# **Research Paper**

# Effect of Porosity on Nonlinear Tip Deflection of Functionally Graded Piezoelectric Actuators

Mohammad Gholami<sup>1\*</sup>, Mansour Alizadeh<sup>2</sup>

1-Ph.D. Student of Mechanical Engineering, School of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran 16846, Iran

2-Associate prof., School of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran 16846, Iran

		***************************************
Received:	2024/12/09	Abstract
<b>Revised</b> :	2025/01/27	Introduction: Beam-shaped structures, especially bending-mode
Accepted:	2025/02/02	actuators, are more common and have attracted more attention from
•		researchers due to flexibility in design and ease of fabrication.
Use your device	to scan and read the	Methods: In this study, the geometric nonlinear behavior of three-
artic	le online	dimensional functionally graded piezoelectric porous actuators subjected
		to electro-mechanical loads is investigated using the finite element
	Distance in the second s	method. Nonlinear von-Karman terms are included in the strain-
22		displacement relation to capture the geometric nonlinear deformations.
23 C	STREET.	The governing equations and related boundary conditions were derived
		using the variational principle. The Newton-Raphson iteration procedure
		is adopted to solve nonlinear governing equations using a 10-node
DOI		tetrahedral element via the robust open-source finite element FEniCS
10 71905/inm	2025 1102008	platform that exploits Python scripts.
<u>10.71705/jiiii.</u>	2023.1172770	<b>Findings:</b> The effects of different power law and porosity indexes, length
		to thickness ratios, and magnitude of applied loads are investigated on
Vouwondo		the tip deflection of the functionally graded piezoelectric porous actuator.
Reyworus:		The sensitivity of different patterns of porosity distribution along the
Functionally g	raded	thickness direction is explored on the dimensionless tip deflection of the
piezoelectric a	ctuator, Finite	actuator
Element metho	od, Nonlinear	<b>Conclusion:</b> The uniform porosity distribution has the greatest effect on
response, Poro	sity, FEniCS	actuator deformation, whereas the central porosity distribution has the
		least effect. In addition variation in the volume fraction index in the
		range $0-1$ leads to the highest rate of change in actuator tin deflection
		By comparing the results of the linear and nonlinear theories. It has been
		found that the linear theory overestimates the deformations in the case of
		strong electromechanical loading. The findings of this research can be
		used to design and manufacture porous piezoelectric actuators

Citation Mohammad Gholami, Mansour Alizadeh, Effect of Porosity on Nonlinear Tip Deflection of Functionally Graded Piezoelectric Actuators, Quarterly Journal of New Materials. 2024; 15 (56): 33-47.

**\*Corresponding author:** Mansour Alizadeh

Address: School of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran Tell: +989166328500

Email: ma alizadeh@iust.ac.ir

# **Extended** Abstract

## Introduction

Functionally graded piezoelectric materials (FGPMs) have received more attention recently. They were developed to control the level of stress concentrations and enhance the overall lifetime in sensing and actuating modes. In piezoelectric materials, macroscopic strains induce electric polarization (direct or sensor effects) or applied electric voltage generates macroscopic strains (inverse or actuator effects). This feature makes it an ideal candidate for a variety of applications ranging from sensors[1] and actuators[2] to energy harvesting[3] and mobile application[4]. Beamlike structures are more common among them; and bending mode actuators are the most widely used because of their relatively easier fabrication and design flexibility [5].

The application of cantilever beam-shaped structures as bending-mode actuators is very common in the field of piezoelectricity. Piezoelectric materials convert mechanical energy into electricity and vice versa. This unique feature makes them an ideal choice for various applications such as microelectromechanical systems (MEMS), energy harvesters, and acoustic and pressure sensors. At higher loading conditions, the displacements are usually much larger than the thickness and the accuracy of the linear theories are not acceptable. Consequently, its vital to include the geometric nonlinear terms in the formulation.

Recent advances in engineering models have led to the generation of more complex mathematical models with partial differential equations (PDEs). Therefore, automated solution methods have gained more popularity than traditional analytical methods. Various automated platforms such as FreeFem [19], Firedrake [20], and FEniCS [21] have been developed recently. The open-source FEniCS platform automates the solution of principle of variations problems based on partial differential equations (PDEs) through code development in Python or C++ platforms.

## **Findings and Discussion**

In this study, the static nonlinear bending behavior of three-dimensional porous piezoelectric actuators is investigated. The governing equations are obtained using the variational principle method and are solved using finite element modeling in the FEniCS automated environment. The accuracy and convergency of the present formulation are compared with the existing results in the literatures. The effects of power exponents, porosity parameters, and length-to-thickness ratio under different loading values are investigated in this study.

## Conclusion

The results show that the consideration of holes porosity significantly affects the and deformation of the porous actuator. The uniform porosity distribution has the greatest effect on actuator deformation, whereas the central porosity distribution has the least effect. In addition, variation in the volume fraction index in the range 0–1 leads to the highest rate of change in actuator tip deflection. By comparing the results of the linear and nonlinear theories. It has been found that the linear theory overestimates the deformations in the case of strong electromechanical loading. The findings of this research can be used to design and manufacture porous piezoelectric actuators.

# Ethical Considerations compliance with ethical guidelines

The cooperation of the participants in the present study was voluntary and accompanied by their consent.

#### Funding

No funding.

#### **Authors' contributions**

Analysis of the results and to the writing of the manuscript: Mohammad Gholami Supervision of the research: Mansour Alizadeh

#### **Conflicts of interest**

The authors declared no conflict of interest

# مقاله پژوهشی

# اثر تخلخل بر تغییر فرم غیر خطی نوک عملگرهایهای پیزو الکتریک هدفمند

محمد غلامی  $^{1}$  ، منصور علیزاده  $^{2*}$ 

1. دانشجوی دکتری رشته مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت، تهران، ایران

2. استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت، تهران، ایران

تاریخ دریافت: 1403/09/19 تاریخ داوری: 1403/11/08 تاریخ پذیرش: 1403/11/14

از دستگاه خود برای اسکن و خواندن مقاله به صورت آنلاین استفاده کنید



DOI: <u>10.71905/jnm.2025.1192998</u>

> **واژههای کلیدی:** عملگر پیزوالکتریک هدفمند، روش المان محدود، پاسخ غیر خطی، تخلخل، فنیکس

# چکیدہ

مقدمه: سازه های به شکل تیر خصوصاً عملگرهای با مود خمشی به دلیل سهولت ساخت و انعطاف در طراحی نسبت به سایر کاربردها رایج تر ی داشته و بیشتر مورد توجه محققین قرارگرفته است. روش: در این مطالعه، رفتار غیر خطی هندسی عملگرهای متخلخل پیزوالکتریک هدفمند سهبعدی تحت بارهای الکترومکانیکی مورد بررسی قرار گرفته است. ترم های غیر خطی فون – کارمن برای در نظر گرفتن تغییر شکلهای غیر خطی هندسی در رابطه جابجایی– کرنش لحاظ شده اند.. معادلات حاکم و شرایط مرزی مربوطه با استفاده از اصل حساب تغییرات به دست آمده اند. به منظور حل معادلات حاکمه غیر خطی، از روش تکراری نیوتن – رافسون و یک المان چهاروجهی ده گره ای و از طریق محیط کد نویسی پایتون در پلتفرم المان محدود منبع باز فنیکس FEniCS استفاده شده است. یافتهها: اثرات شاخصهای مختلف توانی، تخلخل ، نسبت طول به ضخامت و اندازه بارهای اعمالی بر تغییر فرم نوک عملگر متخلخل پیزوالکتریک هدفمند مورد بررسی قرار گرفته است. ساگوهای مختلف توزیع تخلخل در راستای ضخامت بر تغییر فرم بدون بعد نوک عملگر بررسی شده است.

## نتيجەگىرى:

توزیع تخلخل یکنواخت بیشترین تأثیر و توزیع تخلخل مرکزی کمترین تأثیر را میپذیرد. به علاوه، تغییرات در شاخص کسر حجمی در محدوده 0 تا 1 بیشترین نرخ تغییر در جابجایی نوک عملگر را دارد. با مقایسه نتایج مشخص شد که تئوری خطی در مقایسه با تئوری غیر خطی، تغییر فرمها را در مقادیر بارگذاری الکترومکانیکی قوی بیش از مقدار واقعی پیشبینی میکند. یافتههای این مطالعه می تواند در طراحی و ساخت عملگرهای متخلخل پیزوالکتریک هدفمند مورداستفاده قرار گیرد.

\* نویسنده مسئول: منصور علیزاده

نشانی: دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت، تهران، ایران تلفن: 09166328500

يست الكترونيكى: ma\_alizadeh@iust.ac.ir

#### مقدمه

مواد هدفمند (FGM) که از ترکیب دو یا چند ماده ساخته می شوند، به دلیل نسبت استحکام به وزن بالا، انعطاف پذیری، مقاومت در برابر خوردگی، به سرعت جایگاه مهمی را در صنایع مختلف از جمله خودروسازی، هوافضا و ... به دست آوردند. فضاهای خالی (Voids) و تخلخل ها، غالباً نگرانیها و چالش های زیادی را در ساخت مواد هدفمند ایجاد می کنند. وجود منافذ و حفرهها میتوانند به طور قابل توجهی بر رفتار مکانیکی و عملکرد تاثیر بگذارد. بنابراین، بررسی و شناسایی تخلخل در این نوع مواد یک مساله حیاتی برای بهینهسازی طراحی و کارایی آنها است. بایو (1) از پیشگامان در تحلیل پوروالاستیسیته (Poroelasticity) بوده و یک مدل سهبعدی را برای انتشار موج در ساختارهای الاستیک توسعه دادهاست. متعاقبا، مطالعات مختلفی بر روی اثر پروالاستیسیته در کاربردهای مختلف انجام شدهاست (2-4). ترينح و کيم (5) نظريه تغيير شکل برشي مرتبه بالايي براي تجزیه و تحلیل ارتعاش استاتیکی و آزاد پوستههای کم عمق منحنی دوگانه متخلخل ساخته شده از مواد هدفمند را تحت فشار يكنواخت و سینوسی، پیشنهاد کردند. وانگ و همکاران (6) میکروتیرهای متخلخل را با استفاده از نظریه گرادیان کرنش بررسی کردند. مطالعات متعددی برای تجزیه و تحلیل تخلخل مواد هدفمند با در نظر گرفتن تکیه گاه هاى الاستيك (7و8)، رفتار مغناطيسي الكتروالاستيك (9)، مكانيسم شکست (10)، نفوذپذیری (11) و نقص های هندسی (12) انجام شده است. وانگ و همکاران رفتار غیر خطی عملگرهای سرامیکی پیزوالکتریک را تحت اثر میدان های قوی الکتریکی بررسی كردند(13).

کاربرد سازههای به شکل تیر یکسرگیردار به عنوان عملگرهای مود خمشی در حوزه پیزوالکتریک بسیار رایج است. مواد پیزوالکتریک انرژی مکانیکی را به الکتریسیته و بالعکس تبدیل میکنند. این ویژگی منحصر به فرد آنها را برای کاربردهای مختلف مانند سیستمهای ميكروالكترومكانيكي (MEMS)، برداشت كننده هاى انرژي، و سنسورهای آگوستیک و فشار ایدهآل میسازد. تحلیل مکانیکی تیرهای ساندویچی پیزوالکتریک براساس تئوری غیرمحلی (nonlocal) توسط رضازاده و همکاران (14) انجام شد. نوزیر و روهی (15) یک راهحل نيمه تحليلى براى تحليل الاستيك سهبعدى پانلهاى استوانهاى با لايههاي پيزوالكتريك توسعه دادند. ژانگ و همكاران (16) يک مدل دینامیکی برای یک میکرو تیر پیزوالکتریک لایهای ارائه دادند. در شرایط بارگذاری با مقادیر بزرگتر، جابجاییها معمولاً بسیار بزرگتر از ضخامت هستند و نتایج تئوری های خطی دقیق نیست. در نتیجه، در نظر گرفتن ترم های غیر خطی هندسی در فرمولاسیون میتواند موثر باشد. رفتار تغییر شکل بزرگ تیرهای غیر همگن با شرایط مرزی چندگانه توسط داردل و همکاران (17) مورد مطالعه قرار گرفت. فوترس و همكاران (18) اثر هندسه غير خطى را تحليل ارتعاشات با دامنه بزرگ صفحات دایروی از جنس مواد هدفمند بررسی کردند.

پیشرفتهای اخیر در مدلهای مهندسی منجر به تولید مدلهای ریاضی پیچیدهتر با معادلات دیفرانسیل جزئی (PDEs) شده است. بنابراین، روش های حل اتوماتیک نسبت به روشهای تحلیلی و سنتی محبوبیت بیشتری کسب کردهاند. پلتفرم های اتوماتیک مختلفی مانند فری اف ای ام (FreeFem) (P1)، فایر دراک (Firedrake) (20) و فنیکس (FredCs) (21) اخیراً توسعه یافتهاند. پلتفرم منبع باز فنیکس راهحل مسائل اصل حساب تغییرات که مبتنی بر معادلات دیفرانسیل جزئی (PDEs) می باشند را از طریق توسعه کد در محیط پایتون یا سی پلاس پلاس، اتوماتیک میکند. رودریگز و همکاران (22) پیوسته توسعه دادند. یک فرآیند بهینه برای تجزیه و تحلیل معکوس و پیوسته توسعه دادند. یک فرآیند بهینه برای تجزیه و تحلیل معکوس و برسانی (23) ارائه شد. فونپنگ و بایز (42) از پلتفرم فنیکس برای توسعه یک فرمول بندی المان محدود ترکیبی به منظور تحلیل مسائل الاستیسیته گرادیان کرنش استفاده کردند .

در این مطالعه، رفتار غیر خطی خمشی استاتیک عملگرهای متخلخل پیزوالکتریک سهبعدی هدفمند مورد بررسی قرار گرفته است. معادلات حاکمه با استفاده از روش حساب تغییرات به دست آمده است و با استفاده از مدل سازی المان محدود در محیط اتوماتیک فنیکس حل شده است. دقت و هم گرایی فرمولاسیون حاضر با نتایج موجود در مراجع مقایسه شده است. اثرات شاخصهای توان نمایی، پارامترهای تخلخل و نسبت طول به ضخامت تحت مقادیر مختلف بارگذاری در این مطالعه مورد بررسی قرار گرفته است.

# ۲. فرمول بندی ریاضی عملگر متخلخل پیزوالکتریک ۲٫۱ پیکربندی هندسی و خواص مواد

عملگر متخلخل پیزوالکتریک هدفمند یکسرگیردار تحت مطالعه دارای سطح مقطع مستطیلی یکنواخت با طول L، عرض b و ضخامت h به ترتیب در جهتهای x و y در نظر گرفته شده است. عملگر تحت بارگذاری الکترومکانیکی در سطح بالایی قرار دارد (شکل 1).

بر عمری معرود دیدی در سطح به یی طرح در ارد (سطی ک). تغییرات خواص مواد در راستای ضخامت بر اساس قانون توانی کلاسیک (Classical rule of mixture) به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$P_{eff}(z) = P_t V_t(z) + P_b [1 - V_t(z)] - (P_t + P_b)(m/2) V_p$$
(1)

که  $P_t$  خواص موثر عملگر پیزوالکتریک هدفمند می باشد.  $P_t$  و m که به ترتیب خواص سطح بالایی و پایینی عملگر می باشند. m شاخص تخلخل (1 $P_b$  الگوی توزیع تخلخل است.



# شکل 1-هندسه، سیستم مختصات و پروفایل های بارگذاری یک عملگر FGPM

در مطالعه حاضر، سـه نوع توزیع تخلخل به صـورت زیر در راسـتای ضخامت در نظر گرفته شده است (شکل 2):

نوع يک: توزيع تخلخل يکنواخت:
$$V_p=1$$

نوع دو: چگالی بالای تخلخل در سطح بالایی و چگالی پایین تخلخل در سطح پایینی:

$$V_P = 1 - \frac{|z|}{h}$$

(3)

 $V_p = 1 - \frac{2\left|z - \frac{h}{2}\right|}{h} \tag{4}$ 

که  $V_t$  کسر حجمی ماده پیزوالکتریک هدفمند است و می توان آن را به شکل زیر بیان کرد:

$$V_t(z) = \left(\frac{z}{h}\right)^n \tag{5}$$

که n شاخص توانی در جهت z است. سطوح بالایی و پایینی عملگر هـدفمنـد به ترتیب از مواد PZT-4 و PZT-5H همگن ساخته شدهاند.





## 2.2 فرمولاسيون مسئله

در این بخش، فرمول بندی خمشی غیر خطی عملگر پیزوالکتریک متخلخل استخراج شده است. غیر خطی بودن هندسی با در نظر گرفتن ترم های غیر خطی فون کارمن در روابط جابجایی- کرنش در نظر گرفته شده است. معادلات ساختاری سه بعدی عملگر پیزوالکتریک به شرح زیر خواهد بود:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{ijk} E_k$$

$$D_i = e_{ikl} \varepsilon_{kl} + \chi_{ik} E_k$$
(6)

که  $\sigma_{ij}$  ،  $\sigma_{ij}$  و  $c_{ijkl}$  به ترتیب تانسور تنش پیولا–کیرشهف دوم، تانسور کرنش گرین– لاگرانژ و ثابت مواد الاستیک می باشد.

میدار جابجایی الکتریکی،  $E_k$ ،  $E_k$  و  $\chi_{ik}$  به ترتیب بردار  $D_i$  میدان الکتریکی، پیزوالکتریک و تانسور ثابت های مادی دی الکتریک می باشند. روابط ساختاری معادله (6) با استفاده از بیان ویت ( voigt ) notation ) می تواند به شکل زیر بیان گردد:

(7)

(8)

$$\begin{cases} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{cases} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{24} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{cases} + \begin{bmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & 0 \\ \chi_{12} & \chi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_3 \\ E_3 \end{bmatrix}$$

$$\delta U - \delta W = 0 \tag{12}$$

و کرنش گرین– لاگرانژ و میدان الکتریکی می تواند به شکل زیر بیان گردد:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j})$$
<sup>(9)</sup>

$$E_i = -\varphi_i \tag{10}$$

که 
$$\varphi_i$$
 پتانسـیل الکتریکی اسـت. فرم فشـرده  $u_{i,j}$  بیانگر مشــتق مکانی  $u_i$  نسبت به جهت  $x_j$  می باشد.

انرژی کرنش در یک ماده الاستیک خطی و شامل ترم های پیزوالکتریک، میتواند به صورت زیر بیان شود:

$$U(\varepsilon, E) = \frac{1}{2} c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - e_{kji} E_i \varepsilon_{kl} - \frac{1}{2} \chi_{ij} E_i E_j$$
<sup>(11)</sup>

 $\Gamma$  اصل کار مجازی را برای ماده پیزوالکتریک به حجم  $\Omega$  و سطح می توانن به صورت زیر نوشته شود:

$$\mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u)$$
 کے  $\delta$  عملگر تغییرات،  $U$  انرژی کرنش ذخیرہشدہ در مادہ  $\mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u)$  پیزوالکتریک و  $W_{ext}$  کار انجام شدہ توسط نیروهای خارجی است.  
تغییرات انرژی پتانسیال  $\delta U$  و کار نیروهای خارجی  $\delta W_{ext}$  در  $\mathcal{E}_i = -\varphi_{,i}$  معادلہ (12) بہ صورت زیر خواہد بود:

$$\delta U = \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - D_i \delta E_i) d\Omega$$
<sup>(13)</sup>

$$\partial W_{ext} = \int_{\Omega} (f_{bi} \partial u_i) d\Omega + \int_{\Gamma} (t_i \partial u_i) d\Gamma + \int_{\Gamma} (q_e \partial \varphi) d\Gamma \qquad 14)$$

که  $f_{bi}$ ،  $f_{bi}$  و  $q_{e}$  به ترتیب بیانگر نیروی حجمی، بردار تنش سطحی و شارژ الکتریکی سطحی می باشد. با جایگذاری معادلات (13) و (14) در معادله (12)، استفاده از تکنیک انتگرال جزء به جزء و تئوری دیورژانس، فرم ضعیف شده (Weak form)، F، به صورت زیر بدست خواهد آمد:



که F فرم ضعیف شده رابطه (14) و  $J_i$  مشتق F نسبت به مقادیر مجهول  $u_i$  است. در نتیجه معادلات خطی به صورت زیر بدست خواهند آمد:

$$F(u_i^k, \delta u_i) + J_i \Delta u_i = 0 \tag{20}$$

مشتق جهتی (directional derivative) که اثر تغییر جزئی *۲* را تقریب می زند، می توان به صورت زیر بیان کرد(26):

$$J_i \Delta u_i = \frac{d}{d\tau} F(u_i + \tau \Delta u_i, \delta u_i) \bigg|_{\tau=0}$$
<sup>(21)</sup>

روش تکراری (Iterative) پژوهش حاضر در محیط پایتون کد نویسی شده و پلتفرم منبع باز فنیکس (27) برای حل معادلات غیر خطی استفاده شده است. المان لاگرانژی ترکیبی استاندارد (28) جهت حل مساله انتخاب شده است، که شامل ده گره مرتبه دو و چهار گره خطی است و در مجموع دارای ۴۲ درجه آزادی برای تقریب میدان های جابجایی و الکتریکی است(شکل 3).



شکل 3- المان سه بعدی برای میدان های جابجایی و الکتریکی (29)

(n=1) مقایسه شدهاند. وجود حفرهها بر اساس الگوهای مختلف تویع تخلخل و پارامتر های تخلخل m، منجر به کاهش قابل توجهی در سفتی عملگر می شود. این پدیده همانگونه که در شکل 5 نشان داده شده است، با افزایش شاخص کسر حجمی تشدید می گردد. ضخامت و عرض عملگر ۱ میلی متر در نظر گرفته شده است. عملگر در یک سمت به صورت گیردار و در سمت دیگر آزاد در نظر گرفته شده است. خواص مادی عملگر متخلخل هدفمند در جدول ۱ لیست شده است.

$$F = \int_{\Gamma} n_{j} \sigma_{ij} \delta u_{i} d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} \delta u_{i} d\Omega$$

$$+ \int_{\Gamma} n_{j} \sigma_{mj} u_{i,m} \delta u_{i} d\Gamma - \int_{\Omega} \left[ \sigma_{mj} u_{i,m} \right]_{,j} \delta u_{i} d\Omega$$

$$+ \int_{\Gamma} n_{i} D_{i} \delta \varphi d\Gamma - \int_{\Omega} D_{i,i} \delta \varphi d\Omega - \int_{\Omega} (f_{bi} \delta u_{i}) d\Omega$$

$$- \int_{\Gamma} (t_{i} \delta u_{i}) d\Gamma - \int_{\Gamma} (q_{e} \delta \varphi) d\Gamma$$
(15)

با جمع آوری ضـــرایـب ترم های δu<sub>i</sub> و δφ، معادلات حاکمه به شکل زیر نتیجه خواهد شد:

$$\sigma_{ij,j} + \left[\sigma_{mj}u_{i,m}\right]_{,j} + f_{bi} = 0$$
<sup>(16)</sup>

و شرایط مرزی مربوطه به صورت زیر خواهد بود:

$$\delta u_i = 0 \quad or \quad n_j \sigma_{ij} + n_j \sigma_{mj} u_{i,m} - t_i = 0$$

$$\delta \varphi = 0 \quad or \quad n_i D_i - q_e = 0$$
(17)

## ٤. روش حل

برای حل معادلات غیر خطی بدست آمده در رابطه (15)، تکنیک خطی سازی مورد نیاز است. بدین منظور الگوریتم نیوتن – رافسون برای تغییرات کوچک در مقدار *u*<sup>i</sup> مورد استفاده قرار گرفته است. این روش به شکل زیر سیستم معادلات را برای تغییرات جزئی در تکرار *k*+1 ام خطی سازی می کند (25):

$$u_i^{k+1} = u_i^k + \Delta u \tag{18}$$

که Δu تغییرات جزئی u<sub>i</sub> از مرحله k ام تا k+1 ام است. بنابراین، رابطه بین مرحله فعلی و قبلی میتواند به صورت زیر بیان شود:

$$F(u_i^{k+1}, \delta u_i) = F(u_i^k, \delta u_i) + J_i \Delta u_i$$
<sup>(19)</sup>

#### ٥. نتايج و بحث عددي

در این بخش، تغییر شـکل عملگر متخلخل هدفمند با نسـبت های طول به ضـخامت متفاوت L / h، شـاخص قانون توانی n و تخلخل m تحت بارهای الکترومکانیکی مورد بررسـی قرار گرفتهاند. تغییرات ثابت الاسـتیک  $c_{11}$  در راسـتای ضـخامت برای شاخص های توانی و تخلخل مختلف در شکلهای P و ۵ ترسیم و با عملگر بدون تخلخل



شکل 4- تغییرات ثابت الاستیک c<sub>11</sub> در راستای ضخامت بدون بعد برای الگوهای مختلف تخلخل (*m*=0.1)



شکل 5- تغییرات ثابت الاستیک c<sub>11</sub> در راستای ضخامت بدون بعد برای الگوهای مختلف تخلخل (m=0.2)

ول 1-خواص مادي PZT-4 و PZT-5H (30)	جدو
------------------------------------	-----

PZT-5H	PZT-4	ثابت های مادی
127/20	139	<i>c</i> <sub>11</sub> (GPa)
80/21	8/77	$c_{12}$ (GPa)
127/20	139	c <sub>22</sub> (GPa)
84/67	74/3	$c_{13}$ (GPa)
74/67	74/3	<i>c</i> <sub>23</sub> (GPa)
117/44	115	<i>c</i> <sub>33</sub> (GPa)
22/99	25/6	<i>c</i> <sub>44</sub> (GPa)
22/99	25/6	<i>c</i> <sub>55</sub> (GPa)
23/47	30/6	c <sub>66</sub> (GPa)
17/03	12/7	$e_{15}$ (cm <sup>-2</sup> )

17/03	12/7	$e_{24} ({\rm cm}^{-2})$
-6/62	-5/2	$e_{31}$ (cm <sup>-2</sup> )
-6/62	-5/2	$e_{32} (\mathrm{cm}^{-2})$
23/24	15/1	$e_{33}$ (cm <sup>-2</sup> )
2/771	1/306	$\chi_{11} \ (10^{-8} \ {\rm Fm}^{-1})$
2/771	1/306	$\chi_{22} (10^{-8}\mathrm{Fm}^{-1})$
3/010	1/151	$\chi_{33} (10^{-8}\mathrm{Fm}^{-1})$

تغییر فرم نوک عملگر متخلخل با استفاده از مقدار جابجایی کل در سه بعد محاسبه شده است، که در آن  $u_2$  و  $u_3$  و ترب جابجایی در امتداد محورهای x و z میباشند. ماکزیمم مقادیر تغییر فرم در هر جهت در نتایج ادامه گزارش ارائه شـدهاسـت. میدان پتانسیل الکتریکی به صورت خطی در راستای ضخامت تقریب زده شده است و جابجاییهای بدون بعد به صورت u/L ، Tip/h ، w/h، صورت u/L w/L ،v/L و در این تحقیق مورد استفاده قرار گرفته است. به منظور بررسی دقت و هم گرایی روش حل حاضر، نتایج خطی بدست آمده برای عملگرهای غیر متخلخل با نتایج مرجع (31) مقایسه همخوانی خوبی مشاهده شد. هم گرایی نتایج با ریز کردن مش بندی ارزیابی و در جدول ۲ نشان داده شده است. عملگر تحت بارگذاری یکنواخت مكانيكي t=10 kN/m<sup>2</sup> و ولتاژ الكتريكيV=20 ولت در سيطح بالایی قرار گرفته است. اثر تغییرات شاخص کسر حجمی بر تغییر فرم ماكزيمم بدون بعد (Tip/L) نوك عملكر هدفمند با الكوى تخلخل نوع یک (*m*=0.1) برای مقادیر بار مختلف در شکل های ۶ و 7 رسم شدهاست. عملگر متخلخل در معرض بارهای الکترومکانیکی قرار گرفته است. با افزایش اندازه بار اعمالی، تاثیر ترم های غیر خطی بر پاسخ خمشی قابل توجه است و تفاوت بین تئوری های خطی و غیر خطى قابل چشم پوشى نيست.

جدول 2- جابجایی عرضی غیر خطی بدون بعد (w/t) عملگر هدفمند متخلخل (n=0.2)

(	تعداد		
25	15	6 4	المان ها –
657	85/466	2/26100/50022	160
659	85/616	2/25210/49507	432
661	85/798	2/2505 0/49323	896
663	85/950	2/25040/49243	1600
664	86/070	2/25080/49204	2592
668	86/456	2/25090/49211	5880
692	89/883	2/3746 0/49894	مرجع (31)



شکل 6- اثر تغییرات شاخص توانی n بر ماکزیمم جابجایی بی بعد نوک عملگر متخلخل , (t=10 kN/m²) V=2 kVolt)



شکل 7- اثر تغییرات شاخص توانی n بر ماکزیمم جابجایی بی بعد نوک عملگر متخلخل (t=30 kN/m<sup>2</sup> , V=3 kVolt)

شکل های 8 و 9 اثرات پارامتر تخلخل m را برای تئوری های خطی و غیر خطی نشان می دهند. افزایش پارامتر تخلخل، منجر به تغییر شکل های بیشتر در هر دو تئوری خطی و غیر خطی می شود. تئوری خطی همانگونه که در شکل 9 نشان داده شده است، میزان تغییر شکل های بزرگتری را در بارگذاری الکترومکانیکی هنگامی که بارگذاری افزایش می یابد، پیش بینی می کند.

پاسخ غیر خطی عملگر متخلخل تحت بارهای مکانیکی، الکتریکی و الکترومکانیکی در جداول 3 تا 5 گزارش شدهاست. تغییر شکل غیر خطی بدون بعد نوک عملگر متخلخل و مولفه های جابجایی در جهات y x د و z برای سه نوع الگوی تخلخل و شاخصهای کسر حجمی مختلف مقایسه شدهاند و مشخص شد که تغییر شکلهای بدون بعد در همه جهات با افزایش شاخص کسر حجمی افزایش می یابد.



شکل 8-اثرات شاخص تخلخل *m* بر روی جابجایی بدون بعد (w/L) نوک عملگر پیزوالکتریک هدفمند (t=10 kN/m<sup>2</sup>, V=2 kVolt)



# شکل 9- اثرات شاخص تخلخل m بر روی جابجایی بدون بعد (w/L) نوک عملگر پیزوالکتریک هدفمند ( $t=30 \text{ kN/m}^2, V=3 \text{ kVolt}$ )

در حضور بارگذاری مکانیکی، خیز عرضی بدون بعد *Lw*، نقش اصلی را در خیز کلی نوک عملگر متخلخل ایفا می کند، در حالی که در بارگذاری الکتریکی، خیز درون صفحه ای بدون بعد *Lu* نقش اصلی را دارد. این پدیده از نقطهنظر ریاضی به تفاوت در مولفه های کوپلینگ پیزوالکتریک *e<sub>ijk</sub>* مربوط می شود. در مورد توزیع تخلخل مرکزی (نوع سه)، تغییر شکل های کمتری در مقایسه با انواع تخلخل دیگر مشاهده می شود که مربوط به مولفه های ثابت سفتی نسبتاً کوچکتر، به ویژه در اطراف نقاط مرکزی عملگر متخلخل می باشد.

Tip def./L	w/L	v/L	u/L	п	بار الكترومكانيكي
0/08737	0/08698	0/00124	0/01014	0	t=20000 kN/m <sup>2</sup>
0/09076	0/09033	0/00133	0/01089	0/2	V=30 kVolt
0/09870	0/09815	0/00152	0/01101	1	
0/10772	0/10700	0/00175	0/01275	5	
0/08526	0/08511	0/00094	0/01328	0	<i>t</i> =20000 kN/m <sup>2</sup>
0/09014	0/08999	0/00130	0/01411	0/2	V=0
0/09823	0/09807	0/00122	0/01515	1	
0/10430	0/10415	0/00128	0/01698	5	
0/00335	0/00068	0/00030	0/00327	0	<i>t</i> =0
0/00494	0/00270	0/00037	0/00412	0/2	V=30 kVolt
0/00694	0/00409	0/00052	0/00558	1	
0/00803	0/00297	0/00067	0/00744	5	

جدول 3. مقایسه جابجایی غیر خطی بدون بعد عملگر هدفمند متخلخل (نوع یک) برای انواع شاخص های توانی مختلف (m=0.2) (L/h=6)

جدول 4 -مقایسه جابجایی غیر خطی بدون بعد عملگر هدفمند متخلخل (نوع دو) برای انواع شاخص های توانی مختلف (m=0.2) (L/h=6)

Tip def./L	w/L	v/L	u/L	n	بار الكترومكانيكي
0/08248	0/08201	0/00112	0/00911	0	$t=20000 \text{ kN/m}^2$
0/08562	0/08508	0/00120	0/00981	0/2	V=30 kVolt
0/09324	0/09257	0/00137	0/01136	1	
0/10163	0/10079	0/00155	0/01313	5	
0/07741	0/07631	0/00086	0/00542	0	$t=20000 \text{ kN/m}^2$
0/08171	0/08153	0/00095	0/00712	0/2	V=0
0/08871	0/08851	0/00112	0/01320	1	
0/09352	0/09333	0/00117	0/01424	5	
0/00532	0/00359	0/00036	0/00391	0	<i>t</i> =0
0/00479	0/00217	0/00041	0/00425	0/2	V=30 kVolt
0/00591	0/00210	0/00055	0/00551	1	
0/00913	0/00479	0/00075	0/00775	5	

Tip def./L	w/L	v/L	u/L	п	بار الكترومكانيكي
0/07603	0/07559	0/01090	0/00838	0	$t=20000 \text{ kN/m}^2$
0/07863	0/07814	0/00116	0/00898	0/2	V=30 kVolt
0/08445	0/08383	0/00132	0/01038	1	
0/09110	0/09028	0/00152	0/01218	5	
0/07395	0/07379	0/00081	0/01103	0	$t=20000 \text{ kN/m}^2$
0/07750	0/07734	0/00088	0/01158	0/2	V=0
0/08332	0/08315	0/00101	0/01252	1	
0/08765	0/08749	0/00106	0/01348	5	
0/00347	0/00108	0/00033	0/00335	0	<i>t</i> =0
0/00460	0/00196	0/00038	0/00405	0/2	V=30 kVolt
0/00633	0/00228	0/00049	0/00548	1	
0/00760	0/00240	0/00069	0/00720	5	

جدول 5-مقايسه جابجايى غير خطى بدون بعد عملگر هدفمند متخلخل (نوع سه) براى انواع شاخص هاى توانى مختلف (m=0.2) (L/h=6)

بارگذاری الکترومکانیکی اعمالی به سطح بالایی عملگر، به صورت بار مکانیکی یکنواخت t=10 kN/m2 و بار الکتریکی V=20 ولت در نظر گرفته شده است. با افزایش شاخص توانی، خواص مادی از PZT-4 به PZT-5H متمایل می گردد و مقادیر بزرگتری برای جابجایی های بدون بعد مشاهده می شود. در همه موارد، نرخ تغییرات جابجایی در محدوده 0 تا 1 شاخص کسر حجمی برجسته تر است. تغییر شکل بدون بعد در توزیع تخلخل یکنواخت (نوع یک)، بیش ترین تاثیر را از تغییر شاخص تخلخل متحمل می شود، در حالی که توزیع تخلخل مرکزی (نوع سه) کم ترین تاثیر را می پذیرد. در همه موارد، تغییر شکلهای بدون بعد عملگر در شاخصهای کسر حجمی بالاتر به مقادیر حدی میل می کند

تاثیر تغییرات شاخص های توانی n و پارامتر تخلخل m بر تغییر فرم غیر خطی بدون بعد نوک عملگرهای پیزوالکتریک در جدول ۶ لیست شدهاست. عملگر تحت بار مکانیکی یکنواخت 25000 kN/m<sup>2</sup> و تخلخلها پتانسیل الکتریکی 200=V ولت قرار دارد. تاثیر حفرهها و تخلخلها بر پاسخ خمشی عملگر قابل توجه است و برای همه الگوهای تخلخل، تغییر شکل بیشتر عملگر با افزایش شاخص های کسر حجمی و تخلخل مشاهده می شود. این روند به دلیل تغییرات در ثابتهای سفتی عملگر و متاثر از وجود حفرهها است. حساسیت تغییرات شاخص کسر حجمی در محاسبه جابجایی بدون بعد نوک عملگر متخلخل که بر اثر تغییرات شاخص توانی n ایجاد می گردد، برای سه نوع تخلخل در شکل های 10 تا 12 ترسیم شدهاست.

ملگر پيزوالكتريك هدفمند (10–(L/h)	خطی بدون بعد نوک ع	بر روی جابجایی غیر	ت شاخص تخلخل	6- اثر تغييرا	جدول
-----------------------------------	--------------------	--------------------	--------------	---------------	------

n							_	توزيع	
10	5	3	2	1	0/5	0/2	0	т	تخلخل
0/41644	0/40950	0/40474	0/40104	0/39342	0/38368	0/37174	0/35817	0	غير
									متخلخل
0/45477	0/44644	0/44076	0/43635	0/42726	0/41574	0/40176	0/38596		نوع يک
0/43607	0/42882	0/42383	0/41987	0/41143	0/40048	0/38710	0/37198	0/1	نوع دو
0/42562	0/41838	0/41342	0/40957	0/40162	0/39147	0/37906	0/36498		نوع سه
0/50101	0/49111	0/48426	0/47889	0/46768	0/45357	0/43676	0/41799		نوع یک
0/45896	0/45133	0/44604	0/44172	0/43216	0/41963	0/40444	0/38744	0/2	نوع دو
0/43536	0/42770	0/42253	0/41850	0/41019	0/39961	0/38669	0/37206		نوع سه
0/70708	0/68637	0/67263	0/66199	0/64024	0/61458	0/58555	0/55001	0/5	نوع يک
0/55457	0/54681	0/54105	0/53550	0/52072	0/49976	0/47476	0/44820	0/5	نوع دو



شکل 12- اثر تغییر شاخص های کسر حجمی و تخلخل بر روی جابجایی بدون بعد نوک عملگر متخلخل (نوع سه)

#### نتيجه گيرى

در این مطالعه، تحلیل جابجایی غیر خطی نوک عملگر پیزوالکتریک متخلخل سهبعدی ساخته شده از مواد هدفمند تحت بارگذاری الکترومکانیکی مورد بررسی قرار گرفته است. خواص مادی عملگر براساس قانون توانی در راستای ضخامت و بر حسب کسر حجمی مواد تشکیل دهنده، تقریب زده شدهاست. ترم های غیرخطی فون-کارمن در میدان کرنش در نظر گرفته شده است. از اصل حساب تنییرات برای استخراج معادلات حاکمه غیر خطی و شرایط مرزی مربوطه استفاده شده است. معادلات غیر خطی بدست آمده با استفاده از روش نیوتن – رافسون خطی سازی شده و از پلتفرم جدید فنیکس جهت حل عددی معادلات استفاده شده است.

اثر پارامترهای شاخص توانی و تخلخل، نسبت طول به ضخامت و الگوهای توزیع تخلخل مختلف مورد بررسی و مقایسه قرار گرفته است. دقت و هم گرایی فرمول بندی حاضر به کمک نتایج موجود در مراجع مقایسه شده است. نتایج فرمولاسیون تئوریهای غیرخطی با خطی مقایسه شده است و مشخص شد که تئوری خطی تغییر فرمها را در میکند. خروجی مطالعه حاضر نشان می دهد که در نظر گرفتن حفرهها میکند. خروجی مطالعه حاضر نشان می دهد که در نظر گرفتن حفرهها میکند. خروجی مطالعه حاضر نشان می دهد که در نظر گرفتن خفرهها میکند. غراری ایکترومکانیکی قوی بیش از مقدار واقعی پیش بینی و تخلخلهای موجود در فرمولاسیون مسئله، به طور قابل توجهی بر تغییر شکل عملگر متخلخل تأثیر می گذارد و توزیع تخلخل یکنواخت به علاوه، تغییرات در شاخص کسر حجمی در محدوده 0 تا 1 بیش ترین نرخ تغییر در جابجایی نوک عملگر را دارد. بارگذاری مجزای مکانیکی و الکتریکی نشان داد که در مورد بارگذاری مکانیکی، مؤلفه عرضی تضاد منافع نویسندگان اعلام میکنند که هیچ تضاد منافعی ندارند.

# References

1.Biot MA. Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. I. Low-Frequency Range. The Journal of the Acoustical Society of America. 1956 Mar;28(2):168–78. doi.org/10.1121/1.1908239

2.Selvadurai AP, editor. Mechanics of poroelastic media. Springer Science & Business Media; 2013 Mar 14.

3.Busse A, Schanz M, Antes H. A Poroelastic Mindlin-Plate. InPAMM: Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics 2003 Dec (Vol. 3, No. 1, pp. 260-261). Berlin: WILEY-VCH Verlag. doi.org/10.1002/pamm.200310402

4.Magnucki K, Stasiewicz P. Elastic bending of an isotropic porous beam. International Journal of Applied Mechanics and Engineering. 2004;9(2):351-60. ISSN : 1734-4492

5.Trinh MC, Kim SE. A three variable refined shear deformation theory for porous functionally graded doubly curved shell analysis. Aerospace Science and technology. 2019 Nov 1;94:105356. doi.org/10.1016/j.ast.2019.105356

6.Wang YQ, Zhao HL, Ye C, Zu JW. A porous microbeam model for bending and vibration analysis based on the sinusoidal beam theory and modified strain gradient theory. International Journal of Applied Mechanics. 2018 Jun 11;10(05):1850059. doi.org/10.1142/S175882511850059X

7.Babaei M, Asemi K, Safarpour P. Buckling and static analyses of functionally graded saturated porous thick beam resting on elastic جابجایی W، نقش اصلی را دارد، درحالی که برای بارگذاری الکتریکی، مؤلفه درون صفحه ای جابجایی *u*، بیش ترین تأثیر را دارد. یافته های این تحقیق می تواند در طراحی و ساخت عملگرهای متخلخل پیزوالکتریک هدفمند مورداستفاده قرار گیرد.

foundation based on higher order beam theory. Iranian Journal of Mechanical Engineering Transactions of the ISME. 2019 Mar 1;20(1):94-112. 20.1001.1.16059727.2019.20.1.4.0

8.Phuong NT, Tu TM, Phuong HT, Van Long N. Bending analysis of functionally graded beam with porosities resting on elastic foundation based on neutral surface position. Journal of Science and Technology in Civil Engineering (JSTCE)-HUCE. 2019 Jan 31;13(1):33-45.

doi.org/10.31814/stce.nuce2019-13(1)-04

9.Kiran MC, Kattimani SC, Vinyas M. Porosity influence on structural behaviour of skew functionally graded magneto-electro-elastic plate. Composite Structures. 2018 May 1;191:36-77.

doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.02.023

10.TaghianDehaghaniM,AhmadianM.Fracture mechanism of CoCrMo porous nano-<br/>composite prepared by powder metallurgy<br/>route. International Journal of Engineering.2018Jan1;31(1):19-24.Doi.org/10.5829/ije.2018.31.01a.03

11.Sarparast Z, Abdoli R, Rahbari A, Varmazyar M, Reza Kashyzadeh K. Experimental and numerical analysis of permeability in porous media. International Journal of Engineering. 2020 Nov 1;33(11):2408-15.

doi.org/10.5829/ije.2020.33.11b.31

12.Gupta A, Talha M. Influence of initial geometric imperfections and porosity on the stability of functionally graded material plates. Mechanics Based Design of Structures and

Machines. 2018 Nov 2;46(6):693-711. doi.org/10.1080/15397734.2018.1449656

13.Wang QM, Zhang Q, Xu B, Liu R, Cross LE. Nonlinear piezoelectric behavior of ceramic bending mode actuators under strong electric fields. Journal of Applied Physics. 1999 Sep 15;86(6):3352-60. doi.org/10.1063/1.371213

14.Rezazadeh G, Khanchehgardan A, Shah-Mohammadi-Azar A, Shabani R. Mechanical response of a piezoelectrically sandwiched nano-beam based on the non-local theory. International Journal of Engineering. 2013 Dec 1;26(12):1515-24.

doi.org/10.5829/idosi.ije.2013.26.12c.12

15.Nosier A, Rouhi M. Three-dimensional analysis of laminated cylindrical panels with piezoelectric layers.

16.Zhang Z, Fu G, Xu D. A Dynamic Model for Laminated Piezoelectric Microbeam. International Journal of Engineering. 2023 Jun 1;36(6):1143-9. doi.org/10.5829/ije.2023.36.06c.13

17.Dardel M, Khavvajia A, Akbari Alashti R, Pashaei MH. Large Deflection Analysis of Compliant Beams of Variable Thickness and Non-Homogenous Material under Combined Load and Multiple Boundary Conditions. International Journal of Engineering. 2012 Dec 1;25(4):353-62.

doi.org/10.5829/idosi.ije.2013.25.04c.10

18.Fotros F, Pashaei MH, Alashti RA. Effects of geometric nonlinearity on stress analysis in large amplitude vibration of thin circular functionally graded plates with rigid core. doi.org/10.5829/idosi.ije.2011.24.03a.07

19.Hecht F. New development in FreeFem++. Journal of numerical mathematics. 2012 Dec;20(3-4):251-66. doi.org/10.1515/jnum-2012-0013

20.Rathgeber F, Ham DA, Mitchell L, Lange M, Luporini F, McRae AT, Bercea GT, Markall GR, Kelly PH. Firedrake: automating the finite element method by composing abstractions. ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS). 2016 Dec 21;43(3):1-27. doi.org/10.1145/2998441

21.Langtangen HP. A FEniCS tutorial. InAutomated solution of differential equations by the finite element method: The FEniCS book 2012 Feb 4 (pp. 1-73). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. ISSN 1439-7358

22.Rodriguez MA, Augustin CM, Shadden SC. FEniCS mechanics: A package for continuum mechanics simulations. SoftwareX. 2019 Jan 1;9:107-11.

doi.org/10.1016/j.softx.2018.10.005

23.Shekarchizadeh N, Bersani AM. Developing an automatized optimization problem in FEniCS for parameter determination of metamaterials. InProceedings of FEniCS 2021 2021 (pp. 660-679). doi.org/10.6084/m9.figshare.14495607

24.Phunpeng V, Baiz P. Mixed finite element formulations for strain-gradient elasticity problems using the FEniCS environment. Finite Elements in Analysis and Design. 2015 Apr 1;96:23-40.

doi.org/10.1016/j.finel.2014.11.002

25.Reddy JN. Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis. CRC press; 2003 Nov 24. ISBN 9780429210693

26.Abali BE, Müller WH, Eremeyev VA. Strain gradient elasticity with geometric nonlinearities and its computational evaluation. Mechanics of Advanced Materials and Modern Processes. 2015 Dec;1:1-1. doi.org/10.1186/s40759-015-0004-3

27.Logg A, Mardal KA, Wells G, editors. Automated solution of differential equations by the finite element method: The FEniCS book. Springer Science & Business Media; 2012 Feb 24. doi.org/10.1007/978-3-642-23099-8

28.Arnold DN, Logg A. Periodic table of the finite elements. Siam News. 2014 Nov 3;47(9):212.

29.Alnæs M, Blechta J, Hake J, Johansson A, Kehlet B, Logg A, Richardson C, Ring J, Rognes ME, Wells GN. The FEniCS project version 1.5. Archive of numerical software. 2015 Dec 7;3(100).

30.Doroushi A, Eslami MR, Komeili A. Vibration analysis and transient response of an FGPM beam under thermo-electro-mechanical loads using higher-order shear deformation theory. Journal of Intelligent Material Systems and Structures. 2011 Feb;22(3):231-43. doi.org/10.1177/1045389X11398162

31.Pandey VB, Parashar SK. Static bending and dynamic analysis of functionally graded piezoelectric beam subjected to electromechanical loads. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. 2016 Dec;230(19):3457-69. doi.org/10.1177/0954406215596359