریه APOS ، درک مفهومی، توابع دو متغیره، انتگرال های دوگانه

چکیده

مقدمه و هدف: یکی از مباحث مهم که نقش بسزایی در آموزش دانشجویان مهندسی دارد انتگرال دوگانه است. پژوهش حاضر به بررسی سطح درک مفهومی دانشجویان کارشناسی مهندسی از مفهوم انتگرال دوگانه با بکارگیری نظریه APOS پرداخته است.

روش شناسی پژوهش: نمونه مورد مطالعه، ۱۲۷ دانشجوی کارشناسی رشته های مهندسی و عموما دانشجوی ترم دوم بود. پس از آموزش مبحث انتگرال دوگانه به دانشجویان، یک آزمون کتبی مشتمل بر سوالاتی منطبق با مباحث آموزش داده شده برای دانشجویان برگزار شد. ارزیابی سطح درک مفهومی و بررسی چالش های دانشجویان با تحلیل پاسخ آنها به این آزمون براساس سطوح چهارگانه APOS انجام شد.

یافته‌ها: بیش از ۶۰٪ دانشجویان مورد مطالعه، مفهوم انتگرال دوگانه را بطور عمیق درک نکرده بودند. درک بیشتر دانشجویان از انتگرال دوگانه از سطح فرایند بالاتر نمی‌رود و بیشترین چالش آنها در تغییر ترتیب انتگرال‌گیری بود. تعداد کمی از آنها به سطح شیء رسیده بودند. همچنین بررسی پاسخهای دانشجویان و مصاحبه با آنها بعد از آزمون، نشان داد که تعداد قابل توجهی از آنها این مبحث مهم را بصورت رویه‌ای یاد گرفته‌اند.

نتیجه‌گیری: نتایج، عدم درک عمیق و مفهومی تعداد زیادی از دانشجویان کارشناسی رشته‌های مهندسی از مبحث انتگرال دوگانه را نشان داد. بدلیل اهمیت درک مفهومی این مبحث و عدم توانایی روش سنتی در ایجاد این درک عمیق، ضرورت ارتقای راهبردهای آموزشی و بکارگیری روش های تدریس مناسب تر برای یادگیری این مبحث احساس می‌شود. یکی از ضعفهای دانشجویان که در عملکرد آنها اثر منفی گذاشته بود ضعف در ترسیم ناحیه انتگرال‌گیری در صورت لزوم بود که نشان از عدم یادگیری عمیق مباحث پایه ای مرتبط دارد. برای رفع این مسئله می‌توان آموزش بوسیله نرم‌افزارهای مناسب و نیز حل مسائل بیشتر و بطور کلی بکارگیری روشهای تدریس فعال را در کلاسهای ریاضی دو توسعه داد.

استناد: جعفری بهبهانی، زهرا. رودکی، محسن(۱۴۰۳)، ارزیابی سطح درک مفهومی دانشجویان از انتگرال دوگانه با بکارگیری نظریه APOS، رهیافت های نوین مدیریت یادگیری. دوره اول شماره یک، پاییز ۱۴۰۳، شماره صفحات: ۳۷-۲۹

* نویسنده مسئول: زهرا جعفری بهبهانی

پست الکترونیکی: zjbehbahani@yahoo.com

مقدمه

درک مفهومی باید به منظور دستیابی به درک کامل از مفاهیم ریاضی و اطمینان از یادگیری معنادار کسب شود. ابزارهای موثر برای این کار، نظریه های یادگیری ریاضی با دو ویژگی توانایی درک چگونگی یادگیری ریاضی و ارائه اقدامات لازم برای بهبود برنامه های آموزش ریاضی هستند. یکی از این نظریه های یادگیری که این ویژگی ها را دارد و به طور خاص برای آموزش ریاضیات طراحی شده است، نظریه APOS است. این نظریه جایگاه مهمی در توسعه آموزش ریاضی در چارچوب اصطلاحات و پدیده های خاص خود دارد.

نظریه APOS یکی از نظریه‌های ساختارگرایانه است که براساس نظریه ای از پیاژه[1]، روانشناس و فیلسوف سوئیسی بنا شده است. پیاژه معتقد است که فرد برای یادگیری مفاهیم مختلف، ساز و کارهای ذهنی معینی را برای ساخت ساختارهای ذهنی بکار می برد و سپس از این ساختارها برای پرداختن به موقعیتهای مسئله گونه در ریاضی استفاده می‌کند. بنابراین فرد برای هر مفهوم ریاضی می تواند ساختاری ذهنی بسازد که برای درک، یادگیری و بکارگیری آن مفهوم قابل استفاده باشد (Dubinsky et al., 2001). اگر ساختارهای ذهنی مناسب وجود نداشته باشد، یادگیری مفهوم مورد بحث تقریباً غیرممکن است. از این رو به‌منظور کمک به یادگیرندگان در یادگیری یک مفهوم معین ریاضی لازم است ساختارهای ذهنی احتمالی برای یادگیری آن مفهوم شناسایی شده و سپس فعالیتهای مناسب برای حمایت از ساخت این ساختارهای ذهنی طراحی شوند. نظریه APOS در تحقیقات آموزش ریاضی در این زمینه کاربرد دارد. این نظریه محققان را قادر می‌سازد تا تفاوت‌های بین یادگیرندگانی را که از طریق نشانه‌های بیرونی گام به گام یاد می‌گیرند شناسایی و آنها را با هم مقایسه کنند (مفهوم عمل[2]). کسانی که با درونی کردن عمل‌ها به صورت ذهنی کار ریاضی می‌کنند (مفهوم فرآیند[3]) و کسانی که می‌توانند مفاهیم را در حل مسائل جدید به کار ببرند و مفهوم فعلی را به مفاهیم دیگر مرتبط کنند (مفهوم شیء[4]). براساس این نظریه ساختارهای ذهنی یادگیری مفاهیم ریاضی شامل عمل، فرایند، شیء و طرحواره[5] است.

در ابتدای یادگیری هر مفهومی، درک فرد در سطح عمل است. عمل، تغییر دادن اشیاء ریاضی از پیش شناخته شده توسط یادگیرنده از طریق یک یا چند عمل است که نیازمند آموزش مشخص می‌باشد. او می‌تواند برای رسیدن به یک پاسخ، عملیات ریاضی لازم را انجام دهد اما تنها استراتژی او پیروی از الگوریتم هایی است که به او آموزش داده شده است. در این مرحله فرد برای انجام تکالیف و حل مسائل نیاز صریح به حافظه‌اش دارد تا بتواند آنها را به صورت گام به گام انجام دهد. اگر او نداند چگونه مسئله را حل کند به بررسی فهرست راهبردهای خود می‌پردازد و این کار تا زمانی ادامه می‌یابد که راهبردی جوابگو باشد و یا اینکه فرد مسئله را رها کند.

با تکرار یک عمل و تمرکز و تأمل بر آن، فرد می‌تواند یک ساختار ذهنی درونی بنام فرایند بسازد. تکرار اعمال و تأمل در مورد آنها، دانش آموزان را از تکیه بر نشانه های بیرونی به کنترل آنها سوق می دهد. در این سطح از یادگیری، فرد می‌تواند بدون نیاز به محرک خارجی همان کاری که قبلا در سطح عمل انجام می‌داده را انجام دهد. با این کار، وقتی دانش‌آموزان به صورت ذهنی کار می‌کنند، ممکن است برخی از مراحل را نادیده بگیرند، راه‌حل‌ها را پیش‌بینی کنند و بتوانند برعکس کار کنند. او می‌تواند از طریق مسئله استدلال کند، مراحل حل را تشخیص دهد، و بازنمایی های مختلف را به هم پیوند دهد. با این حال شیء موردنظر هنوز یک فرایند نامشهود است، تا یک شیء با ویژگیهایی که خود را با عنوان فرایند نشان می‌دهد.

با آگاهی فرد از فرایند بعنوان یک کلیت او می‌فهمد که تغییرات روی اشیاء اولیه بصورت صریح یا در ذهن او روی آن کلیت عمل کرده و ساخته می‌شوند. در این مرحله است که یک شیء از فرایند ساخته می‌شود. هر ساختار تشکیل شده برای یک

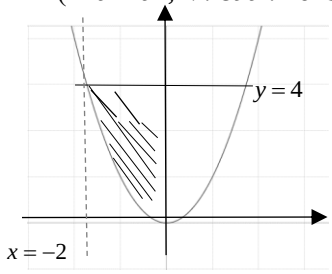
[1] Jean Piaget
[2] Action
[3] Process
[4] Object
[5] Schema

موضوع یا مفهوم ریاضی مجموعه ای از اعمال، فرایندها و اشیاء متعددی است که گاهی در قالب یک طرحواره پیوند داده شده و سازماندهی می‌شود. یک طرحواره راهی برای مدیریت یک مسئله ریاضی به دانش آموز ارائه می‌دهد.

بعنوان مثال، در تعیین حد تابع $f(x)=\begin{cases}x+2, & x\le 3,\\ 6-x, & x>3.\end{cases}$ زمانی که x به ۳ میل می‌کند، اگر فرد تنها بتواند حد چپ یا راست را محاسبه کند و نتواند تعیین کند که حد وجود دارد یا نه، درک او در سطح عمل نشان داده می‌شود. اگر از یادگیرندگان در مورد وجود یا عدم وجود $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ ، یا $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ برای تابع $f(x)=2x+1, \quad 0\le x\le 1$ پرسیده شود، آنها برای پاسخگویی درست باید به دامنه تابع [۰،۱] توجه کند. زمانی که x خارج از این بازه باشد f(x) تعریف نشده است و حد تابع هم وجود نخواهد داشت. اگر آنها تنها عمل‌های حد چپ و راست را انجام دهند درک آنها در سطح عمل است. ولی اگر بتوانند پاسخ درست را با توضیح ارائه کنند درک آنها در سطح شیء قرار می گیرد.

بعنوان مثال دیگر، در محاسبه $\int x^3 dx$ از آنجا که شکل انتگرال بصورت روتین قاعده موردنظر است و یادگیرنده باید قاعده انتگرال گیری مربوطه را بداند جواب صحیح فرد، سطح درک او را در سطح عمل نشان می دهد. اما اگر شکل انتگرال دقیقاً منطبق بر قاعده‌های انتگرال گیری آموخته شده نباشد بعنوان مثال برای محاسبه $\int \frac{1}{x^3}dx$ نیاز به تمرکز بیشتر است. محاسبه صحیح این انتگرال توسط دانشجو نشان دهنده ایجاد ساختاری ذهنی در فرد است که می‌تواند بدون نیاز به محرک خارجی همان کار سطح عمل را انجام دهد. بنابراین سطح درک او را می‌توان در سطح فرایند از مفهوم انتگرال دانست.

در مسئله تعیین مساحت ناحیه هاشور زده شده در شکل ۱، اگر دانشجو برای تعیین مساحت از $\int_{-2}^{0} x^2 dx$ استفاده کند ساختار ذهنی او در سطح شیء است اما اگر او در سطح طرحواره باشد باید بتواند با توجه به خط $x=4$ و سهمی $y=x^2$ مساحت ناحیه را با $\int_{-2}^{0}(4-x^2)dx$ بدست آورد (Alamian, V. et al. 2019).



شکل ۱. ناحیه انتگرال گیری

تحقیقات متعدد برای بررسی سطح درک یادگیرندگان از مفاهیم ریاضی مانند تابع، حد، مشتق و انتگرال توابع یک متغیره با بکارگیری نظریه APOS انجام شده است. تحقیق شریفی (۱۳۹۴) با هدف بررسی درک دانش‌آموزان سال سوم متوسطه دختر از مفهوم حد در چارچوب نظریه APOS نشان داد که درک بیشتر دانش‌آموزان از مفهوم حد در سطح پایینی است و در صورتی قادر به حل مسائل حد هستند که به یک روش معمولی برای حل دسترسی داشته باشند. پژوهش خیرالله زاده (۱۳۹۵) نشان داد درک دانش‌آموزان از مشتق توابع مثلثاتی تا حد قابل قبولی در سطح شیء است و درصد کمی از دانش‌آموزان به سطح طرحواره رسیده اند. عالمیان و همکاران (۱۳۹۸) در تحقیق خود گزارش کردند که بیشتر دانش‌آموزان در درک مفهومی انتگرال ناتوانند. درک بیشتر دانش‌آموزان از انتگرال توابع یک متغیره در سطح عمل و فرایند قرار داشت. در زمینه ریاضیات دانشگاهی نیز پژوهشهایی برای تعیین سطح درک مفهومی دانشجویان از برخی موضوعات ریاضیات انجام شده است. ماهاراج۶ (۲۰۱۴) نشان داد که مشکل دانشجویان در درک انتگرال توابع یک متغیره احتمالا بدلیل فقدان ساختارهای ذهنی مناسب در سطوح

6 Maharaj, A.

فرایند، شیء و طرحواره است. در تحقیق کازونگا[7] (۲۰۲۰) بمنظور بررسی نقش مفاهیم پیش نیاز *دترمینان و ماتریس معکوس* در حل دستگاه معادلات با استفاده از ماتریس معکوس از چارچوب APOS برای تحلیل پاسخهای دانشجویان استفاده شده است. نتایج مطالعه تاتیرا[8] (۲۰۲۱) که بمنظور بررسی ساختارهای ذهنی بسط سری دوجمله‌ای انجام شد نشان داد که دانشجویان به خوبی با سوالاتی که نیاز به درگیری در سطح عمل دارند کنار می‌آیند اما با سؤالاتی که به ساختارهای ذهنی سطح بالاتر (فرایند و شیء) نیاز دارند درگیر می‌شوند. تعداد کمی هم موفق به اِعمال عمل و فرایند به تقریب ها با سری های دوجمله‌ای شدند که نشان‌دهنده مفهوم شیء بسط دوجمله‌ای است. همچنین در مطالعه پاراگوئز و اکتاچ (Parraguez P., Oktaç, A., 2010) یک تجزیه ژنتیکی پیشنهاد شده که پیش‌بینی می‌کند چگونه دانشجویان می‌توانند مفهوم *فضای برداری* را به عنوان یک طرحواره بسازند.

درس ریاضی عمومی دو برای دانشجویان کارشناسی رشته های مهندسی، پیش نیاز دروس پیشرفته و تخصصی آنهاست. ولی برخلاف درس ریاضی عمومی یک که پژوهشهای متعدد و متنوعی در رابطه با یادگیری و آموزش مباحث آن انجام شده، سهم اندکی از پژوهشهای آموزش ریاضی را به خود اختصاص داده است. بیشتر دانشجویان در درک مفهوم توابع چند متغیره، انتگرالهای چندگانه و مباحث مرتبط با آن مشکلات بیشتری به نسبت توابع یک متغیره و انتگرال گیری از این توابع دارند. برای مقابله با این مشکلات و بدفهمی‌های بعد از آن بهتر است استاد مفید بودن روش تدریس بکار گرفته شده، میزان یادگیری دانشجویان و احتمال لزوم تغییر روش تدریس را ارزیابی کند.

دانشجویان کارشناسی مهندسی که دروس ریاضی را در سال اول و دوم برنامه‌های درسی خود می‌گذرانند، با مفاهیم حساب دیفرانسیل و انتگرال به عنوان پایه‌ای برای سایر دروس مهندسی آشنا می‌شوند. بنابراین، برای موفقیت آنها در برنامه‌های مهندسی حرفه‌ای و عملکرد آینده آنها، درک چنین مفاهیم ریاضی و توانایی تفسیر و کاربرد آنها در دوره‌های آینده ضروری است. حساب انتگرال شامل مطالعه مفاهیم اساسی مفید در مهندسی است که کاربردهای متنوعی در دروسی مانند ترمودینامیک، مکانیک و هیدرولیک دارد. یافته‌های مطالعه‌ای که بمنظور بررسی همبستگی بین درک دانشجویان از حساب مشتق و انتگرال با یک تحقیق ترمودینامیک انجام شد نشان داد که نتایج تحقیق ترمودینامیک تحت تأثیر درک دانشجویان از مشتقات و انتگرال‌ها قرار دارد (Saepuzaman, D., 2016). بنابراین بمنظور افزایش موفقیت در ترمودینامیک و سایر موضوعاتی که به نوعی با انتگرال گیری مرتبط است اهمیت نظارت بر درک و تجربه دانشجویان مهندسی از مفاهیم حساب دیفرانسیل و انتگرال یک ضرورت است. مجموعه تحقیقات در مورد مباحث حساب دیفرانسیل و انتگرال نشان از مشکلات اساسی دانشجویان در انتگرال‌گیری دارد. بمنظور بهبود آموزش انتگرال و تسهیل کردن موفقیت دانشجویان در آن، باید نوع مشکلات و بدفهمی‌های رایج شناسایی شوند. در حالی که پژوهشگران درک دانشجویان از مفاهیم مختلف را در حساب تک متغیره مانند مشکلات دانشجویان در مبحث حد و انتگرال مستند کرده‌اند (Li Li, V., et al. 2017, Martinez-Planell, R. eta l. 2020)، مطالعات کمتری در مورد درک آنها از مبحث حساب چند متغیره و انتگرال دوگانه وجود دارد. بنابراین این پژوهش برای نخستین بار از نظریه APOS بمنظور بررسی و ارزیابی درک مفهومی دانشجویان از انتگرال دوگانه بعنوان یکی از مفاهیم اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال که به طور گسترده در دوره‌های آموزشی در سراسر رشته های مهندسی استفاده می‌شود بکار گرفته شد.

روش شناسی پژوهش

نمونه مورد مطالعه در این پژوهش پیمایشی ۱۲۷ نفر از دانشجویان مقطع کارشناسی رشته‌های مهندسی دانشگاه آزاد اسلامی واحد مرودشت در نیمسال دوم سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۱ که عموما دانشجوی ترم دوم بودند هستند. دانشجویان در درس ریاضی یک با مفهوم انتگرال، قواعد و روشهای انتگرال گیری از توابع یک متغیره آشنا شده بودند. پس از آموزش مبحث انتگرال دوگانه بصورت سنتی و معمول، آنها در یک آزمون کتبی مشتمل بر سه سوال شرکت داده شدند. سوالات آزمون براساس

7 Kazunga, C. et al.
8 Tatira, B.

سطوح نظریه APOS طراحی شده بودند. این سوالات و تحلیل آنها مطابق با چهار سطح عمل، فرایند، شیء و طرحواره از نظریه APOS به شرح زیر است.

سوال ۱) انتگرالهای زیر را حساب کنید.

الف) $\int_0^2\int_0^1 (2x+y)^8\,dx\,dy$ ب) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos\theta} e^{\sin\theta}\,dr\,d\theta$ ج) $\int_0^1\int_{3y}^3 e^{x^2}\,dx\,dy$

هدف از سوال اول، ارزیابی کیفیت یادگیری دانشجویان در مورد روش انتگرال‌گیری دوگانه و تغییر المان و تعیین کرانهای انتگرال دوگانه جدید بود.

محاسبه درست قسمت الف، دانشجو را در سطح عمل از مفهوم انتگرال دوگانه قرار می‌دهد. او روش حل را می‌داند و مطابق الگوریتم آموخته شده عمل می‌کند. اما در قسمت ب، از آنجا که ناحیه انتگرال‌گیری مستطیلی نیست، نیاز به تمرکز و دقت بیشتری می‌باشد. پاسخ صحیح دانشجو به این سوال، نشان دهنده آن است که او بدون محرک خارجی توانسته همان عمل انتگرال‌گیری را انجام دهد. بنابراین پاسخ صحیح دانشجو به قسمت ب، او را در سطح فرایند از درک مفهوم انتگرال دوگانه قرار می‌دهد. دانشجو برای حل قسمت ج نیاز به تغییر ترتیب انتگرال‌گیری، رسم ناحیه انتگرال‌گیری و تغییر المان روی ناحیه دارد. حل کامل و صحیح این قسمت از سوال درک دانشجو را در سطح طرحواره تعیین می‌کند. زیرا مجموعه‌ای از اعمال، فرایندها و اشیاء را که با چند اصل کلی به هم مرتبط شده‌اند چارچوبی را در ذهن او شکل داده است که او توانسته آن را در این سوال بکار ببرد. اگر دانشجو نیاز به تغییر ترتیب انتگرال‌گیری را تشخیص داده ولی در رسم ناحیه و یا در تغییر المان و تنظیم کرانهای جدید انتگرالها مشکل داشته باشد، درک او در سطح شیء ارزیابی می‌شود. زیرا فرد از فرآیند به عنوان یک کلیت آگاه است و متوجه شده است که باید عملها را تغییر دهد.

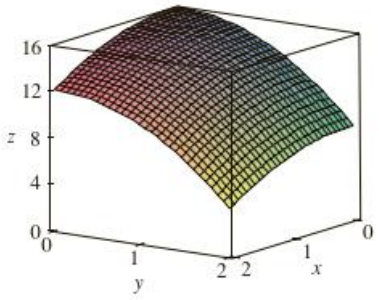
سوال ۲) انتگرال دوگانه $\iint_R \cos(x^2+y^2)dA$ را که در آن R ناحیه ی درون دایره $x^2+y^2=9$ و بالای محـــور طولها می‌باشد، حساب کنید.

برای محاسبه انتگرال دوگانه در این سوال، نیاز به تغییر مختصات از دکارتی به قطبی است. پس از تشخیص امکان پذیر نبودن محاسبه انتگرال به صورت موجود، ضرورت استفاده از مختصات قطبی و نیز فرایند پیاده سازی آن دانشجو را به حل صحیح می‌رساند که درک او را در مرحله ی شیء نشان می‌دهد. اگر دانشجو در مرحله اولیه تشخیص یا پیاده سازی متوقف شود، درک او در سطح فرایند ارزیابی می‌شود.

سوال ۳) حجم جسمی را محاسبه کنید که محدود به سهمی وار بیضوی $x^2+2y^2+z=16$ ، سه صفحه مختصات و صفحـــه های $x=2$ و $y=2$ باشد.

هدف از این سوال، ارزیابی سطح درک دانشجو از مفهوم انتگرال دوگانه برای محاسبه حجم می‌باشد. انتظار می رود دانشجو با دانشی که از سهمی‌وار و صفحه دارد بتواند تجسمی از نمودار سه بعدی جسم داشته باشد و تشخیص دهـــد که جسم بالای ناحیـــــــــــه مربعی $[0,2]\times[0,2]$ قرار دارد (شکل ۲). سپس بتواند با استفاده از قضیه فوبینی حجم جسم موردنظر را بدست آورد. بنابراین حل کامل و صحیح این سوال، درک دانشجو را در سطح طرحواره تعیین می‌کند.

پس از برگزاری آزمون، به بررسی پاسخهای دانشجویان نمونه موردنظر و تحلیل این پاسخها با بکارگیری نظریه APOS جهت تعیین سطح درک مفهومی دانشجویان پرداخته شد. همچنین در اولین جلسه بعد از آزمون، مصاحبه‌ای با دانشجویان انجام شد تا نسبت به نظرات آنها در مورد آزمون و پاسخهایشان، آگاهی بیشتری کسب شود.



شکل ۲. سهمی وار بیضوی مربوط به مسئله سوم آزمون

یافته ها

پس از بررسی پاسخهای کتبی دانشجویان به سوالات آزمون، تحلیل پاسخهای آنها به هر سوال بصورت جداگانه با بکارگیری نظریه APOS انجام شد. نتایج این تحلیل در جدول ۱ نشان داده شده است.

جدول ۱. ارزیابی سطح درک دانشجویان از مفهوم انتگرال دوگانه در چارچوب نظریه APOS

سوالات/ سطح درک	عمل	فرایند	شیء	طرحواره
سوال ۱، قسمت الف	٪۹۴/۳	--	--	--
سوال ۱، قسمت ب	٪۷۹/۲	٪۶۵/۷	--	--
سوال ۱، قسمت ج	--	--	٪۴۵/۲	٪۶/۶
سوال ۲	--	٪۴۹/۳	٪۱۷	--
سوال ۳	--	٪۶۱/۸	٪۱۵/۴	٪۸
کل	٪۸۰	٪۶۳/۴	٪۲۵/۹	٪۷/۳

همانطور که مشاهده می شود در محاسبه قسمت الف سوال یک، درک ٪۵/۷ دانشجویان زیر سطح عمل است. دانشجویانی که یا روش حل را نمی دانستند (بدون پاسخ، پاسخ نادرست) و یا نتوانستند مطابق الگوریتم آموخته شده عمل کنند (قسمتی از پاسخ آنها درست بود) جزء این تعداد هستند. درک ٪۶۵/۷ دانشجویان در محاسبه قسمت ب این سوال در سطح فرایند می‌باشد. بررسی جامع‌تر راه حل های دانشجویانی که نتوانسته بودند پاسخ درست بدهند نشان داد که آنها از مراحل حل آگاهی دارند و حتی اعمال ابتدایی را هم انجام داده‌اند ولی نتوانستند در قسمت مثلثاتی بخوبی عمل کنند. درک تنها ۶/۶ درصد دانشجویان در حل قسمت ج در سطح طرحواره تعیین شد و کمتر از نیمی از دانشجویان نیاز به تغییر ترتیب انتگرال‌گیری را در این سوال تشخیص دادند ولی یا در رسم ناحیه و یا در تغییر المان مشکل داشتند که این موضوع درک آنها را در سطح شیء ارزیابی کرد. برای سوال دوم، سطح درک ٪۵۱/۷ دانشجویان زیر سطح فرایند برآورد شد و تنها ٪۱۷ آنها به سطح شیء رسیدند. در سوال سوم آزمون، سطح درک تنها ۸ درصد دانشجویان به سطح طرحواره رسید و درک ٪۳۹/۲ دانشجویان در این سوال زیر سطح فرایند برآورد شد.

بحث و نتیجه گیری

هدف این پژوهش، ارزیابی سطح درک دانشجویان رشته‌های مهندسی از مبحث انتگرال دوگانه با بکارگیری نظریه APOS دوبینسکی با توجه به اهمیت این مبحث در موفقیت دانشجویان در دروس مهندسی بود. نتایج پژوهش نشان داد که دانشجویان در این مطالعه به خوبی با سؤالاتی که نیاز به درگیری در سطح عمل داشتند، کنار آمدند، اما در سؤالاتی که به ساختارهای ذهنی سطح بالاتر، یعنی فرآیندها و اشیاء نیاز داشتند، دچار چالش های جدی می‌شدند. نتایج نشان داد که درک دانشجویان از مفهوم انتگرال دوگانه ۸۰ درصد در سطح عمل، ۶۳ درصد در سطح فرایند، ۲۶ درصد در سطح شیء و تنها ۷ درصد در سطح طرحواره می‌باشد. لذا بیش از ٪۶۰ دانشجویان این مفهوم را بطور عمیق درک نکرده‌اند. تعداد کمی از دانشجویان موفق به

پیاده‌سازی اعمال و فرآیندها در رسم ناحیه انتگرال گیری و تغییر المان شدند، که نشان‌دهنده مفهوم شیء انتگرال دوگانه است. یافته‌های پژوهش، موید نظر آرنون و همکاران (۲۰۱۴) است که در مطالعه خود بیان کردند توسعه مفهوم شیء برای یک مفهوم ریاضی اوج آموزش است اما برای رسیدن به این مرحله اساتید و دانشجویان راه دشوار و زمان‌بری را باید طی کنند.

نتایج جزئی‌تری نیز از تحلیل پاسخنامه‌های دانشجویان و مصاحبه بعد از آزمون با آنها بدست آمد. درصد قابل توجهی از آنها عمدتا این مبحث را بصورت رویه‌ای همانند انتگرال‌گیری از توابع یک متغیره یاد می‌گیرند. با وجود آموخته‌های قبلی دانشجو از انتگرال‌گیری و تکنیکهای آن در درس ریاضی عمومی یک، تنظیم نادرست انتگرالها منجر به نتایج نادرست می‌شود. بیشترین مشکل مشاهده شده در مسائلی بود که در آنها دانشجو نیازمند بکارگیری دانش قبلی خود در ترسیم منحنی‌ها بود تا بتواند ناحیه انتگرال‌گیری را ترسیم کند. البته در قسمت ج سوال ۱ که نیازمند تغییر ترتیب انتگرال‌گیری است، عده‌ای از دانشجویان نمی‌دانستند که این کار مستلزم تغییر کران انتگرالها است. پاسخهای کتبی آنها نشان‌دهنده یک خطای ساختاری ناشی از عدم درک روابط موجود بین نمودار جسم و نمایش انتگرالی است. عملکرد ضعیف دانشجویان نشان‌دهنده نقص بزرگ ساختار انتگرال دوگانه در ذهن آنهاست.

نتایج پژوهش با پژوهش ماهاراج[9] (۲۰۱۴) مبنی بر فقدان ساختارهای ذهنی مناسب دانشجویان در سطوح فرایند، شیء و طرحواره از مفهوم انتگرال (از تابع یک متغیره) و کاربردهای آن تا اندازه‌ای منطبق است. همچنین با نتایج پژوهش خیرالله زاده (۱۳۹۵) که روی مبحث مشتق توابع مثلثاتی انجام داده بود کمی تفاوت دارد، چون در پژوهش او درک دانشجویان تا حد قابل قبولی در سطح شیء بود و درصد کمی از آنها به سطح طرحواره رسیده بودند.

درصد بالایی از مشکلات دانشجویان در ترسیم ناحیه انتگرال‌گیری و تجسم جسم موردنظر در مسئله بود. انتظار می‌رود با تقویت این بعد از یادگیری دانشجویان بتوان در رفع برخی از مشکلات دانشجویان به آنها کمک کرد. بنظر می رسد برای تقویت درک روابط بین نمودار جسم و نمایش انتگرالی بکارگیری نرم افزارهای نمایش و رسم توابع چندمتغیره در کلاسهای ریاضی دو مفید باشد. از آنجا که یکی دیگر از مشکلات مشاهده شده دانشجویان، در محاسبات مثلثاتی بود بنظر می‌آید که برای عملکرد بهتر آنها در انتگرال دوگانه و کسب درک مفهومی از این مبحث، نیاز به تقویت آنها در مباحث پیش نیاز مانند شناسایی نمودار انواع توابع و مثلثات می‌باشد.

پیشنهادهای کاربردی پژوهش

تحقیقات آموزش ریاضی متعدد، مزایای روشهای تدریس آموزش معکوس[10] و یادگیری در حد تسلط[11] و اثربخشی این روشها بر افزایش و بهبود عملکرد یادگیرندگان را گزارش کرده‌اند. از آنجا که درک مفهومی انتگرالهای دوگانه بر عملکرد دانشجویان در مباحث دیگر مانند انتگرال خط، انتگرال سطح و قضیه استوکس تاثیر دارد پیشنهاد می‌شود این روشهای تدریس در کلاسهای ریاضی عمومی دو و حداقل در آموزش این مبحث مهم، از این روشهای تدریس در کلاسهای ریاضی عمومی دو برای تقویت درک روابط بین نمودار جسم و نمایش انتگرالی نرم‌افزارهای نمایش و رسم توابع چندمتغیره بکار گرفته شود. سپس دستاوردهای دانشجویان در این زمینه بررسی شود.

نتیجه گیری

یافته‌های این پژوهش، نشان از سطح درک مفهومی پایین دانشجویان از مبحث مهم و کاربردی انتگرال دوگانه دارد. نیاز به استفاده از تمرینها و مسائل بیشتر در سطح فرایند و شیء در یادگیری این مبحث احساس می‌شود. همچنین بنظر می آید روش تدریس سنتی در یاددهی این مبحث کارایی لازم را ندارد و باید تلفیقی از روشهای تدریس معکوس و یادگیری در حد تسلط را در آموزش این مبحث از ریاضی دو بکار برد. به این ترتیب انتظار می‌رود دانشجو به سطح طرحواره هم برسد. همچنین یکی دیگر از نتایج مصاحبه با دانشجویان مشخص کرد که برای ایجاد و افزایش انگیزش در آنها برای یادگیری مفهومی این مبحث، بیان کاربردهای انتگرال دوگانه در دروس تخصصی آنها مفید می‌باشد.

[9] Maharaj
[10] Flipped Method
[11] Mastery learning

ملاحظات اخلاقی

در مطالعه حاضر هدف از آزمون به اطلاع دانشجویان رسانده شد و نویسندگان از رضایت همه دانشجویان جهت استفاده از نتایج آزمون آنها در این مطالعه اطمینان حاصل کردند.

حامی مالی

هزینه‌های مطالعه حاضر توسط نویسندگان مقاله تامین شد.

تعارض منافع

بنابر اظهار نویسندگان مقاله حاضر فاقد هرگونه تعارض منافع بوده است.

References

Alamian, V., Ghaedi, M., Habibi, M. (2019). Examining the level of understanding of fourth year high school students of the concept of integral in the framework of APOS theory. Quarterly journal of Eduacation in Basic Sciences. Vol 5, No. 14, 22-38.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education. Springer Science & Business Media. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6.

Dubinsky, E., McDonald, M.A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In Derek Holton et al. (eds.), The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study. 273-280.

Kazunga, C., & Bansilal, S. (2020). An APOS analysis of solving systems of equations using the inverse matrix method. Educational Studies in Mathematics, 103(3), 339-358.

Kheirollahzadeh, R. (2016). Investigating and determining the level of learning of third grade high school mathematics and physics students from the subject of the derivative of trigonometric function with the help of APOS theory, M. A. Thesis of Shahid Rajaei University of Tehran.[in persian]

Li Li, V., Hazizah Julaihi, N., Howe Eng, T. (2017). Misconceptions and errors in learning integral calculus, Asian Journal of University Education, Vol. 3, No. 1, 17-39.

Maharaj, A. (2014). An APOS Analysis of Natural Science Students' Understanding of Integration. REDIMAT, 3(1), 54-73. doi: 10.4471/redimat.2014.40.

Martinez-Planell, R., Trigueros, M. (2020). Students' understanding of Riemann sums for integrals of functions of two variables, Journal of Mathematical Behavior, Vol. 59, pp. 1-26.

Parraguez P., Oktaç, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. Linear Algebra and its Applications. 2112–2124.

Saepuzaman, D. (2016). Correlation between students' Understanding on Derivative and Integral Calculus with Thermodynamics, 1st International Conference of Mathematics and Science Education, Atlantis press, Indonesia, Vol 57, 218-220.

Sharifi, Z. (2015). Investigating the understanding of third year high school female students on the subject of limit in the framework of APOS theory. M. A. Thesis of Shahid Rajaei University of Tehran.[in persian]

Tatira, B. (2021). Mathematics Education Students' Understanding of Binomial Series Expansion Based on the APOS Theory. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 17(12), https://doi.org/10.29333/ejmste/11287.