

Original Article

Efficiency ranking of DMUS with fuzzy data

Neda Bashak^{ID*}, Shokrollah Ziari^{ID**}, Mohammad mehdi Movahedi^{ID+},
Amir Gholam Abri^{ID++}, Mehdi Amir Miandaragh^{ID×}

<https://sanad.iau.ir/Journal/eco/Article/1196171>

Received:
22/08/2024

Accepted:
11/01/2025

Keywords:

Data Envelopment
Analysis, Fuzzy TOPSIS
Technique, Fuzzy
TOPSIS-DEA, Ranking
of Decision Making
Units

JEL Classification:

C01, C44, C61

Abstract

This research introduces an integrated approach combining Data Envelopment Analysis (DEA) and the fuzzy Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution (TOPSIS) for comprehensive ranking of decision-making units (DMUs) in a fuzzy environment. In this method, DMUs are treated as alternatives, with input variables as cost criteria (negative attributes) and output variables as benefit criteria (positive attributes). The efficiency of a DMU increases as output values rise and input values decrease. Importantly, this method accommodates DMUs with unfavorable outputs for ranking purposes. The effectiveness and simplicity of the proposed approach are demonstrated through examples and a case study, with results compared against relevant literature.

* PhD. Student, Department of Industrial Management, South Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran, bashak.mim93@gmail.com

** Associate Professor, Department of Mathematics, South Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran, (Corresponding Author), sh_ziari@azad.ac.ir

+ Associate Professor, Department of Industrial Management, Firuzkuh Branch, Islamic Azad University, Firuzkuh, Iran, mmmovahedi@gmail.com

++ Associate Professor, Department of Mathematics, Firuzkuh Branch, Islamic Azad University, Firuzkuh, Iran, e- amirgholamabri@gmail.com

× Assistant Professor, Department of Mathematics, Firuzkuh Branch, Islamic Azad University, Firuzkuh, Iran, mehdi59ir@gmail.com

How to Cite: Bashak, N., et al. (2025). Efficiency ranking of DMUS with fuzzy data. *Economic Modeling*. 18(67): 27-52.



1. Introduction

Data Envelopment Analysis (DEA) provides a nonparametric method to evaluate the relative efficiency of decision-making units (DMUs). It calculates the ratio of weighted outputs to weighted inputs to assess the efficiency of DMUs with multiple inputs and outputs. Practitioners widely use DEA and Multiple-Criteria Decision-Making (MCDM) tools in management, control, and decision-making processes. However, basic DEA models fail to discriminate among efficient DMUs, which creates the need to combine DEA with MCDM techniques, such as TOPSIS, for ranking purposes. Traditional DEA also struggles to handle imprecise or ambiguous input and output values, which often arise in real-world data. Researchers use fuzzy logic to integrate DEA and TOPSIS to address this issue. This approach manages uncertain data by representing it with fuzzy numbers, ensuring more reliable and valid decisions. Researchers have increasingly combined DEA and TOPSIS with fuzzy set theory to enhance decision-making in uncertain environments. They analyze various multi-criteria decision-making (MCDM) problems using the fuzzy TOPSIS method and develop extensions to solve real-life scenarios. This paper reviews these studies, emphasizing the effectiveness of the fuzzy TOPSIS method in addressing complex MCDM challenges.

2. Research method and data

This research aims to present an integrated Fuzzy DEA and fuzzy TOPSIS technique based on similarity to the ideal solution for the complete ranking of DMUs in a fuzzy environment.

3. Analysis and discussion

We demonstrate the effectiveness and capability of the proposed approach through two illustrative examples and a real-world application. The first example involves two fuzzy inputs and two fuzzy outputs, with the dataset presented in Table 3 using triangular fuzzy numbers. These data have also been referenced in prior studies. The ranking results, derived using the proposed method, appear in Table 5. The second example includes two fuzzy inputs, two desirable fuzzy outputs, and one undesirable fuzzy output. The dataset, detailed in Table 4, also employs triangular fuzzy numbers. Table 9 presents the ranking results based on the proposed method. To showcase the applicability of the model with real-world data, we analyze variables from nine branches of NIOC in Iran, spanning nine provinces. The dataset includes two input variables—number of staff (I1) and costs (I2) (comprising operational expenses, labor costs, maintenance, and other services)—and three output variables: gas extraction volume (O1), oil extraction volume (O2), and production quality (O3). Table 11 provides the input-output dataset, with company names anonymized for confidentiality. The ranking results, calculated using the proposed algorithm, are displayed in Table 12.

Table 12: d^- , d^* and cl_i^* values; ranking results based on proposed method

| DMUs | d^* | d^- | cl_i^* | rank |
|------|--------|--------|----------|------|
| Co1 | 0.6041 | 2.7719 | 0.8211 | 1 |
| Co2 | 0.6391 | 2.7490 | 0.8114 | 2 |
| Co3 | 1.5889 | 1.6400 | 0.5079 | 6 |
| Co4 | 1.4709 | 1.7515 | 0.5435 | 5 |
| Co5 | 1.6717 | 0.7024 | 0.4815 | 7 |
| Co6 | 2.5477 | 0.6915 | 0.2135 | 8 |
| Co7 | 2.6847 | 0.5703 | 0.1752 | 9 |
| Co8 | 0.8710 | 2.3847 | 0.7325 | 3 |
| Co9 | 1.4676 | 1.8539 | 0.5582 | 4 |

The ranking outcomes in Table 12 reveal that Company 1 exhibits the most favorable situation, while Company 9 shows the least favorable circumstances among the companies.

4. Conclusion

This paper ranks all DMUs in a fuzzy environment by integrating fuzzy DEA and TOPSIS. The process treats each fuzzy input and output as an attribute and each DMU as an alternative. After normalizing the fuzzy decision matrix, the approach calculates the distance of each DMU from the best and worst solutions. Numerical experiments validate the proposed method and compare it with existing ranking techniques based on α -levels. The proposed method performs effectively for undesirable fuzzy output variables and offers several advantages over existing approaches. These include cost-efficient computation and independence of results from α -levels. Unlike most ranking methods in fuzzy DEA that rely on α -levels, the proposed approach provides a unique rank for all α -levels, addressing a significant limitation of traditional methods.

Funding

There is no funding support.

Declaration of Competing Interest

The author has no conflicts of interest to declare that are relevant to the content of this article.

Acknowledgments

We thank anonymous reviewers for their useful comments greatly contributing to improve our work.

رتبه‌بندی کارآیی واحدهای تصمیم‌گیری با داده‌های فازی

ندا بشاک*، شکراله زیاری**، محمدمهدی موحدی⁺، امیرغلام ابری⁺⁺، مهدی امیرمیاندرق^x

<https://sanad.iau.ir/Journal/eco/Article/1196171>

| | |
|---|--|
| چکیده | تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۶/۰۱ |
| هدف این مقاله، ارائه روشی یکپارچه از روش تحلیل پوششی داده‌ها و تکنیک TOPSIS فازی براساس شباهت به راه‌حل ایدئال برای رتبه‌بندی کامل واحدهای تصمیم‌گیری در محیط فازی است. در این روش، DMUها به‌عنوان گزینه‌ها، متغیرهای ورودی به‌عنوان معیارهای هزینه (ویژگی‌های منفی) و متغیرهای خروجی به‌عنوان معیارهای سود (ویژگی‌های مثبت) لحاظ می‌شوند؛ زیرا کارآیی یک DMU با افزایش مقادیر خروجی‌ها و کاهش مقادیر ورودی‌ها افزایش می‌یابد. ضمناً روش ارائه شده می‌تواند برای رتبه‌بندی DMUها با خروجی‌های نامطلوب نیز استفاده شود. کارآیی و سادگی این روش از طریق مثال‌ها و مطالعه موردی بررسی شده است. همچنین نتایج به‌دست آمده با نتایج در مقالات مرتبط مقایسه شده است. | تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۱۰/۲۲ |
| | واژگان کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، تکنیک تاپسیس فازی، تاپسیس-DEA فازی، رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیری. |
| | طبقه‌بندی JEL: C01, C44, C61 |

bashak.mim93@gmail.com

sh_ziari@azad.ac.ir

mmmovahedi@gmail.com

amir.gholamabri@gmail.com

mehdi59ir@gmail.com

* دانشجوی دکتری، گروه مدیریت صنعتی، واحد فیروزکوه، دانشگاه آزاد اسلامی، فیروزکوه، ایران،

** دانشیار، گروه ریاضی، واحد تهران جنوب، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران (نویسنده مسئول)،

⁺ دانشیار، گروه مدیریت صنعتی، واحد فیروزکوه، دانشگاه آزاد اسلامی، فیروزکوه، ایران،

⁺⁺ دانشیار، گروه ریاضی، واحد فیروزکوه، دانشگاه آزاد اسلامی، فیروزکوه، ایران،

^x استادیار، گروه ریاضی، واحد فیروزکوه، دانشگاه آزاد اسلامی، فیروزکوه، ایران،

۱. مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)^۱ زیرشاخه‌ای از پژوهش‌های عملیاتی^۲ و علم مدیریت و روشی ناپارامتریک^۳ است که به اندازه‌گیری «کارایی نسبی»^۴ واحدهای تصمیم‌گیری (DMUs)^۵ می‌پردازد (کوپر و همکاران^۶، ۲۰۱۴). به نقل از لابیجاک-کوالسکا و کاژینسکی^۷، (۲۰۲۱). تحقیق در مورد برآورد مرز کارایی در نظریه تولید^۸ به اثر فارل^۹ (۱۹۵۷) برمی‌گردد. وی، کارایی را نسبت خروجی و ورودی واحد در نظر می‌گیرد. این مدل توسط چارنز و همکاران^{۱۰} (۱۹۷۸) تعمیم یافته است. آنها در این اثر، سناریوی پیچیده‌تری شامل ورودی‌ها و خروجی‌های متعددی را در نظر گرفتند. به‌طور خاص، این پژوهش تاثیرگذار به کارایی اشاره دارد که به‌عنوان نسبت خروجی مجازی و ورودی مجازی^{۱۱} بیان می‌شود؛ یعنی، به‌ترتیب، مجموع وزنی خروجی‌ها و ورودی‌ها. وضعیت کارایی با استفاده از مدل برنامه‌ریزی خطی تعیین می‌شود که یک DMU مفروض را با تمام واحدهای دیگر در مجموعه‌ای مفروض، مقایسه می‌کند. چنین ارزیابی و اندازه‌گیری عملکرد بدون تعیین وزن قبلی و دانستن عملکرد تولید پیشین انجام می‌شود. کاربردهای موفق DEA را می‌توان در زمینه‌های مختلفی یافت (امروزنژاد و یانگ^{۱۲}، ۲۰۱۸)؛ مانند بانکداری تاناسولیس^{۱۳} (۱۹۹۹)، حمل‌ونقل (چو و همکاران^{۱۴}، ۱۹۹۲)، مراقبت‌های بهداشتی (فیالوس و همکاران^{۱۵}، ۲۰۱۷)، کشاورزی (توما و همکاران^{۱۶}، ۲۰۱۵)، آموزش (نظرکو و ساپاروسکاس^{۱۷}، ۲۰۱۴)، ساخت و تولید (بریک و همکاران^{۱۸}، ۲۰۱۹)، مدیریت زیست‌محیطی (ماتسوموتو و همکاران^{۱۹}، ۲۰۲۰) و بخش انرژی (گاسر و همکاران^{۲۰}، ۲۰۲۰). در واقع، DEA توانایی مدیریت روابط پیچیده بین ورودی‌ها و خروجی‌های کارآکنده‌های مختلف را دارد و در مورد واحدهای مختلف بیان می‌شود؛ درحالی که مفروضات کارکردی را در مورد عوامل لحاظ شده و نیز فرایندهای اساسی و زیربنایی به‌کار نمی‌گیرد (چارنز و همکاران، ۱۹۹۴).

مسئله‌ای که در این مقاله مورد بحث قرار می‌گیرد رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیری برای حالتی است که برخی از داده‌ها غیرقطعی یا فازی هستند. اهمیت رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیری با داده‌های فازی از این واقعیت ناشی می‌شود که نقش مهمی را در تصمیم‌گیری فازی ایفا می‌کند بنابراین به‌نظر می‌رسد که مسئله رتبه‌بندی کامل واحدهای تصمیم‌گیری فازی اهمیت دارد. همان‌طور که می‌دانیم مدل‌های فازی تحلیل پوششی داده‌ها نمرات کارایی متمایزی

¹ Data Envelopment Analysis (DEA)

² Operational Research

³ Non-Parametric Method

⁴ Relative Efficiency

⁵ Decision Making Units (DMUs)

⁶ Cooper et al.

⁷ Labijak-Kowalska & Kadziński

⁸ Production Theory

⁹ Farrell

¹⁰ Charnes et al.

¹¹ The virtual output and the virtual input

¹² Emrouznejad and Yang

¹³ Thanassoulis

¹⁴ Chu et al.

¹⁵ Fiallos et al.

¹⁶ Toma et al.

¹⁷ Nazarko & Šaparauskas

¹⁸ Bracke et al.

¹⁹ Matsumoto et al.

²⁰ Gasser et al.



را با توجه به سطح مختلف α برای واحدهای تصمیم‌گیری در حالت فازی ارائه می‌دهند لذا در این راستا نیاز است که روشی برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیری در محیط فازی ارائه شود که مستقل از مقادیر سطح α باشد. از این‌رو روشی که در این مقاله ارائه می‌شود براساس تحلیل پوششی داده‌های فازی و تکنیک TOPSIS فازی است مقاله به‌صورت زیر ساختار بندی می‌شود: پس از مقدمه، در بخش دوم، ادبیات موضوع مرور می‌شود؛ در بخش سوم، روش پژوهش بیان می‌شود؛ بخش چهارم به یافته‌ها و نتایج اختصاص دارد و بخش پایانی مربوط به نتیجه‌گیری و پیشنهادها سیاستی است.

۲. مروری بر ادبیات موضوع

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) چارلز و همکاران (۱۹۷۸) معرفی کردند، روشی غیرپارامتری برای ارزیابی نسبی واحدهای تصمیم‌گیری (DMUs) با ورودی‌ها و خروجی‌های متعدد است. تحلیل پوششی داده‌ها نسبت خروجی‌های وزنی به ورودی‌های وزنی را در میان واحدهای تصمیم‌گیری محاسبه می‌کند. تحلیل پوششی داده‌ها و تصمیم‌گیری چندمعیاره (MCDM)^۱ ابزارهای کاربردی در کنترل، مدیریت و تصمیم‌گیری‌ها هستند (ون و لی^۲، ۲۰۰۹). یکی از نقاط ضعف مدل‌های پایه‌ای DEA این است که نمی‌تواند بین واحدهای کاراً تمایز قائل شود. یکی از کاربردهای ترکیب DEA و MCDM این است که در رتبه‌بندی^۳ واحدهای تصمیم‌گیری می‌توان از آن بهره‌برداری کرد. همچنین، یکی از محدودیت‌های مدل‌های پایه‌ای DEA، عدم به‌کارگیری مقادیر ورودی و خروجی^۴ (کمّی‌سازی مقادیر دقیق برخی مسائل دنیای واقعی) است. هنگامی که در داده‌های دنیای واقعی ابهام یا بی‌دقتی ذاتی موجود داشته باشد. برای حل این مسئله، منطق فازی (همراه با بهره‌گیری از مفاهیمی چون «فازی و تصادفی»^۵) به‌کار می‌رود تا از طریق ترکیب DEA و TOPSIS به مدیریت داده‌های غیردقیق و مبهم^۶ پردازد؛ بنابراین، داده‌های نامطمئن در DEA و TOPSIS می‌توانند با اعداد فازی مشخص شوند.

بخش قابل‌توجهی از تحقیقات نیز به‌دنبال ترکیب هر دو روش DEA و TOPSIS با «نظریه مجموعه‌های فازی»^۷ برای افزایش اعتبار انتخاب نهایی توسط تصمیم‌گیرندگان بوده است. روش‌های مختلف «تحلیل پوششی داده‌های فازی (FDEA)» برای داده‌های فازی را پژوهش‌گران ارائه کرده‌اند. حاتمی ماریینی و همکاران^۸ (۲۰۱۱) در پژوهش خود به بررسی و مرور کلی روش‌های (FDEA) پرداختند؛ براساس این پژوهش، روش‌های (FDEA) به‌دسته‌های زیر احصا می‌شوند:

- رویکرد تحمل‌پذیری^۹ (سنگوپتا^{۱۰}، ۱۹۹۲؛ تیریانیتس و گرو^{۱۱}، ۱۹۹۸)؛

¹ Multi-Criteria Decision-Making (MCDM)

² Wen & Li

³ Ranking

⁴ Inputs and Outputs

⁵ The Notions of Fuzziness and Randomness

برای بررسی داده‌های نادقیق، مفاهیم فازی و تصادفی در DEA معرفی شدند. مجموعه‌های فازی را می‌توان برای نمایش اطلاعات مبهم یا نادقیق استفاده کرد (Montazeri, 2019: 367).

⁶ Ambiguous or Imprecise Information

⁷ Fuzzy Sets Theory

⁸ Hatami-Marbini et al.

⁹ Tolerance Approach

¹⁰ Sengupta

¹¹ Triantis & Girod

- رویکرد مبتنی بر α -برش و رویکرد رتبه‌بندی فازی (گائو و تاناکا)^۱؛ ۲۰۰۱؛ ساعتی و همکاران^۲، ۲۰۰۲؛ توانا و همکاران^۳، ۲۰۰۳؛ حاتمی- ماریینی، توانا و ابراهیمی، ۲۰۱۱؛ امروزنژاد و همکاران^۴، ۲۰۱۴؛ قاسمی و همکاران^۵، ۲۰۱۵؛
- رویکرد احتمالی^۶ (لرت و وراسیریکول^۷ و همکاران، ۲۰۰۳؛ رویز و سیرون^۸، ۲۰۱۷)؛
- رویکرد محاسباتی فازی^۹ (وانگ و لو^{۱۰}، ۲۰۰۹)؛
- مجموعه‌های تصادفی فازی (توانا و همکاران، ۲۰۱۳).

بیشتر روش‌های (FDEA) شامل فرمول‌های شعاعی^{۱۱}، ورودی‌محور و مضربی هستند. همچنین، روش‌های غیرشعاعی‌ای وجود دارد که عمدتاً مبتنی بر اندازه‌گیری نمودار بهبودیافته راسل (ERG)^{۱۲} و اندازه‌گیری مبتنی بر کمبودها (SBM) و نیز برخی روش‌های افزایشی هستند که از فرم‌های مضربی و پوششی استفاده می‌کنند. در مرور اخیر، از مطالعات DEA فازی که در پژوهش ژو دلبیو، ژوزی^{۱۳} (۲۰۲۰) ارائه شده، برخی از روش‌های DEA فازی موجود در این حوزه امکان رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیری را فراهم می‌کنند.

ساعتی و همکاران (۲۰۰۲) مدل مضربی CCR^{۱۴} ورودی‌محور را در تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) برای داده‌های فازی پیشنهاد دادند. آنها از مجموعه α -برش^{۱۵} برای ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیری استفاده کردند و همچنین، فرم پوششی مدل CCR ورودی‌محور را برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیری با داده‌های فازی فرموله کردند. گائو و تاناکا (۲۰۰۱) اولین کسانی بودند که یک روش رتبه‌بندی را برای اندازه‌گیری کارایی واحدهای تصمیم‌گیری در محیط فازی توسعه دادند. آنها یک مدل CCR فازی معرفی کردند که با استفاده از تعریف سطح امکان و قاعده مقایسه برای اعداد فازی، قيود فازی را به قيود قطعی تبدیل می‌کند. پندی و همکاران^{۱۶} (۲۰۲۳) در پژوهش خود انواع مختلف مسائل تصمیم‌گیری چندمعیاره (MCDM) را با استفاده از روش TOPSIS فازی بررسی کردند. در واقع، تلاش شده،

¹ Guo & Tanaka

² Saati et al.

³ Tavana et al.

⁴ Emrouznejad et al.

⁵ Ghasemi et al.

⁶ Possibility Approach

⁷ Lertworasirikul

⁸ Ruiz & Sirvent

⁹ Fuzzy Arithmetic Approach

¹⁰ Wang & Luo

¹¹ Radial Approaches

¹² An Enhanced DEA Russell Graph Efficiency Measure (ERG=SBM)

اندازه‌گیری نمودار بهبودیافته راسل (پاستور [Pastor] و همکاران، ۲۰۲۲) به‌عنوان یک معیار کارایی جهانی جدید برای غلبه بر مشکلات محاسباتی اندازه‌گیری کارایی فنی نمودار راسل طراحی شده است (فار [Färe] و همکاران، ۱۹۸۵). از لحاظ تاریخی، فارل [Farrell] (۱۹۵۷) اولین معیار کارایی فنی را به‌کار گرفت؛ درحالی‌که فار و لاول [Färe and Lovell] (۱۹۷۸) پس از پیشنهاد برخی ویژگی‌های مطلوبی که یک معیار کارایی فنی ایدئال باید برخوردار باشد، معیار ورودی راسل را برای کارایی فنی پیشنهاد کردند.

¹³ Zhou, W. and Xu, Z.

¹⁴ Fuzzy CCR Model

¹⁵ α -Level

¹⁶ Pandey et al.

مطالعات مختلفی مرور شوند که در آنها از روش TOPSIS استفاده شده یا توسعه‌هایی از آن برای تحلیل مسائل MCDM در دنیای واقعی صورت گرفته است.

ون و لی (۲۰۰۹) مدل‌های DEA فازی را برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیری براساس اعتبار به‌کار بردند. همچنین، ون و همکاران^۱ (۲۰۱۰) یک مدل CCR در DEA معرفی کردند تا واحدهای تصمیم‌گیری را با داده‌های فازی براساس درجه اعتبار رتبه‌بندی کنند. ظرافت‌انگیز و همکاران^۲ (۲۰۱۰) مدل DEA ارائه شده توسط ساعتی و همکاران (۲۰۰۲) را برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیری با داده‌های فازی توسعه دادند.

۳. مروری بر برخی از مفاهیم و روش‌ها

مروری بر DEA

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) روشی برای ارزیابی کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیری (DMUs) است که در آن، هر واحد تصمیم‌گیری چندین ورودی را برای تولید چندین خروجی به‌کار می‌گیرد. در DEA فرض می‌شود که تعداد n واحد تصمیم‌گیری وجود دارد و برای هر واحد تصمیم‌گیری $DMU_j (j = 1, \dots, n)$ یک بردار ستونی از ورودی‌ها X_j لحاظ می‌شود تا یک بردار از خروجی‌ها Y_j تولید شود. در اینجا، X_j به صورت $(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj})$ و Y_j به صورت $(y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{mj})$ تعریف می‌شود. همچنین، فرض بر این است که $X_j \geq 0, X_j \neq 0$ و $Y_j \geq 0, Y_j \neq 0$ برای هر $j = 1, \dots, n$ سطح کارایی نسبی واحد تصمیم‌گیری k ام یعنی، DMU_k توسط مسئله برنامه‌ریزی کسری غیرخطی (۱) ارزیابی می‌شود:

$$h_k = \max \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \quad (1)$$

$$S. t. \quad \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n$$

$$u_r \geq 0, \quad r = 1, \dots, s$$

$$v_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

در مدل (۱)، DMU_k زمانی کارا است که در حالت بهینه، مقدار تابع هدف در معادله (۱) برابر با یک باشد. این مسئله برنامه‌ریزی کسری می‌تواند به یک مسئله برنامه‌ریزی خطی تبدیل شود که در آن، مقدار بهینه تابع هدف، کارایی نسبی DMU_k را تعیین می‌کند. مسئله برنامه‌ریزی خطی که به‌عنوان مدل CCR نیز شناخته می‌شود، به صورت زیر بیان می‌شود:

$$h_k = \max \sum_{r=1}^s u_r y_{rk}$$

$$s. t. \quad \sum_{i=1}^m v_i x_{ik} = 1, \quad (2)$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rk} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ik} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

$$u_r, v_i \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m$$

¹ Wen et al.

² Zerafat Angiz et al.

مدل (۲) می‌تواند با استفاده از هر نرم‌افزار برنامه‌ریزی خطی مانند گمز^۱ حل شود. جواب مدل (۲) به تمام واحدهای تصمیم‌گیری کاراً مقداری برابر با یک اختصاص می‌دهد. مفهوم «ابرقارایی»^۲ برای تمایز کامل بین تمام واحدهای تصمیم‌گیری کاراً در مواردی که چندین واحد کاراً وجود دارند، پیشنهاد شده است. اندرسن و پترسن^۳ (۱۹۹۳) یکی از مدل‌های ابرقارایی را برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیری کاراً در تحلیل پوششی داده‌ها معرفی کردند. این روش به یک واحد ابرقاراً اجازه می‌دهد که با حذف محدودیت k م در مدل برنامه‌ریزی خطی (۳) با فرم پوششی به امتیاز کارایی بیشتر از یک دست یابد.

$$\begin{aligned}
 h_k &= \max \sum_{r=1}^s u_r y_{rk} \\
 \text{s. t.} \quad & \sum_{i=1}^m v_i x_{ik} = 1, \\
 & \sum_{r=1}^s u_r y_{rk} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ik} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad j \neq k \\
 & u_r, v_i \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{۳}$$

مروری بر روش TOPSIS^۴

TOPSIS (سرواژه یا آکرونیم عبارت اصطلاحی «روش‌های ترجیح براساس مشابهت به راه‌حل ایدئال») یکی از شناخته‌شده‌ترین و کاربرپسندترین تکنیک‌ها برای حل مسائل تصمیم‌گیری چندمعیاره (MCDM) است که هوانگ و یون^۵ (۱۹۸۱) آن را پیشنهاد دادند. در این روش، m گزینه به‌وسیله n شاخص ارزیابی می‌شود. منطق اصولی این مدل، راه‌حل ایدئال (مثبت) و راه‌حل ایدئال منفی را تعریف می‌کند؛ بنابراین، شامل انتخاب گزینه‌ای است که به راه‌حل ایدئال مثبت (PIS) نزدیک‌تر و از راه‌حل ایدئال منفی (NIS) دورتر است. راه‌حل ایدئال مثبت با انتخاب حداقل مقدار معیارهای هزینه و حداکثر مقدار معیارهای سود برای هر شاخص تعیین می‌شود؛ درحالی که راه‌حل ایدئال منفی با انتخاب حداکثر مقدار معیارهای هزینه و حداقل مقدار معیارهای سود برای هر شاخص تعریف می‌شود. فرض کنید که m گزینه با نماد A_1, A_2, \dots, A_m و n معیار با نماد C_1, C_2, \dots, C_n وجود دارد و r_{ij} مقدار گزینه A_i نسبت به معیار C_j است. ساختار ماتریس تصمیم^۶ می‌تواند به‌صورت زیر بیان شود؛ در ادامه، مراحل روش TOPSIS گزارش می‌شود:

ماتریس تصمیم‌گیری

| Alternative | Attribute | | | |
|-------------|-----------|----------|----------|----------|
| | C_1 | C_2 | ... | C_n |
| A_1 | x_{11} | x_{12} | ... | x_{1n} |
| A_2 | x_{21} | x_{22} | ... | x_{2n} |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots |
| A_m | x_{m1} | x_{m2} | ... | x_{mm} |

¹ GAMS

² Super- Efficiency

³ Andersen and Petersen (Anderson Peterson Method for Measuring Super Efficiency)

⁴ Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution (TOPSIS)

⁵ Hwang and Yoon

⁶ Decision Matrix

مرحله ۱

تبدیل ماتریس تصمیم به ماتریس تصمیم نرمال شده. ماتریس تصمیم $X = (x_{ij})_{m \times n}$ را به ماتریس نرمال شده $R = (r_{ij})_{m \times n}$ تبدیل می‌کنیم که مقدار نرمال شده r_{ij} با استفاده از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$r_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m x_{ij}^2}}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

مرحله ۲

ایجاد ماتریس تصمیم نرمال شده وزن دار. ماتریس تصمیم نرمال شده وزن دار را با نماد $V = (v_{ij})_{m \times n}$ نشان می‌دهیم، مقدار نرمال شده وزن دار به صورت زیر تعیین می‌شود و وزن معیار C_j با ω_j مشخص می‌شود:

$$v_{ij} = \omega_j r_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (5)$$

بردار وزن می‌تواند توسط تصمیم گیرنده یا با استفاده از روش‌های سیستماتیک تعیین شود. یکی از روش‌های سیستماتیک برای تعیین وزن معیارها، روش انتروپی^۱ است. انتروپی یک مفهوم اصلی در علم فیزیک، علوم اجتماعی و نظریه اطلاعات است که میزان عدم اطمینان اطلاعات مورد انتظار یک سیگنال را نشان می‌دهد. در نظریه اطلاعات، انتروپی معیاری برای توضیح میزان عدم اطمینان بر اساس توزیع احتمالی گسسته است؛ بنابراین، عدم اطمینان فراتر از یک توزیع فراوانی است.

مرحله ۳

تعیین راه‌حل‌های ایدئال مثبت و منفی. راه‌حل‌های ایدئال مثبت و منفی به ترتیب به صورت زیر مشخص می‌شوند:

$$A^* = (v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*) \quad \text{وقتی که} \quad v_j^* = \begin{cases} \max_i \{v_{ij}\}, & \text{اگر شاخص } j \text{ از جنس سود باشد} \\ \min_i \{v_{ij}\}, & \text{اگر شاخص } j \text{ از جنس هزینه باشد} \end{cases} \quad (6)$$

$$A^- = (v_1^-, v_2^-, \dots, v_n^-) \quad \text{وقتی که} \quad v_j^- = \begin{cases} \min_i \{v_{ij}\}, & \text{اگر شاخص } j \text{ از جنس هزینه باشد} \\ \max_i \{v_{ij}\}, & \text{اگر شاخص } j \text{ از جنس سود باشد} \end{cases} \quad (7)$$

مرحله ۴

محاسبه فاصله جواب‌های ایدئال مثبت و منفی از هر گزینه A_i برای $(i = 1, 2, \dots, m)$ با استفاده از فرمول‌های زیر:

$$d_i^* = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^*)^2}, \quad 1, 2, \dots, m, \quad (8)$$

$$d_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^-)^2}, \quad 1, 2, \dots, m, \quad (9)$$

^۱ روش انتروپی (Entropy) یکی از روش‌های تصمیم‌گیری چندمعیاره برای محاسبه وزن معیارهاست. مفهوم انتروپی اطلاعات توسط کلود شانون (Claude Shannon) در مقاله‌ای در سال ۱۹۴۸ با عنوان «نظریه ریاضی ارتباطات» (A Mathematical Theory of Communication) معرفی شد و به انتروپی شانون نیز گفته می‌شود.

^۲ Information Theory

مرحله ۵

محاسبه میزان نزدیکی نسبی گزینه A_i به راه‌حل ایدئال به صورت زیر:

$$cl_i = \frac{d_i^-}{d_i^- + d_i^*} \quad (10)$$

مرحله ۶

رتبه‌بندی گزینه‌ها به ترتیب، نزولی مقادیر cl_i ، گزینه‌ای که مقدار cl_i آن حداکثر است، بهترین گزینه است.

نظریه مجموعه‌های فازی

تعریف ۱: یک عدد فازی تابعی است به صورت $\tilde{u}: R \rightarrow [0,1]$ که ویژگی‌های زیر را دارد:

- \tilde{u} نرمال^۱ است؛ به این معنا که عدد $\exists x_0 \in R$ وجود دارد که $\tilde{u}(x_0) = 1$ ؛
- \tilde{u} یک مجموعه فازی محدب^۲ است؛
- $\forall x, y \in R, \lambda \in [0,1], (i. e. \tilde{u}(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{\tilde{u}(x), \tilde{u}(y)\})$ ؛
- \tilde{u} نیمه پیوسته بالا روی R است؛
- بستار پشتیبان \tilde{u} ، یعنی $\overline{\{x \in R: \tilde{u}(x) > 0\}}$ یک مجموعه فشرده است.

مجموعه همه اعداد فازی با E نشان داده می‌شود. برای $0 < r \leq 1$ برش یک عدد فازی بازه‌های بسته $[\tilde{u}]^\alpha = \{x \in R: \tilde{u}(x) \geq \alpha\}$ و $[\tilde{u}]^\alpha = [\underline{\tilde{u}}(\alpha), \overline{\tilde{u}}(\alpha)]$ را تشکیل می‌دهند. این بازه‌ها نشان‌دهنده نمایش LU یک عدد فازی^۳ هستند که $\underline{\tilde{u}}$ و $\overline{\tilde{u}}$ به‌عنوان توابع $\underline{\tilde{u}}, \overline{\tilde{u}}: [0,1] \rightarrow R$ لحاظ می‌شوند؛ به طوری که $\underline{\tilde{u}}$ افزایشی و $\overline{\tilde{u}}$ کاهشی است.

تعریف ۲: یک عدد فازی $\tilde{u} = (a, b, c)$ به‌عنوان یک عدد فازی مثلثی طبقه‌بندی می‌شود؛ هنگامی که تابع عضویت آن به صورت زیر تعریف شود:

$$\mu_{\tilde{u}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b, \\ \frac{c-x}{c-b} & b \leq x \leq c, \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (11)$$

α - سطح‌های متناظر آن به صورت $[\tilde{u}]^\alpha = [a + (b-a)\alpha, c - (c-b)\alpha]$ مشخص می‌شوند. مجموعه همه اعداد فازی مثلثی به‌عنوان TFN شناخته می‌شود. یک عدد فازی مثلثی $\tilde{u} = (a, b, c)$ غیرمنفی طبقه‌بندی می‌شود اگر و تنها اگر $a \geq 0$ زیرمجموعه اعداد فازی مثلثی غیرمنفی به‌عنوان TFN_+ شناخته می‌شود.

تعریف ۳ (به نقل از Bede^۴، ۲۰۱۳): لحاظ دو عدد فازی مثلثی $\tilde{u}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ از TFN، $\tilde{u}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ از TFN و مقیاس‌پذیر $\lambda \in R$ ، عملیات حسابی به‌طور معمول، به صورت زیر تعریف می‌شود:

¹ Normal
² Convex
³ Fuzzy Number
⁴ Bede

$$\begin{aligned}
 (i) \quad & \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2), \\
 (ii) \quad & \lambda \tilde{u}_1 = \begin{cases} (\lambda a_1, \lambda b_1, \lambda c_1) & \lambda \geq 0, \\ (\lambda c_1, \lambda b_1, \lambda a_1) & \lambda < 0, \end{cases} \\
 (iii) \quad & \tilde{u}_1 \tilde{u}_2 = [\min\{a_1 a_2, a_1 c_2, c_1 a_2, c_1 c_2\}, b_1 b_2, \max\{a_1 a_2, a_1 c_2, c_1 a_2, c_1 c_2\}], \\
 (iii) \quad & \frac{\tilde{u}_1}{\tilde{u}_2} = (a_1, b_1, c_1) \left(\frac{1}{c_2}, \frac{1}{b_2}, \frac{1}{a_2} \right), \quad \tilde{0} \notin \text{supp}(\tilde{u}_2)
 \end{aligned} \tag{12}$$

تعریف ۴ (به نقل از چن^۱، ۲۰۰۰): لحاظ دو عدد فازی مثلثی $\tilde{u}_1 = (a_1, b_1, c_1) \in TFN$ و $\tilde{u}_2 = (a_2, b_2, c_2) \in TFN$ از فاصله بین آنها با فرمول زیر تعریف می‌شود:

$$d(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = \sqrt{\frac{1}{3} [(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_2 - b_3)^2]}. \tag{13}$$

باید توجه داشت که در حالت خاص دو عدد فازی مثلثی غیرمنفی \tilde{u}_1 و \tilde{u}_2 ضرب آنها به صورت $\tilde{u}_1 \tilde{u}_2 = [a_1 a_2, b_1 b_2, c_1 c_2]$ است. در بخش TOPSIS فازی این تحقیق، فرض می‌شود که مقادیر ورودی و خروجی TFN هستند.

مروری بر روش DEA فازی

در ادامه، مدل‌های اولیه و دوگان CCR فازی معرفی می‌شود. فرض کنید که n واحد تصمیم‌گیری (DMUs) وجود دارد که هر DMU_j ($j = 1, \dots, n$) دارای ورودی‌های فازی به صورت $\tilde{X}_j = (\tilde{x}_{1j}, \tilde{x}_{2j}, \dots, \tilde{x}_{mj})$ و خروجی‌های فازی به صورت $\tilde{Y}_j = (\tilde{y}_{1j}, \tilde{y}_{2j}, \dots, \tilde{y}_{mj})$ است؛ علاوه بر این، تمام عناصر بردار ورودی و بردار خروجی هر DMU_j اعداد فازی مثلثی غیرمنفی هستند. مدل اولیه CCR فازی در نسخه ورودی‌محور به صورت مدل (۱۴) نمایش داده می‌شوند:

$$\begin{aligned}
 h_k &= \min \theta_k \\
 \text{s. t.} \quad & \sum_{j=1}^m \lambda_j \tilde{x}_{ij} \leq \theta_{j0} \tilde{x}_{ik}, \quad i = a, 2, \dots, m, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j \tilde{y}_{rj} \leq \tilde{y}_{rk}, \quad j = 1, \dots, n, \quad r = 1, 2, \dots, s, \\
 & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{14}$$

دوگان مدل CCR فازی بالا در حالت ورودی‌محور به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}
 h_k &= \max \sum_{r=1}^s u_r \tilde{y}_{rk} \\
 \text{s. t.} \quad & \sum_{r=1}^m v_i \tilde{x}_{ik} = \tilde{1}, \\
 & \sum_{r=1}^s u_r \tilde{y}_{rj} - \sum_{r=1}^m v_i \tilde{x}_{ij} \leq \tilde{0}, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & u_r, v_i \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{15}$$

با اضافه کردن محدودیت $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ به مجموعه محدودیت‌های مدل (۱۴)، مدل BCC فازی به دست می‌آید و با اضافه کردن متغیر اضافی u_0 به تابع هدف و طرف چپ محدودیت دوم مجموعه محدودیت‌های مدل دوگان (۱۵)، مدل دوگان BCC فازی به دست می‌آید. ساعتی و همکاران (۲۰۰۲) مدل CRS فازی را به عنوان یک مسئله برنامه‌ریزی

¹ Chen

امکانی پیشنهاد دادند و آن را با استفاده از رویکرد مبتنی بر α - برش به یک مسئله برنامه‌ریزی فاصله‌ای تبدیل کردند. مسئله برنامه‌ریزی فاصله‌ای حاصل می‌تواند به‌عنوان یک مدل برنامه‌ریزی خطی دقیق برای یک سطح α خاص با برخی از جایگزینی‌های متغیر حل شود. مدل زیر که توسط ساعتی و همکاران (۲۰۰۲) پیشنهاد شده است، برای حالت خاصی که ورودی‌ها و خروجی‌ها اعداد فازی مثلثی هستند، ارائه شده است:

$$\begin{aligned}
 h_{j0} &= \max \sum_{r=1}^s y'_{rj0} \\
 \text{s. t. } & \sum_{i=1}^m x'_{ij} = 1, \\
 & \sum_{r=1}^s y'_{rj} - \sum_{i=1}^m x'_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & v_i(\alpha x_{ij}^M + (1 - \alpha)x_{ij}^L) \leq x'_{ij} \leq v_i(\alpha x_{ij}^M + (1 - \alpha)x_{ij}^U), \quad j = 1, \dots, n, \\
 & u_r(\alpha x_{ij}^M + (1 - \alpha)x_{ij}^L) \leq y'_{ij} \leq u_r(\alpha x_{ij}^M + (1 - \alpha)x_{ij}^U), \quad j = 1, \dots, n, \\
 & u_r, v_i \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m,
 \end{aligned} \tag{۱۶}$$

مروری بر روش TOPSIS فازی

در بسیاری از مواقع، تعیین دقیق رتبه‌بندی عملکرد یک گزینه برای معیارهای مورد نظر برای تصمیم‌گیرنده دشوار است. مزیت استفاده از رویکرد فازی این است که اهمیت نسبی معیارها با استفاده از اعداد فازی، به‌جای اعداد دقیق، تعیین می‌شود. چن (۲۰۰۰) در پژوهش خود، روش TOPSIS را به‌گونه‌ای گسترش داد که شامل اعداد فازی شود؛ نکته مهم این است که روش وی به‌خصوص برای تصمیم‌گیری گروهی در شرایط عدم اطمینان مناسب است. در روش TOPSIS فازی، مقادیر ویژگی‌ها به‌عنوان اعداد فازی نمایش داده می‌شوند. فرآیند TOPSIS فازی شامل مراحل زیر است:

مرحله ۱: تخصیص رتبه به معیارها و گزینه‌ها

فرض کنید K گروه تصمیم‌گیری وجود دارد. هر تصمیم‌گیرنده k یک رتبه‌بندی فازی $\tilde{x}_{ij}^k = (a_{ij}^k, b_{ij}^k, c_{ij}^k)$ به گزینه A_i نسبت به معیار C_j اختصاص می‌دهد و اهمیت معیار C_j یک وزن فازی $\tilde{\omega}_j^k = (\omega_{j1}^k, \omega_{j2}^k, \omega_{j3}^k)$ داده می‌شود. هر دو رتبه‌بندی کیفی و وزن‌های اهمیت به‌صورت متغیرهای زبانی بیان می‌شوند که به اعداد فازی مثلثی تبدیل می‌شوند، همان‌طور که در جداول (۱ و ۲) نشان داده شده است. این متغیرهای زبانی توسط تصمیم‌گیرندگان برای وزن‌دهی معیارها استفاده می‌شوند.

جدول ۱. اصطلاحات زبانی برای رتبه‌بندی گزینه‌ها

| اصطلاح زبانی | عدد فازی مثلثی |
|----------------|----------------|
| خیلی خوب (VG) | (۹, ۱۰, ۱۰) |
| خوب (G) | (۷, ۹, ۱۰) |
| متوسط خوب (MG) | (۵, ۷, ۹) |
| متوسط (F) | (۳, ۵, ۷) |

| اصطلاح زبانی | عدد فازی مثلثی |
|-----------------|----------------|
| ضعیف متوسط (MP) | (۱، ۳، ۵) |
| ضعیف (P) | (۰، ۱، ۳) |
| خیلی ضعیف (VP) | (۰، ۰، ۱) |

منبع: چن، ۲۰۰۰.

جدول ۲. اصطلاحات زبانی برای وزن هر معیار

| اصطلاح زبانی | عدد فازی مثلثی |
|------------------|-----------------|
| خیلی بالا (VH) | (۰/۹، ۱، ۰/۹) |
| بالا (H) | (۰/۷، ۰/۹، ۱) |
| متوسط بالا (MH) | (۰/۵، ۰/۷، ۰/۹) |
| متوسط (M) | (۰/۳، ۰/۵، ۰/۷) |
| متوسط پایین (ML) | (۰/۱، ۰/۳، ۰/۵) |
| پایین (L) | (۰، ۰/۱، ۰/۳) |
| خیلی پایین (VL) | (۰، ۰، ۰/۱) |

منبع: چن، ۲۰۰۰.

مرحله ۲: محاسبه نرخ فازی گزینه‌ها و اهمیت فازی وزن معیارها

نرخ فازی گزینه‌ها و اهمیت فازی وزن معیارها با استفاده از روابط (۱۶ و ۱۷) محاسبه می‌شوند:

$$\tilde{x}_{ij} = \frac{\tilde{x}_{ij}^1 + \tilde{x}_{ij}^2 + \dots + \tilde{x}_{ij}^K}{K} \quad (17)$$

$$\tilde{\omega}_{ij} = \frac{\omega_j^1 + \omega_j^2 + \dots + \omega_j^K}{K} \quad (18)$$

مرحله ۳: محاسبه ماتریس تصمیم فازی نرمال شده

ماتریس تصمیم فازی نرمال شده به صورت $\tilde{R} = [\tilde{r}_{ij}]_{m \times n}$ محاسبه می‌شود که در آن:

$$\tilde{r}_{ij} = \left(\frac{a_{ij}}{c_j^*}, \frac{b_{ij}}{c_j^*}, \frac{c_{ij}}{c_j^*} \right), \quad c_j^* = \max_i \{c_{ij}\} \quad \text{و} \quad j \quad \text{معیار منفعت} \quad (19)$$

یا

$$\tilde{r}_{ij} = \left(\frac{c_j^-}{c_{ij}}, \frac{c_j^-}{b_{ij}}, \frac{c_j^-}{a_{ij}} \right), \quad c_j^- = \min_i \{c_{ij}\} \quad \text{و} \quad j \quad \text{معیار هزینه} \quad (20)$$

مرحله ۴: ساخت ماتریس تصمیم فازی نرمال شده وزن دار

ماتریس تصمیم فازی نرمال شده وزن دار به صورت $\tilde{V} = [\tilde{v}_{ij}]_{m \times n}$ نمایش داده می‌شود که در آن $\tilde{v}_{ij} = \tilde{r}_{ij} \omega_j$ است.

مرحله ۵: تعریف راه‌حل ایده‌آل مثبت فازی FPIS و راه‌حل ایده‌آل منفی فازی FNIS

راه‌حل‌های ایده‌آل مثبت و منفی فازی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A^* = (\tilde{v}_1^*, \tilde{v}_2^*, \dots, \tilde{v}_n^*), \quad \tilde{v}_j^* = \begin{cases} \max_i \{\tilde{v}_{ij}\} & \text{معیار منفعت است } j \text{ اگر} \\ \min_i \{\tilde{v}_{ij}\} & \text{معیار هزینه است } j \text{ اگر} \end{cases} \quad (21)$$

$$A^- = (\tilde{v}_1^-, \tilde{v}_2^-, \dots, \tilde{v}_n^-), \quad \tilde{v}_j^- = \begin{cases} \min_i \{\tilde{v}_{ij}\} & \text{معیار منفعت است } j \text{ اگر} \\ \max_i \{\tilde{v}_{ij}\} & \text{معیار هزینه است } j \text{ اگر} \end{cases} \quad (22)$$

که در آن:

$$\max_i \{\tilde{v}_{ij}\} = (\max_i \{v_{ij}^1\}, \max_i \{v_{ij}^2\}, \max_i \{v_{ij}^3\})$$

و

$$\min_i \{\tilde{v}_{ij}\} = (\min_i \{v_{ij}^1\}, \min_i \{v_{ij}^2\}, \min_i \{v_{ij}^3\})$$

مرحله ۶: تعیین فاصله هر گزینه A_i با FPIS و FNIS

فاصله هر گزینه $A_i (i = 1, 2, \dots, m)$ از FPIS و FNIS با استفاده از روابط (۲۳ و ۲۴) تعیین می‌شود:

$$d_i^* = \sum_{j=1}^n d(\tilde{v}_{ij}, \tilde{v}_j^-), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (23)$$

$$d_i^- = \sum_{j=1}^n d(\tilde{v}_{ij}, \tilde{v}_j^*), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (24)$$

مرحله ۷: محاسبه ضریب نزدیکی CC_i برای هر گزینه A_i

ضریب نزدیکی CC_i برای هر گزینه A_i به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$CC_i = \frac{d_i^-}{d_i^- + d_i^*} \quad (25)$$

مرحله ۸: رتبه‌بندی گزینه‌ها

گزینه‌ها براساس مقادیر ضریب نزدیکی به گزینه ایده‌آل به ترتیب نزولی مرتب می‌شوند.

۴. روش رتبه‌بندی براساس DEA-TOPSIS فازی

در این بخش، روش پیشنهادی با استفاده از الگوریتمی برای رتبه‌بندی تمامی واحدهای تصمیم‌گیری (DMUs) در محیط فازی توضیح داده شده است. این روش بر مبنای ترکیب روش‌های DEA فازی و TOPSIS فازی است که آن را روش DEA-TOPSIS فازی می‌نامیم. روش DEA-TOPSIS فازی می‌تواند برای رتبه‌بندی DMUها با خروجی‌های نامطلوب نیز استفاده شود. این روش DEA-TOPSIS فازی شامل هفت مرحله به شرح زیر است:

مرحله اول: تعیین گزینه‌ها و معیارها

در این مرحله، DMUها به عنوان گزینه‌ها و متغیرهای ورودی به عنوان معیارهای هزینه (ویژگی‌های منفی) و متغیرهای خروجی به عنوان معیارهای سود (ویژگی‌های مثبت) لحاظ می‌شوند؛ زیرا کارایی یک DMU با افزایش مقادیر برای خروجی‌ها و کاهش مقادیر برای ورودی‌ها افزایش می‌یابد؛

مرحله دوم: ساختن ماتریس تصمیم‌گیری

ماتریسی براساس داده‌های ورودی و خروجی تمامی واحدهای تصمیم‌گیری (DMUs) ایجاد می‌کنیم. در این مرحله، ماتریس تصمیم ساخته می‌شود. هر DMU به عنوان یک گزینه محسوب می‌گردد که به هر ردیف این ماتریس مرتبط است و هر ویژگی یک ورودی یا خروجی است که به هر ستون این ماتریس مربوط می‌شود؛ بنابراین، ماتریس تصمیم دارای n ردیف و $m + s$ ستون است؛



مرحله سوم: نرمال‌سازی ماتریس تصمیم‌گیری

ماتریس تصمیم را با استفاده از فرمول‌های زیر نرمال‌سازی^۱ کنید:

$$\tilde{r}_{ij} = \left(\frac{a_{ij}}{c_j^*}, \frac{b_{ij}}{c_j^*}, \frac{c_{ij}}{c_j^*} \right), \quad c_j^* = \max_i \{c_{ij}\} \quad \text{و} \quad j \quad \text{معیار منفعت است (برای خروجی‌های مطلوب)} \quad (26)$$

یا

$$\tilde{r}_{ij} = \left(\frac{c_j^-}{c_j^-}, \frac{c_j^-}{b_{ij}}, \frac{c_j^-}{a_{ij}} \right), \quad c_j^- = \min_i \{c_{ij}\} \quad \text{و} \quad j \quad \text{معیار هزینه است (برای ورودی‌ها یا خروجی‌های نامطلوب)} \quad (27)$$

در این مقاله، وزن فازی (۱، ۱، ۰/۹) برای تمام معیارها لحاظ شده است؛ بنابراین، $\tilde{V} = [\tilde{v}_{ij}]_{n \times (m+s)}$ که در آن

$$\tilde{v}_{ij} = \tilde{r}_{ij}(\omega_j)$$

مرحله چهارم: تعیین کردن نقاط ایده‌آل مثبت فازی A^* (FPIS) و نقاط ایده‌آل منفی فازی A^- (FNIS)

نقاط ایدئال مثبت فازی A^* (FPIS) و نقاط ایده‌آل منفی فازی A^- (FNIS) را به صورت زیر تعیین کنید:

$$A^* = (\tilde{v}_1^*, \tilde{v}_2^*, \dots, \tilde{v}_{m+s}^*), \quad \tilde{v}_j^* = \begin{cases} \max_i \{\tilde{v}_{ij}\} & \text{معیار منفعت است } j \text{ اگر} \\ \min_i \{\tilde{v}_{ij}\} & \text{معیار هزینه است } j \text{ اگر} \end{cases} \quad (28)$$

$$A^- = (\tilde{v}_1^-, \tilde{v}_2^-, \dots, \tilde{v}_{m+s}^-), \quad \tilde{v}_j^- = \begin{cases} \min_i \{\tilde{v}_{ij}\} & \text{معیار منفعت است } j \text{ اگر} \\ \max_i \{\tilde{v}_{ij}\} & \text{معیار هزینه است } j \text{ اگر} \end{cases} \quad (29)$$

که در آن:

$$\max_i \{\tilde{v}_{ij}\} = (\max_i \{v_{ij}^1\}, \max_i \{v_{ij}^2\}, \max_i \{v_{ij}^3\})$$

و

$$\min_i \{\tilde{v}_{ij}\} = (\min_i \{v_{ij}^1\}, \min_i \{v_{ij}^2\}, \min_i \{v_{ij}^3\})$$

مرحله پنجم: تعیین کردن فاصله‌های فاصله‌های d^* و d^- را برای هر DMU

فاصله‌های d^* و d^- را برای هر DMU تعیین کنید که d^* فاصله از FPIS و d^- فاصله از FNIS را نشان می‌دهد و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$d_i^* = \sum_{j=1}^{m+s} d(\tilde{v}_{ij}, \tilde{v}_j^*), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (30)$$

$$d_i^- = \sum_{j=1}^{m+s} d(\tilde{v}_{ij}, \tilde{v}_j^-), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (31)$$

مرحله ششم: تعیین کردن ضریب نزدیکی هر DMU به FPIS

ضریب نزدیکی هر DMU به FPIS را تعیین کنید که با cl_i^* نشان داده می‌شود که در آن:

$$cl_i^* = \frac{d_i^-}{d_i^- + d_i^*}, \quad 0 < cl_i^* < 1. \quad (32)$$

مرحله هفتم: رتبه‌بندی جایگزین‌ها (DMUs) براساس ترتیب نزولی cl_i^*

جایگزین‌ها (DMUs) را براساس ترتیب نزولی cl_i^* رتبه‌بندی کنید.

¹ Normalize

۵. مثال‌های عددی

برای نشان دادن اثربخشی و قابلیت روش پیشنهادی، دو مثال عددی ارائه می‌شود: اولین مثال، را گائو و تاناکا (۲۰۰۱) ارائه شده کرده‌اند، شامل دو ورودی فازی و دو خروجی فازی به صورت اعداد فازی مثلثی هستند که مجموعه داده‌ها در جدول (۳) آمده است. همچنین، این داده‌ها در مطالعه ساعتی و همکاران (۲۰۰۲) استفاده شده‌اند؛ مثال دوم را اولین بار پیوری و یاداو^۱ (۲۰۱۳) ارائه کرده‌اند، شامل دو ورودی فازی، دو خروجی فازی مطلوب و یک خروجی فازی نامطلوب است که مجموعه داده‌ها در جدول ۴ به صورت اعداد فازی مثلثی نشان داده شده‌اند.

مثال ۱:

جدول ۳ داده‌های ورودی و خروجی فازی برای پنج واحد تصمیم‌گیری (DMU) را فراهم می‌کند که همه اعداد فازی متقارن هستند. با استفاده از اطلاعات جدول ۳، روش پیشنهادی برای رتبه‌بندی همه DMU ها اعمال می‌شود.

جدول ۳. داده‌های پنج واحد تصمیم‌گیری

| DMU | I1 | I2 | O1 | O2 |
|-----|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| D1 | (۳/۵، ۴/۴/۵) | (۱/۹، ۲/۱، ۲/۳) | (۲/۴، ۲/۶، ۲/۸) | (۳/۸، ۴/۱، ۴/۴) |
| D2 | (۲/۹، ۲/۹، ۲/۹) | (۱/۴، ۱/۵، ۱/۶) | (۲/۲، ۲/۲، ۲/۲) | (۳/۳، ۳/۵، ۳/۷) |
| D3 | (۴/۴، ۴/۹، ۵/۴) | (۲/۲، ۲/۶، ۳/۰) | (۲/۷، ۳/۲، ۳/۷) | (۴/۳، ۵/۱، ۵/۹) |
| D4 | (۳/۴، ۴/۱، ۴/۸) | (۲/۲، ۲/۳، ۲/۴) | (۲/۵، ۲/۹، ۳/۳) | (۵/۵، ۵/۷، ۵/۹) |
| D5 | (۵/۹، ۶/۵، ۷/۱) | (۳/۶، ۴/۱، ۴/۶) | (۴/۴، ۵/۱، ۵/۸) | (۶/۵، ۷/۴، ۸/۳) |

منبع: گائو و تاناکا، ۲۰۰۱؛ ساعتی و همکاران، ۲۰۰۲.

با توجه به الگوریتم پیشنهادی، جدول ۳ همان ماتریس تصمیم فازی با ۵ گزینه (تعداد DMUها) و ۴ معیار (تعداد ورودی‌ها و خروجی‌های فازی) است. این مرحله مربوط به مرحله اول است. براساس مرحله دوم، ماتریس تصمیم فازی نرمال شده به دست می‌آید و نتایج در جدول ۴ گنجانده شده‌اند. در این مثال، وزن‌های فازی یکسان برای هر گزینه به صورت (۱، ۱، ۱) لحاظ می‌شوند؛ بنابراین، ماتریس تصمیم فازی نرمال شده به صورت زیر است.

جدول ۴. ماتریس تصمیم فازی نرمال شده با ۵ گزینه و ۴ معیار

| DMU | I1 | I2 | O1 | O2 |
|-----|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| D1 | (۰/۶۴، ۰/۷۳، ۰/۸۳) | (۰/۶۱، ۰/۶۷، ۰/۷۴) | (۰/۴۱، ۰/۴۵، ۰/۴۸) | (۰/۴۶، ۰/۴۹، ۰/۵۳) |
| D2 | (۱، ۱، ۱) | (۰/۸۸، ۰/۹۳، ۱) | (۰/۳۸، ۰/۳۸، ۰/۳۸) | (۰/۴۰، ۰/۴۲، ۰/۴۵) |
| D3 | (۰/۵۴، ۰/۵۹، ۰/۶۶) | (۰/۴۷، ۰/۵۴، ۰/۶۴) | (۰/۴۷، ۰/۵۵، ۰/۶۴) | (۰/۵۲، ۰/۶۱، ۰/۷۱) |
| D4 | (۰/۶۰، ۰/۷۱، ۰/۸۵) | (۰/۵۶، ۰/۶۱، ۰/۶۷) | (۰/۴۳، ۰/۵۰، ۰/۵۷) | (۰/۶۶، ۰/۶۹، ۰/۷۱) |
| D5 | (۰/۴۱، ۰/۴۵، ۰/۴۹) | (۰/۳۰، ۰/۳۴، ۰/۳۹) | (۰/۷۶، ۰/۸۸، ۱) | (۰/۷۸، ۰/۸۹، ۱) |

منبع: یافته‌های پژوهش

¹ Puri and Yadav

با اعمال مرحله سوم بر جدول ۴، فاصله‌های d^* و d^- برای هر گزینه (DMU) از راه‌حل‌های ایدئال فازی به دست می‌آیند؛ سپس، مقادیر نزدیکی نسبی هر گزینه (cl_i^*) طبق مرحله چهارم به دست می‌آیند؛ در ادامه، نتایج در جدول (۵) ارائه شده است؛ افزون‌براین، نتایج رتبه‌بندی نیز عرضه شده است.

جدول ۵. نتایج رتبه‌بندی براساس روش پیشنهادی برای مثال اول

| DMU | d^* | d^- | cl_i^* | رتبه |
|-----|--------|--------|----------|------|
| D1 | ۱/۴۵۵۶ | ۰/۶۶۳۴ | ۰/۳۱۳۱ | ۴ |
| D2 | ۲/۱۰۶۶ | ۰/۱۳۰۳ | ۰/۰۵۸۳ | ۵ |
| D3 | ۱/۰۰۱۸ | ۱/۱۳۷۰ | ۰/۵۳۱۶ | ۲ |
| D4 | ۱/۱۵۸۳ | ۰/۹۷۴۵ | ۰/۴۵۶۹ | ۳ |
| D5 | ۰/۱۹۶۷ | ۲/۰۴۵۹ | ۰/۹۱۲۳ | ۱ |

منبع: یافته‌های پژوهش

در جدول (۶) نتایج روش پیشنهادی و نتایج رتبه‌بندی فازی که در منبع ساعتی و همکاران (۲۰۰۲) ذکر شده‌اند، در مقام مقایسه عرضه شده‌اند. ردیف نهایی جدول (۶) نتایج رتبه‌بندی مشتق از روش پیشنهادی را نشان می‌دهد.

جدول ۶. مقایسه با روش تحلیل پوششی داده‌های فازی (DEA) برای رتبه‌بندی DMU ها

| | α -سطح | D1 | D2 | D3 | D4 | D5 |
|---------------------------|---------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| ساعتی و همکاران (۲۰۰۲) | ۰ | ۱/۱۱ | ۱/۲۴ | ۱/۲۸ | ۱/۵۲ | ۱/۳۰ |
| | ۰/۵ | ۰/۹۶ | ۱/۱۱ | ۱/۰۳ | ۱/۲۶ | ۱/۱۶ |
| | ۰/۷۵ | ۰/۹۰ | ۱/۰۵ | ۰/۹۳ | ۱/۱۳ | ۱/۱۰ |
| | ۱ | ۰/۸۵ | 1 | ۰/۸۶ | ۱ | 1 |
| روش ارائه‌شده | - | ۰/۳۴۷۲ | ۰/۲۶۱۲ | ۰/۴۰۹۴ | ۰/۵۶۳۹ | ۰/۳۵۴۲ |

منبع: یافته‌های پژوهش

باید توجه داشت که روش پیشنهادی مستقل از سطح α است؛ بنابراین، روش پیشنهادی نتایج رتبه‌بندی یکتایی برای همه DMU ها ارائه می‌دهد. همچنین، DMU_1 و DMU_2 در هر دو روش، به ترتیب دارای رتبه پنجم و چهارم هستند؛ اما، رتبه‌بندی مابقی DMU ها در دو روش ساعتی و همکاران (۲۰۰۲) با روش ارائه شده متفاوت است.

مثال ۲:

برای نشان دادن توانایی روش پیشنهادی در مدیریت متغیرهای خروجی نامطلوب، از مجموعه داده‌ای شامل دوازده DMU که توسط پیوری و یاداو (۲۰۱۳) ارائه شده است، بهره گرفته می‌شود. این مجموعه داده شامل دو ورودی، دو خروجی مطلوب و یک خروجی نامطلوب است که همه به صورت اعداد فازی مثلثی در جدول ۷ نشان داده شده‌اند.

جدول ۷. داده‌های دوازده DMU

| DMU | I1 | I2 | O1 (مطلوب) | O2 (مطلوب) | O3 (نامطلوب) |
|-----|--------------|-----------------|-----------------|-----------------|---------------|
| ۱ | (۱۶، ۲۰، ۲۲) | (۱۵۰، ۱۵۱، ۱۵۲) | (۹۵، ۱۰۰، ۱۰۲) | (۸۷، ۹۰، ۹۴) | (۱، ۱، ۱) |
| ۲ | (۱۸، ۱۹، ۲۰) | (۱۳۰، ۱۳۱، ۱۳۲) | (۱۴۹، ۱۵۰، ۱۵۱) | (۴۶، ۵۰، ۵۲) | (۱، ۲، ۲/۵) |
| ۳ | (۲۳، ۲۵، ۲۸) | (۱۵۸، ۱۶۰، ۱۶۲) | (۱۵۸، ۱۶۰، ۱۶۳) | (۵۳، ۵۵، ۵۶) | (۱/۴، ۲، ۳) |
| ۴ | (۲۶، ۲۷، ۲۹) | (۱۶۵، ۱۶۸، ۱۶۹) | (۱۷۷، ۱۸۰، ۱۸۱) | (۷۰، ۷۲، ۷۵) | (۱، ۱، ۱) |
| ۵ | (۲۰، ۲۲، ۲۵) | (۱۵۵، ۱۵۸، ۱۶۲) | (۹۰، ۹۴، ۹۸) | (۶۳، ۶۶، ۶۸) | (۳، ۵، ۶) |
| ۶ | (۵۲، ۵۵، ۵۹) | (۲۵۰، ۲۵۵، ۲۵۹) | (۲۲۲، ۲۳۰، ۲۳۵) | (۸۳، ۹۰، ۹۵) | (۳، ۴، ۵) |
| ۷ | (۳۰، ۳۳، ۳۴) | (۲۳۴، ۲۳۵، ۲۳۶) | (۲۱۰، ۲۲۰، ۲۲۵) | (۸۱، ۸۸، ۹۰) | (۱، ۳، ۵) |
| ۸ | (۲۷، ۳۱، ۳۳) | (۲۰۲، ۲۰۶، ۲۰۸) | (۱۵۱، ۱۵۲، ۱۵۵) | (۷۵، ۸۰، ۸۴) | (۴، ۵، ۶) |
| ۹ | (۲۶، ۳۰، ۳۵) | (۲۴۰، ۲۴۴، ۲۴۷) | (۱۸۸، ۱۹۰، ۱۹۳) | (۹۹، ۱۰۰، ۱۰۱) | (۲، ۵، ۷) |
| ۱۰ | (۴۷، ۵۰، ۵۴) | (۲۶۲، ۲۶۸، ۲۷۱) | (۲۴۶، ۲۵۰، ۲۵۲) | (۹۴، ۱۰۰، ۱۰۸) | (۱، ۳، ۴) |
| ۱۱ | (۵۰، ۵۳، ۵۶) | (۳۰۰، ۳۰۶، ۳۰۹) | (۲۵۵، ۲۶۰، ۲۶۴) | (۱۴۳، ۱۴۷، ۱۵۲) | (۴/۵، ۵، ۵/۶) |
| ۱۲ | (۳۰، ۳۸، ۴۲) | (۲۸۳، ۲۸۴، ۲۸۵) | (۲۴۶، ۲۵۰، ۲۵۴) | (۱۱۶، ۱۲۰، ۱۲۳) | (۲، ۳، ۴) |

منبع: پیوری و یاداو، ۲۰۱۳.

طبق مرحله ۱ از الگوریتم پیشنهادی، جدول ۷ همان ماتریس تصمیم فازی با ۱۲ جایگزین (تعداد) $DMUS$ و ۵ معیار (تعداد ورودی‌ها و خروجی‌های فازی) است. با استفاده از مرحله ۲، ماتریس تصمیم فازی نرمال شده به دست می‌آید؛ نتایج در جدول (۸) گنجانده شده‌اند؛ در این مثال، وزن فازی برای هر گزینه به صورت (۱، ۱، ۱) لحاظ می‌شود؛ بنابراین، ماتریس تصمیم فازی نرمال شده به صورت زیر ایجاد شود.

جدول ۸. نتایج حاصل از روش پیشنهادی

| DMU | d^* | d^- | cl_i^* | رتبه |
|-----|--------|--------|----------|------|
| ۱ | ۲/۶۱۳۲ | ۰/۵۸۲۵ | ۰/۱۸۲۳ | ۱۲ |
| ۲ | ۲/۵۰۱۴ | ۰/۷۵۳۲ | ۰/۲۳۱۴ | ۱۱ |
| ۳ | ۱/۹۱۸۴ | ۱/۲۰۸۷ | ۰/۳۸۶۵ | ۸ |
| ۴ | ۲/۱۰۵۷ | ۱/۰۰۲۵ | ۰/۳۲۲۵ | ۱۰ |
| ۵ | ۱/۹۲۵۴ | ۱/۲۰۹۷ | ۰/۳۸۵۹ | ۹ |
| ۶ | ۰/۵۸۰۳ | ۲/۵۲۶۱ | ۰/۸۱۳۲ | ۳ |
| ۷ | ۱/۲۱۷۲ | ۲/۰۸۱۵ | ۰/۶۳۱۰ | ۶ |
| ۸ | ۱/۲۱۸۹ | ۱/۸۸۸۷ | ۰/۶۰۷۸ | ۷ |
| ۹ | ۰/۹۸۷۵ | ۲/۱۹۶۶ | ۰/۶۸۹۹ | ۵ |
| ۱۰ | ۰/۸۲۹۱ | ۲/۴۹۸۸ | ۰/۷۵۰۹ | ۴ |
| ۱۱ | ۰/۱۶۳۱ | ۳/۱۳۳۰ | ۰/۹۵۰۵ | ۱ |
| ۱۲ | ۰/۵۵۸۴ | ۲/۶۱۱۸ | ۰/۸۲۳۹ | ۲ |

منبع: یافته‌های پژوهش

تحلیل نتایج

این جداول نشان‌دهنده مقایسه رتبه‌بندی DMUها با استفاده از روش پیشنهادی و دو روش دیگر تحلیل پوششی داده‌های فازی (DEA) هستند. جدول ۹ نتایج حاصل از روش پیشنهادی را نشان می‌دهد که شامل محاسبه فاصله‌های مثبت و منفی از ایدئال فازی و نزدیکی نسبی DMUهاست.

جدول (۹) نیز نتایج رتبه‌بندی روش پیشنهادی را با نتایج دو روش دیگر مقایسه می‌کند. این مقایسه نشان می‌دهد که روش پیشنهادی در بسیاری از موارد با رتبه‌بندی‌های موجود مطابقت ندارد؛ اما در برخی موارد رتبه‌بندی‌ها نزدیک به هم هستند.

جدول ۹. مقایسه روش‌های مختلف تحلیل پوششی داده‌های فازی برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیری (DMU_s)

| روش | سطح α | رتبه‌بندی |
|--|---------------------|--|
| روش پیوری و یاداو (۲۰۱۳) | $\alpha = 0/1$ | $6 < 5 < 8 < 10 < 11 < 3 < 9 < 7 < 1 < 12 < 2 < 4$ |
| | $\alpha = 0/2$ | $6 < 5 < 8 < 10 < 11 < 3 < 9 < 1 < 7 < 12 < 2 < 4$ |
| | $\alpha = 0/3$ | $6 < 5 < 8 < 10 < 11 < 3 < 9 < 7 < 1 < 12 < 4 < 2$ |
| | $\alpha = 0/4$ | $5 < 6 < 8 < 10 < 3 < 11 < 9 < 7 < 1 < 12 < 4 < 2$ |
| | $\alpha = 0/5, 0/7$ | $5 < 8 < 6 < 10 < 3 < 11 < 7 < 9 < 1 < 12 < 4 < 2$ |
| | $\alpha = 0/6$ | $5 < 8 < 6 < 10 < 3 < 11 < 9 < 7 < 1 < 12 < 4 < 2$ |
| | $\alpha = 0/8, 0/9$ | $5 < 8 < 6 < 10 < 3 < 7 < 11 < 9 < 12 < 1 < 4 < 2$ |
| | $\alpha = 1$ | $5 < 8 < 6 < 10 < 3 < 7 < 11 < 9 < 12 < 1 < 4 < 2$ |
| روش ابراهیم‌نژاد و امانی ^۱ (۲۰۲۱) | $\alpha = 0/1, 0/2$ | $8 < 5 < 6 < 9 < 11 < 10 < 3 < 7 < 12 < 2 < 4 < 1$ |
| | $\alpha = 0/3$ | $8 < 5 < 6 < 9 < 11 < 10 < 3 < 7 < 12 < 2 < 4 < 1$ |
| | $\alpha = 0/4$ | $8 < 5 < 6 < 9 < 11 < 10 < 3 < 7 < 12 < 4 < 2 < 1$ |
| | $\alpha = 0/5, 0/6$ | $5 < 8 < 6 < 11 < 10 < 9 < 3 < 7 < 12 < 4 < 2 < 1$ |
| | $\alpha = 0/7, 0/8$ | $5 < 8 < 6 < 11 < 10 < 9 < 3 < 7 < 12 < 4 < 1 < 2$ |
| | $\alpha = 0/9$ | $5 < 8 < 6 < 11 < 10 < 3 < 9 < 7 < 12 < 4 < 1 < 2$ |
| | $\alpha = 1$ | $5 < 8 < 6 < 11 < 10 < 3 < 9 < 12 < 7 < 4 < 1 < 2$ |
| روش ارائه‌شده | - | $2 < 1 < 4 < 5 < 7 < 6 < 3 < 9 < 10 < 8 < 11 < 12$ |

منبع: یافته‌های پژوهش

تحلیل نتایج:

روش پیشنهادی رتبه‌بندی یکنواختی برای واحدهای تصمیم‌گیری ارائه می‌دهد و وابسته به α -برش نیست؛ درحالی که روش‌های دیگر به‌ازای α -برش‌های متفاوت رتبه‌بندی‌های مختلفی ارائه می‌دهند.

¹ Ebrahimnejad and Amani

رتبه‌بندی، هم‌گرایی قابل‌توجهی با رتبه‌بندی روش‌های موجود دارد؛ اما در برخی موارد تفاوت‌هایی نیز مشاهده می‌شود. براساس نتایج، DMU_1 در روش ارائه شده دارای بالاترین رتبه و DMU_7 دارای پایین‌ترین رتبه است؛ اما رتبه‌بندی DMU ها در دو روش پیوری و یاداو (۲۰۱۳) و ابراهیم‌نژاد و امانی (۲۰۲۱) با روش ارائه شده متفاوت هستند.

۶. مطالعه موردی: شرکت ملی نفت ایران

شرکت ملی نفت ایران (NIOC) از سال ۱۹۴۱ میلادی تاکنون مسئولیت نظارت و سیاستگذاری در صنعت نفت را برعهده داشته است. این شرکت یکی از بزرگ‌ترین شرکت‌های نفتی جهان با ذخایر هیدروکربنی قابل‌توجه است. برای نشان دادن کاربرد مدل ارائه‌شده با استفاده از داده‌های واقعی، از متغیرهای مربوط به ۹ شعبه از NIOC در ایران که در ۹ استان قرار دارند، استفاده می‌کنیم. این متغیرها شامل دو ورودی و سه خروجی هستند. متغیرهای ورودی شامل تعداد کارکنان و هزینه‌ها (برحسب ۱۰۰۰۰۰۰ ریال) که شامل هزینه‌های عملیاتی، هزینه‌های نیروی کار، نگهداری و سایر هزینه‌هاست و متغیرهای خروجی شامل حجم گاز استخراجی (برحسب ۱۰۰۰ متر مکعب در روز)، حجم نفت استخراجی (برحسب ۱۰۰۰ بشکه در روز) و کیفیت نفت استخراجی است. جدول ۱۰ اطلاعات این متغیرها را نشان می‌دهد.

جدول ۱۰. داده‌های ورودی و خروجی

| DMU | I1 | I2 | O1 | O2 | O3 |
|-----|------|------------|-------|------|--------------|
| Co1 | ۱۰۵۰ | ۷۰۶۹ | ۱۴۲۰۰ | ۱۰۰۰ | (۳۵، ۳۶، ۳۷) |
| Co2 | ۱۲۳۰ | ۸۴۴۷ | ۱۶۵۰۰ | ۶۱۰ | (۳۸، ۳۹، ۴۰) |
| Co3 | ۹۵۵ | ۴۶۸۹/۰۱ | ۵۶۶۰ | ۶۳۰ | (۳۷، ۳۸، ۳۹) |
| Co4 | ۱۲۲۵ | ۷۵۱۴/۵۹۷ | ۵۶۶ | ۶۵۰ | (۳۶، ۳۷، ۳۸) |
| Co5 | ۱۰۳۲ | ۵۹۹۴/۶۵ | ۹۹۲۰ | ۱۷۰ | (۳۲، ۳۳، ۳۴) |
| Co6 | ۶۵۰ | ۴۰۵۶/۱۳۷۹۳ | ۲۸۳۱ | ۲۲۷ | (۳۴، ۳۵، ۳۶) |
| Co7 | ۴۵۲ | ۶۵۸۰/۷۱۷۲ | ۷۴۰ | ۲۵۰ | (۲۹، ۳۰، ۳۱) |
| Co8 | ۱۸۰۰ | ۹۵۶۴/۳۶۹۷۱ | ۱۴۲۰۰ | ۲۰۰ | (۳۸، ۳۹، ۴۰) |
| Co9 | ۱۵۰۰ | ۷۹۰۹/۵۷۲۴۱ | ۷۰۰۰ | ۱۶۵ | (۴۰، ۴۱، ۴۲) |

منبع: یافته‌های پژوهش

طبق مرحله دوم الگوریتم پیشنهادی، جدول ۱۰ همان ماتریس تصمیم فازی با ۹ گزینه، تعداد DMU ها و ۵ معیار (تعداد ورودی‌های فازی و خروجی‌های فازی) است. با استفاده از مرحله سوم، ماتریس تصمیم فازی نرمال شده یعنی $\tilde{w}_j = (1,1,0.9), j = 1, \dots, 11$ بیان شده است. همچنین، در این مثال، $\tilde{w}_j = (1,1,0.9), j = 1, \dots, 11$ فراهم شده و نتایج در جدول ۱۱ بیان شده است. بنابراین، ماتریس تصمیم وزنی نرمال شده همان ماتریس تصمیم نرمال شده است $(\tilde{V} = \tilde{R})$.



جدول ۱۱. ماتریس تصمیم فازی نرمال شده با ۹ گزینه و ۵ معیار

| DMU | I1 | I2 | O1 | O2 | O3 |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------------------------|
| ۱ | ۰/۵۸۳۳ | ۰/۷۳۹۱ | ۰/۸۶۰۶ | ۱ | (۰/۸۳۳۳، ۰/۸۵۷۱، ۰/۸۸۱۰) |
| ۲ | ۰/۶۸۳۳ | ۰/۸۸۳۳ | ۱ | ۰/۶۱۰۰ | (۰/۹۰۴۸، ۰/۹۲۸۶، ۰/۹۵۲۴) |
| ۳ | ۰/۵۳۰۶ | ۰/۴۹۰۳ | ۰/۳۴۳۰ | ۰/۶۳۰۰ | (۰/۸۸۱۰، ۰/۹۰۴۸، ۰/۹۲۸۶) |
| ۴ | ۰/۶۸۰۶ | ۰/۷۸۵۷ | ۰/۰۳۴۳ | ۰/۶۵۰۰ | (۰/۸۵۷۱، ۰/۸۸۱۰، ۰/۹۰۴۸) |
| ۵ | ۰/۵۷۳۳ | ۰/۶۲۶۸ | ۰/۶۰۱۲ | ۰/۱۷۰۰ | (۰/۷۶۱۹، ۰/۷۸۵۷، ۰/۸۰۹۵) |
| ۶ | ۰/۳۶۱۱ | ۰/۴۲۴۱ | ۰/۱۷۱۶ | ۰/۲۲۷۰ | (۰/۸۰۹۵، ۰/۸۳۳۳، ۰/۸۵۷۱) |
| ۷ | ۰/۲۵۱۱ | ۰/۶۸۸۰ | ۰/۰۴۴۸ | ۰/۲۵۰۰ | (۰/۶۹۰۵، ۰/۷۱۴۳، ۰/۷۳۸۱) |
| ۸ | ۱ | ۱ | ۰/۸۶۰۶ | ۰/۲۰۰۰ | (۰/۹۰۴۸، ۰/۹۲۸۶، ۰/۹۵۲۴) |
| ۹ | ۰/۸۳۳۳ | ۰/۸۲۷۰ | ۰/۴۲۴۲ | ۰/۱۶۵۰ | (۰/۹۵۲۴، ۰/۹۷۶۲، ۱) |

منبع: یافته‌های پژوهش

برای رتبه‌بندی DMU ها با استفاده از روش پیشنهادی، جدول ۱۱ تجزیه و تحلیل می‌شود و فاصله‌های d^* و d^- برای هر DMU به‌عنوان گزینه از راه‌حل‌های ایده‌آل فازی طبق معادلات (۳۱)، (۳۰) و همچنین، نزدیکی نسبی هر DMU به نقطه ایده‌آل فازی مثبت، براساس معادله (۳۲) محاسبه می‌شود. نتایج در جدول ۱۲ نشان داده شده است.

جدول ۱۲. نتایج رتبه‌بندی بر اساس روش پیشنهادی

| DMU | d^* | d^- | cl_i^* | رتبه |
|-----|--------|--------|----------|------|
| Co1 | ۰/۶۰۴۱ | ۲/۷۷۱۹ | ۰/۸۲۱۱ | ۱ |
| Co2 | ۰/۶۳۹۱ | ۲/۷۴۹۰ | ۰/۸۱۱۴ | ۲ |
| Co3 | ۱/۵۸۸۹ | ۱/۶۴۰۰ | ۰/۵۰۷۹ | ۶ |
| Co4 | ۱/۴۷۰۹ | ۱/۷۵۱۵ | ۰/۵۴۳۵ | ۵ |
| Co5 | ۱/۶۷۱۷ | ۰/۷۰۲۴ | ۰/۴۸۱۵ | ۷ |
| Co6 | ۲/۵۴۷۷ | ۰/۶۹۱۵ | ۰/۲۱۳۵ | ۸ |
| Co7 | ۲/۶۸۴۷ | ۰/۵۷۰۳ | ۰/۱۷۵۲ | ۹ |
| Co8 | ۰/۸۷۱۰ | ۲/۳۸۴۷ | ۰/۷۳۲۵ | ۳ |
| Co9 | ۱/۴۶۷۶ | ۱/۸۵۳۹ | ۰/۵۵۸۲ | ۴ |

منبع: یافته‌های پژوهش

نتایج رتبه‌بندی در جدول ۱۲ نشان می‌دهد که شرکت ۱ بهترین شرایط را دارد؛ درحالی که شرکت ۷ کمترین شرایط مطلوب را در بین شرکت‌ها دارد.

۷. نتیجه‌گیری و پیشنهادها

هدف این مقاله رتبه‌بندی تمامی DMU ها در یک محیط فازی بود که با ترکیب روش‌های فازی TOPSIS و DEA انجام شد. این فرایند شامل استفاده از هر ورودی و خروجی فازی به‌عنوان یک ویژگی و هر DMU به‌عنوان یک گزینه بود. پس از نرمال‌سازی ماتریس تصمیم فازی، فاصله از بهترین و بدترین راه‌حل‌ها تعیین شد. روش پیشنهادی از طریق آزمایش‌های عددی تأیید شد و با روش‌های رتبه‌بندی موجود که براساس سطوح α بودند، مقایسه گردید. به‌طور قابل توجهی، طبق مثال ۲، مشاهده می‌شود که روش ارائه‌شده برای متغیرهای خروجی فازی نامطلوب عملکرد خوبی دارد.

علاوه‌براین، این روش پیشنهادی مزایایی نسبت به سایر روش‌های موجود دارد، ازجمله محاسبات مقرون به‌صرفه و استقلال نتایج از سطوح α برخلاف بیشتر روش‌های رتبه‌بندی فازی DEA موجود که به سطوح α وابسته هستند، روش پیشنهادی قادر است یک رتبه یکتا برای DMU ها در تمام سطوح α ارائه دهد و این نقطه ضعف چنین روش‌هایی را برطرف می‌کند. همچنین، به‌کارگیری این روش برای داده‌های مربوط به مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای که در مقالات افتخاریان و همکاران (۱۴۰۲) و غلام‌ابری (۱۴۰۳) مطرح گردیده جهت انجام پژوهش‌های آتی پیشنهاد می‌شود.

حامی مالی

این مقاله حامی مالی ندارد.

تعارض منافع

تعارض منافع وجود ندارد.

سپاسگزاری

نویسندگان از دست‌اندرکاران فصلنامه و داوران ناشناس که در بهبود کیفیت مقاله کمک کردند، تشکر می‌کنند.

ORCID


Neda Bashak

 <https://orcid.org/0009-0005-3562-167X>

Shokrollah Ziari

 <https://orcid.org/0000-0001-5605-3441>

Mohammadmehdi Movahedi

 <https://orcid.org/0000-0001-5414-2109>

Amir Gholam Abri

 <https://orcid.org/0000-0003-1981-9756>

Amir Mehdi Miandaragh

 <https://orcid.org/0000-0003-2599-8252>



منابع

- افتخاریان، سیده الهام، هاشمی، سید فرزاد، نعمتی، علی، مهرجو، راضیه و احدزاده نمین، مهناز (۱۴۰۲). توسعه مدل تحلیل پوششی داده‌های شبکه جهت ارزیابی کارایی فنی صنعت داروسازی. *مدلسازی اقتصادی*، ۱۷(۴)، ۱۱۵-۱۳۶.
- امیر غلام‌ابری (۱۴۰۳). شناسایی واحدهایی با بیشترین مقیاس بهوره‌وری در زنجیره تامین سبز با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها (DEA). *مدلسازی اقتصادی*، ۱۸(۶۶)، ۱-۲۳.
- Andersen, P., & Petersen, N. C. (1993). A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis. *Management Science*, 39(10), 1261-1264.
- Bede, B. (2013). *Mathematics of fuzzy sets and fuzzy logic*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- Bracke, S., Radetzky, M., Rosebrock, C. & Ulutas, B. (2019). Efficiency and effectivity of high precision grinding manufacturing processes: An approach based on combined DEA and cluster analyses *Procedia CIRP*, 79, 292-297. <https://doi.org/10.1016/j.procir.2019.02.069>.
- Charnes, A., Cooper, W.W., & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, 2(6), 429-444. [https://doi.org/10.1016/0377-2217\(78\)90138-8](https://doi.org/10.1016/0377-2217(78)90138-8).
- Charnes, A., Cooper, W. W., Lewin, A. Y., & Seiford, L. M. (1994). *Data envelopment analysis: Theory, methodology, and applications*, Springer Dordrecht. Springer Book Archive. <https://doi.org/10.1007/978-94-011-0637-5>.
- Chen, C- T. (2000). Extensions of the TOPSIS for group decision-making under fuzzy environment. *Fuzzy Sets and Systems*, 114(1), 1-9.
- Chu, X., Fielding, G. J., & Lamar, B. W. (1992). Measuring transit performance using data envelopment analysis. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 26(3), 223-230.
- Ebrahimnejad, A., & Amani, N. (2021). Fuzzy data envelopment analysis in the presence of undesirable outputs with ideal points. *Complex & Intelligent Systems*, 7(3), 1-22.
- Eftekharian, S. E., Hashemi, S. F., Nemati, A., Mehrjoo, R., & Ahadzadeh Namin, M. (2024). Development of network data envelopment analysis model to evaluate the technical efficiency of the pharmaceutical industry. *Economic Modeling*, 17(64), 115-136. [in Persian].
- Emrouznejad, A., & Yang, G-L. (2018). A survey and analysis of the first 40 years of scholarly literature in DEA: 1978–2016. *Socio-Economic Planning Sciences*, 61, 4-8. <https://doi.org/10.1016/j.seps.2017.01.008>.
- Emrouznejad, A., Tavana, M., & Hatami-Marbini, A. (2014). The state of the art in fuzzy data envelopment analysis. In *Performance Measurement with Fuzzy Data Envelopment Analysis*, published in *Studies in Fuzziness and Soft Computing* (309) 1-45, Springer-Verlag.
- Farrell, M. J. (1957). The measurement of productive efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society: Series A (General)*, 120(3), 253-281.
- Färe, R., Grosskopf, S., & Lovell, C. (1985). *The measurement of efficiency of production*. Kluwer Nijhoff, Boston.
- Färe, R., Grosskopf, S., & Lovell, C. (1983). The structure of technical efficiency. *Scandinavian Journal of Economics*, 85, 181- 190.
- Fiallos, D., Chavez, J., Mendoza, L., & Campana, J. (2017). Technologies in higher education: Public policies and social appropriation of their implementation. *Revista Digital de Investigacion en Docencia Universitaria*, 11(1), 193-2. Doi: <http://dx.doi.org/10.19083/ridu.11.498>
- Gasser, T., Crepin, L., Quilcaille, Y., Houghton, R. A., Ciaï, P., & Obersteiner, M. (2020). Historical CO2 emissions from land use and land cover change and their uncertainty. *Biogeosciences*, 17(15), 4075-4101. DOI: 10.5194/bg-17-4075-2020

- Ghasemi, M.R., Ignatius, J., Lozano, S., Emrouznejad, A., & Hatami-Marbini, A. (2015). A fuzzy expected value approach under generalized data envelopment analysis. *Knowledge-Based Systems*, 89, 148–159.
- Gholam Abri, A. (2024). Identifying the most productive scale size in the green supply chain using data envelopment analysis. *Economic Modeling*, 18(66), 1-23.[in Persian].
- Guo, P., & Tanaka, H. (2001). Fuzzy DEA: A perceptual evaluation method. *Fuzzy Sets and Systems*, 119(1), 149-160. DOI: 10.1016/S0165-0114(99)00106-2
- Hatami-Marbini, A., Tavana, M., & Ebrahimi, A. (2011). A fully fuzzified data envelopment analysis model. *International Journal of Information and Decision Sciences*, 3(3), 252-264.
- Hatami-Marbini A., Emrouznejad, A., & Tavana, M. (2011). A taxonomy and review of the fuzzy data envelopment analysis literature: Two decades in the making. *European Journal of Operational Research*, 214(3), 457-472. DOI:10.1016/j.ejor.2011.02.001
- Hwang, CL., & Yoon, K. (1981). Methods for multiple attribute decision making. In: *Multiple Attribute Decision Making*. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol 186. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-48318-9_3
- Labijak-Kowalska, A., & Kadziński, M. (2021). Experimental comparison of results provided by ranking methods in data envelopment analysis. *Expert Systems with Applications*, 173. 114739. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2021.114739>.
- Lertworasirikul, S., Fang, SC., Nuttle, H.L.W., & Joines, J.A. et al. (2003). Fuzzy BCC model for data envelopment analysis. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 2, 337–358. <https://doi.org/10.1023/B:FODM.0000003953.39947.b4>.
- Matsumoto, Y., Ishimoto, Y., & Takizawa, Y. (2020). Examination of the effectiveness of Neuroscience -Informed Child Education (NICE) within Japanese School Settings. *Children and Youth Services Review*, 118(3),105405. DOI:10.1016/j.childyouth.2020.105405.
- Montazeri, F.Z. (2019). The survey of data envelopment analysis models in fuzzy stochastic environments. *International Journal of Research in Industrial Engineering*, 8(4), 366–383.
- Nazarko, J., & Šaparauskas, J. (2014). Application of DEA method in efficiency evaluation of public higher education institutions. *Technological and Economic Development of Economy*, 20(1), 25-44. DOI:10.3846/20294913.2014.837116.
- Pandey, V., Komal, K., & Dincer, H. (2023). A review on TOPSIS method and its extensions for different applications with recent development. *Soft Computing*, 27(23), 1-29. DOI: 10.1007/s00500-023-09011-0.
- Pastor, J.T., Aparicio, J., & Zofio, J.L. (2022). The enhanced Russell graph measure (ERG=SBM): economic inefficiency decompositions. *International Series in Operations Research & Management Science*, 315. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-84397-7_7
- Peykani P., Mohammadi E., Emrouznejad A., Pishvae M.S., Rostamy-Malkhalifeh M. (2019). Fuzzy data envelopment analysis: An adjustable approach. *Expert Systems with Applications*, 136, 439-452. DOI:10.1016/j.eswa.2019.06.039.
- Puri, J., & Yadav, S.P. (2013). A concept of fuzzy input mix-efficiency in fuzzy DEA and its application in banking sector. *Expert Systems with Applications*, 40(5), 1437–1450. DOI: 10.1016/j.eswa.2012.08.047.
- Ruiz, J.L., Sirvent, I. (2017). Fuzzy cross-efficiency evaluation: A possibility approach. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, Springer, 16(1), 111-126. DOI: 10.1007/s10700-016-9240-1.
- Saati, S.M., Memariani, A., & Jahanshahloo, G.R. (2002). Efficiency analysis and ranking of DMUs with fuzzy data. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 1(3), 255–267. <https://doi.org/10.1023/A:1019648512614>.

- Sengupta, J. K. (1992). A fuzzy systems approach in data envelopment analysis. *Computers & mathematics with applications*, 24(8-9), 259-266. [https://doi.org/10.1016/0898-1221\(92\)90203-T](https://doi.org/10.1016/0898-1221(92)90203-T).
- Tavana, M., Khanjani, S., Hatami-Marbini A., Agrell P.J., & Paryab, K. (2013). Chance- constrained DEA models with random fuzzy inputs and outputs. *Knowledge-Based Systems*, 52, 32 – 52. DOI:10.1016/j.knosys.2013.05.014.
- Tavana, M., & Hatami-Marbini, A., Emrouznejad, A. (2011). A taxonomy and review of the fuzzy data envelopment analysis literature: Two decades in the making. *European Journal of Operational Research*, 214(3), 457-472.
- Tavana, M. (2003). Cross: A multicriteria group-decision-making model for evaluating and prioritizing advanced-technology projects at NASA. *Interfaces*, 33(3), 40-56.
- Wang, Y. M., Luo, L. (2009). Fuzzy data envelopment analysis based upon fuzzy arithmetic with an application to performance assessment of manufacturing enterprises. *Expert Systems with Applications*, 36(3), 5205-5211. DOI:10.1016/j.eswa.2008.06.102.
- Wen, M., & Li, H. (2009). Fuzzy data envelopment analysis (DEA): Model and ranking method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 223(2), 872-878. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2008.03.003>.
- Wen, M., You, C., & Kang, R. (2010). A new ranking method to fuzzy data envelopment analysis. *Computers & Mathematics with Applications*, 59(11), 3398–3404.
- Zerafat Angiz, L. M., Emrouznejad, A., & Mustafa, A. (2010). Fuzzy assessment of performance of a decision making units using DEA: A nonradial approach. *Expert Systems with Applications*, 37(7), 5153-5157. DOI:10.1016/j.eswa.2009.12.078.
- Zhou, W., & Xu, Z. (2020). An overview of the fuzzy data envelopment analysis research and its successful applications. *International Journal of Fuzzy Systems*, 22(4), 1037-1055. DOI: 10.1007/s40815-020-00853-6.