

Research Paper

Effect of Porosity on Nonlinear Tip Deflection of Functionally Graded Piezoelectric Actuators

Mohammad Gholami^{1*}, Mansour Alizadeh²

1. Ph.D. Student of Mechanical Engineering, School of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran 16846, Iran.
2. Associate prof., School of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran 16846, Iran.

Received:

Revised:

Accepted:

Use your device to scan and read the article online



DOI:

Keywords:

Functionally graded piezoelectric actuator, Finite Element method, Nonlinear response, Porosity, FEniCS

Abstract

Introduction: Beam-shaped structures, especially bending-mode actuators, are more common and have attracted more attention from researchers due to flexibility in design and ease of fabrication.

Methods: In this study, the geometric nonlinear behavior of three-dimensional functionally graded piezoelectric porous actuators subjected to electro-mechanical loads is investigated using the finite element method. Nonlinear von-Karman terms are included in the strain–displacement relation to capture the geometric nonlinear deformations. The governing equations and related boundary conditions were derived using the variational principle. The Newton-Raphson iteration procedure is adopted to solve nonlinear governing equations using a 10-node tetrahedral element via the robust open-source finite element FEniCS platform that exploits Python scripts.

Findings: The effects of different power law and porosity indexes, length to thickness ratios, and magnitude of applied loads are investigated on the tip deflection of the functionally graded piezoelectric porous actuator. The sensitivity of different patterns of porosity distribution along the thickness direction is explored on the dimensionless tip deflection of the actuator.

Conclusion: The uniform porosity distribution has the greatest effect on actuator deformation, whereas the central porosity distribution has the least effect. In addition, variation in the volume fraction index in the range 0–1 leads to the highest rate of change in actuator tip deflection. By comparing the results of the linear and nonlinear theories, It has been found that the linear theory overestimates the deformations in the case of strong electromechanical loading. The findings of this research can be used to design and manufacture porous piezoelectric actuators.

Citation: Mohammad Gholami, Mansour Alizadeh, Effect of Porosity on Nonlinear Tip Deflection of Functionally Graded Piezoelectric Actuators, Quarterly Journal of New Materials.

*Corresponding author: Mansour Alizadeh

Address: School of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran

Tell: +989166328500

Email: ma_alizadeh@iust.ac.ir

Extended Abstract

Introduction

Functionally graded piezoelectric materials (FGPMs) have received more attention recently. They were developed to control the level of stress concentrations and enhance the overall lifetime in sensing and actuating modes. In piezoelectric materials, macroscopic strains induce electric polarization (direct or sensor effects) or applied electric voltage generates macroscopic strains (inverse or actuator effects). This feature makes it an ideal candidate for a variety of applications ranging from sensors[1] and actuators[2] to energy harvesting[3] and mobile application[4]. Beam-like structures are more common among them; and bending mode actuators are the most widely used because of their relatively easier fabrication and design flexibility [5].

The application of cantilever beam-shaped structures as bending-mode actuators is very common in the field of piezoelectricity. Piezoelectric materials convert mechanical energy into electricity and vice versa. This unique feature makes them an ideal choice for various applications such as microelectromechanical systems (MEMS), energy harvesters, and acoustic and pressure sensors. At higher loading conditions, the displacements are usually much larger than the thickness and the accuracy of the linear theories are not acceptable. Consequently, it is vital to include the geometric nonlinear terms in the formulation.

Recent advances in engineering models have led to the generation of more complex mathematical models with partial differential equations (PDEs). Therefore, automated solution methods have gained more popularity than traditional analytical methods. Various automated platforms such as FreeFem [19], Firedrake [20], and FEniCS [21] have been developed recently. The open-source FEniCS platform automates the solution of principle of variations problems based on partial differential equations (PDEs) through code development in Python or C++ platforms.

Findings and Discussion

In this study, the static nonlinear bending behavior of three-dimensional porous piezoelectric actuators is investigated. The governing equations are obtained using the variational principle method and are solved using finite element modeling in the FEniCS automated environment. The accuracy and convergence of the present formulation are compared with the existing results in the literatures. The effects of power exponents, porosity parameters, and length-to-thickness ratio under different loading values are investigated in this study.

Conclusion

The results show that the consideration of holes and porosity significantly affects the deformation of the porous actuator. The uniform porosity distribution has the greatest effect on actuator deformation, whereas the central porosity distribution has the least effect. In addition, variation in the volume fraction index in the range 0–1 leads to the highest rate of change in actuator tip deflection. By comparing the results of the linear and nonlinear theories, It has been found that the linear theory overestimates the deformations in the case of strong electromechanical loading. The findings of this research can be used to design and manufacture porous piezoelectric actuators.

Ethical Considerations compliance with ethical guidelines

The cooperation of the participants in the present study was voluntary and accompanied by their consent.

Funding

No funding.

Authors' contributions

Analysis of the results and to the writing of the manuscript: Mohammad Gholami

Supervision of the research: Mansour Alizadeh

Conflicts of interest

The authors declared no conflict of interest

اثر تخلخل بر تغییر فرم غیر خطی نوک عملگرهای های پیزو الکتریک هدفمند

محمد غلامی^۱، منصور علیزاده^{۲*}

۱. دانشجوی دکتری رشته مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت، تهران، ایران

۲. استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت، تهران، ایران

چکیده

مقدمه: سازه های به شکل تیر خصوصاً عملگرهای با مود خمشی به دلیل سهولت ساخت و انعطاف در طراحی نسبت به سایر کاربردها رایج تر ی داشته و بیشتر مورد توجه محققین قرار گرفته است. **روش:** در این مطالعه، رفتار غیر خطی هندسی عملگرهای متخلخل پیزوالکتریک هدفمند سه بعدی تحت بارهای الکترومکانیکی مورد بررسی قرار گرفته است. ترم های غیر خطی فون - کارمن برای در نظر گرفتن تغییر شکل های غیر خطی هندسی در رابطه جابجایی - کرنش لحاظ شده اند. معادلات حاکم و شرایط مرزی مربوطه با استفاده از اصل حساب تغییرات به دست آمده اند. به منظور حل معادلات حاکم غیر خطی، از روش تکراری نیوتن - رافسون و یک المان چهاروجهی ده گره ای و از طریق محیط کد نویسی پایتون در پلتفرم المان محدود منبع باز فنیکیس FEniCS استفاده شده است.

یافته ها: اثرات شاخص های مختلف توانی، تخلخل، نسبت طول به ضخامت و اندازه بارهای اعمالی بر تغییر فرم نوک عملگر متخلخل پیزوالکتریک هدفمند مورد بررسی قرار گرفته است. حساسیت الگوهای مختلف توزیع تخلخل در راستای ضخامت بر تغییر فرم بدون نوک عملگر بررسی شده است.

نتیجه گیری:

توزیع تخلخل یکنواخت بیشترین تأثیر و توزیع تخلخل مرکزی کمترین تأثیر را می پذیرد. به علاوه، تغییرات در شاخص کسر حجمی در محدوده ۰ تا ۱ بیشترین نرخ تغییر در جابجایی نوک عملگر را دارد. با مقایسه نتایج مشخص شد که تئوری خطی در مقایسه با تئوری غیر خطی، تغییر فرم ها را در مقادیر بارگذاری الکترومکانیکی قوی بیش از مقدار واقعی پیش بینی می کند. یافته های این مطالعه می تواند در طراحی و ساخت عملگرهای متخلخل پیزوالکتریک هدفمند مورد استفاده قرار گیرد.

تاریخ دریافت:

تاریخ داوری:

تاریخ پذیرش:

از دستگاه خود برای اسکن و خواندن مقاله به صورت آنلاین استفاده کنید

DOI:

واژه های کلیدی:

عملگر پیزوالکتریک هدفمند، روش المان محدود، پاسخ غیر خطی، تخلخل، فنیکیس

* نویسنده مسئول: منصور علیزاده

نشانی: دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت، تهران، ایران

تلفن: ۰۹۱۶۶۳۲۸۵۰۰

پست الکترونیکی: ma_alizadeh@iust.ac.ir

مقدمه

مواد هدفمند (FGM) که از ترکیب دو یا چند ماده ساخته می شوند، به دلیل نسبت استحکام به وزن بالا، انعطاف پذیری، مقاومت در برابر خوردگی، به سرعت جایگاه مهمی را در صنایع مختلف از جمله خودروسازی، هوافضا و ... به دست آوردند. فضاهای خالی (Voids) و تخلخل ها، غالباً نگرانی ها و چالش های زیادی را در ساخت مواد هدفمند ایجاد می کنند. وجود منافذ و حفره ها می توانند به طور قابل توجهی بر رفتار مکانیکی و عملکرد تاثیر بگذارد. بنابراین، بررسی و شناسایی تخلخل در این نوع مواد یک مساله حیاتی برای بهینه سازی طراحی و کارایی آن ها است. بایو (۱) از پیشگامان در تحلیل پوروالاستیسیته (Poroelasticity) بوده و یک مدل سه بعدی را برای انتشار موج در ساختارهای الاستیک توسعه داده است. متعاقباً، مطالعات مختلفی بر روی اثر پوروالاستیسیته در کاربردهای مختلف انجام شده است (۲-۴). ترین و کیم (۵) نظریه تغییر شکل برشی مرتبه بالایی برای تجزیه و تحلیل ارتعاش استاتیکی و آزاد پوسته های کم عمق منحنی دوگانه متخلخل ساخته شده از مواد هدفمند را تحت فشار یکنواخت و سینوسی، پیشنهاد کردند. وانگ و همکاران (۶) میکرو تیرهای متخلخل را با استفاده از نظریه گرادیان کرنش بررسی کردند. مطالعات متعددی برای تجزیه و تحلیل تخلخل مواد هدفمند با در نظر گرفتن تکیه گاه های الاستیک (۷و۸)، رفتار مغناطیسی الکتروالاستیک (۹)، مکانیسم شکست (۱۰)، نفوذپذیری (۱۱) و نقص های هندسی (۱۲) انجام شده است. وانگ و همکاران رفتار غیر خطی عملگرهای سرامیکی پیزوالکتریک را تحت اثر میدان های قوی الکتریکی بررسی کردند (۱۳).

کاربرد سازه های به شکل تیر یکسرگیردار به عنوان عملگرهای مود خمشی در حوزه پیزوالکتریک بسیار رایج است. مواد پیزوالکتریک انرژی مکانیکی را به الکتریسیته و بالعکس تبدیل می کنند. این ویژگی منحصر به فرد آن ها را برای کاربردهای مختلف مانند سیستم های میکروالکترومکانیکی (MEMS)، برداشت کننده های انرژی، و سنسورهای آگوستیک و فشار ایده آل می سازد. تحلیل مکانیکی تیرهای ساندویچی پیزوالکتریک براساس تئوری غیرمحلی (nonlocal) توسط رضازاده و همکاران (۱۴) انجام شد. نوزیر و روهی (۱۵) یک راه حل نیمه تحلیلی برای تحلیل الاستیک سه بعدی پانل های استوانه ای با لایه های پیزوالکتریک توسعه دادند. ژانگ و همکاران (۱۶) یک مدل دینامیکی برای یک میکرو تیر پیزوالکتریک لایه ای ارائه دادند. در شرایط بارگذاری با مقادیر بزرگتر، جابجایی ها معمولاً بسیار بزرگتر از ضخامت هستند و نتایج تئوری های خطی دقیق نیست. در نتیجه، در نظر گرفتن ترم های غیر خطی هندسی در فرمولاسیون می تواند موثر باشد. رفتار تغییر شکل بزرگ تیرهای غیر همگن با شرایط مرزی چندگانه توسط داردل و همکاران (۱۷) مورد مطالعه قرار گرفت. فوترس و همکاران (۱۸) اثر هندسه غیر خطی را تحلیل ارتعاشات با دامنه بزرگ صفحات دایروی از جنس مواد هدفمند بررسی کردند.

پیشرفت های اخیر در مدل های مهندسی منجر به تولید مدل های ریاضی پیچیده تر با معادلات دیفرانسیل جزئی (PDEs) شده است. بنابراین، روش های حل اتوماتیک نسبت به روش های تحلیلی و سنتی محبوبیت بیشتری کسب کرده اند. پلتفرم های اتوماتیک مختلفی مانند فری اف ای ام (FreeFem) (۱۹)، فایر دراگ (Firedrake) (۲۰) و فنیکس (FEniCS) (۲۱) اخیراً توسعه یافته اند. پلتفرم منبع باز فنیکس راه حل مسائل اصل حساب تغییرات که مبتنی بر معادلات دیفرانسیل جزئی (PDEs) می باشند را از طریق توسعه کد در محیط پایتون یا سی پلاس پلاس، اتوماتیک می کند. رودریگز و همکاران (۲۲) پکیج جدیدی مبتنی بر فنیکس را برای شبیه سازی های مکانیک محیط پیوسته توسعه دادند. یک فرایند بهینه برای تجزیه و تحلیل معکوس و تعیین پارامتر متامتریال ها بر بستر فنیکس توسط شکرچی زاده و برسانی (۲۳) ارائه شد. فونینگ و بایز (۲۴) از پلتفرم فنیکس برای توسعه یک فرمول بندی المان محدود ترکیبی به منظور تحلیل مسائل الاستیسیته گرادیان کرنش استفاده کردند.

در این مطالعه، رفتار غیر خطی خمشی استاتیک عملگرهای متخلخل پیزوالکتریک سه بعدی هدفمند مورد بررسی قرار گرفته است. معادلات حاکمه با استفاده از روش حساب تغییرات به دست آمده است و با استفاده از مدل سازی المان محدود در محیط اتوماتیک فنیکس حل شده است. دقت و هم گرایی فرمولاسیون حاضر با نتایج موجود در مراجع مقایسه شده است. اثرات شاخص های توان نمایی، پارامترهای تخلخل و نسبت طول به ضخامت تحت مقادیر مختلف بارگذاری در این مطالعه مورد بررسی قرار گرفته است.

۲. فرمول بندی ریاضی عملگر متخلخل پیزوالکتریک

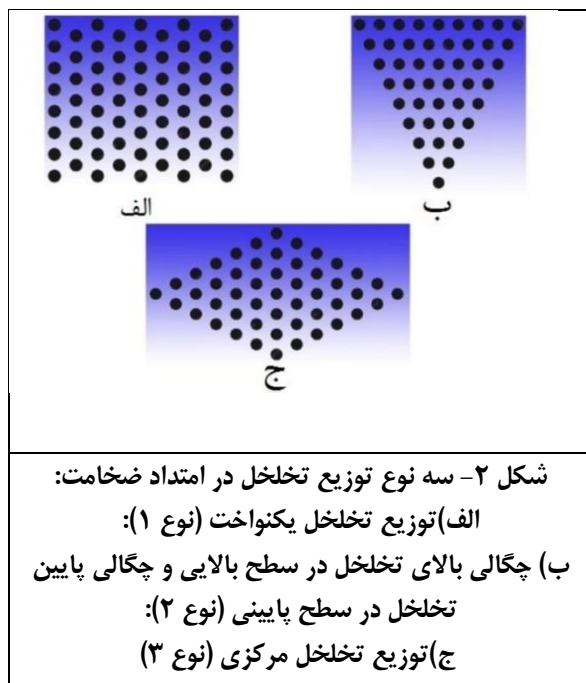
۲.۱. پیکربندی هندسی و خواص مواد

عملگر متخلخل پیزوالکتریک هدفمند یکسرگیردار تحت مطالعه دارای سطح مقطع مستطیلی یکنواخت با طول L ، عرض b و ضخامت h به ترتیب در جهت های x ، y و z در نظر گرفته شده است. عملگر تحت بارگذاری الکترومکانیکی در سطح بالایی قرار دارد (شکل ۱).

تغییرات خواص مواد در راستای ضخامت بر اساس قانون توانی کلاسیک (Classical rule of mixture) به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$P_{eff}(z) = P_t V_t(z) + P_b [1 - V_t(z)] - (P_t + P_b)(m/2) V_p \quad (۱)$$

که P_{eff} خواص موثر عملگر پیزوالکتریک هدفمند می باشد. P_t و P_b به ترتیب خواص سطح بالایی و پایینی عملگر می باشند. m شاخص تخلخل ($0 < m < 1$) و V_p الگوی توزیع تخلخل است.



شکل ۲- سه نوع توزیع تخلخل در امتداد ضخامت:

(الف) توزیع تخلخل یکنواخت (نوع ۱):

(ب) چگالی بالای تخلخل در سطح بالایی و چگالی پایین

تخلخل در سطح پایینی (نوع ۲):

(ج) توزیع تخلخل مرکزی (نوع ۳)

۲.۲ فرمولاسیون مسئله

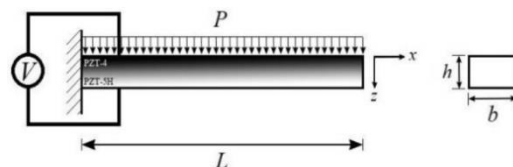
در این بخش، فرمول‌بندی خمشی غیر خطی عملگر پیزوالکتریک متخلخل استخراج شده است. غیر خطی بودن هندسی با در نظر گرفتن ترم های غیر خطی فون کارمن در روابط جابجایی- کرنش در نظر گرفته شده است. معادلات ساختاری سه بعدی عملگر پیزوالکتریک به شرح زیر خواهد بود:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{ijk} E_k \quad (6)$$

$$D_i = e_{ikl} \varepsilon_{kl} + \chi_{ik} E_k$$

که σ_{ij} ، ε_{kl} و c_{ijkl} به ترتیب تانسور تنش پیولا-کیرشهف دوم، تانسور کرنش گرین-لاگرانژ و ثابت مواد الاستیک می باشد.

D_i بردار جابجایی الکتریکی، E_k ، e_{ikl} و χ_{ik} به ترتیب بردار میدان الکتریکی، پیزوالکتریک و تانسور ثابت های مادی دی الکتریک می باشند. روابط ساختاری معادله (۶) با استفاده از بیان ویت (Voigt notation) می تواند به شکل زیر بیان گردد:



شکل ۱- هندسه، سیستم مختصات و پروفایل های

بارگذاری یک عملگر FGPM

در مطالعه حاضر، سه نوع توزیع تخلخل به صورت زیر در راستای ضخامت در نظر گرفته شده است (شکل ۲):

نوع یک: توزیع تخلخل یکنواخت:

$$V_p = 1 \quad (2)$$

نوع دو: چگالی بالای تخلخل در سطح بالایی و چگالی پایین تخلخل در سطح پایینی:

$$V_p = 1 - \frac{|z|}{h} \quad (3)$$

نوع سه: توزیع تخلخل مرکزی:

$$V_p = 1 - \frac{2 \left| z - \frac{h}{2} \right|}{h} \quad (4)$$

که V_t کسر حجمی ماده پیزوالکتریک هدفمند است و می توان آن را به شکل زیر بیان کرد:

$$V_t(z) = \left(\frac{z}{h} \right)^n \quad (5)$$

که n شاخص توانی در جهت z است. سطوح بالایی و پایینی عملگر هدفمند به ترتیب از مواد PZT-4 و PZT-5H همگن ساخته شده اند.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{24} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & 0 \\ \chi_{12} & \chi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

و کرنش گرین- لاگرانژ و میدان الکتریکی می تواند به شکل زیر بیان گردد:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}) \quad (9)$$

که δ عملگر تغییرات، U انرژی کرنش ذخیره شده در ماده پیزوالکتریک و W_{ext} کار انجام شده توسط نیروهای خارجی است. تغییرات انرژی پتانسیل δU و کار نیروهای خارجی δW_{ext} در معادله (۱۲) به صورت زیر خواهد بود:

$$\delta U = \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - D_i \delta E_i) d\Omega \quad (13)$$

$$E_i = -\varphi_{,i} \quad (10)$$

$$\delta W_{ext} = \int_{\Omega} (f_{bi} \delta u_i) d\Omega + \int_{\Gamma} (t_i \delta u_i) d\Gamma + \int_{\Gamma} (q_e \delta \varphi) d\Gamma \quad (14)$$

که $\varphi_{,i}$ پتانسیل الکتریکی است. فرم فشرده $u_{i,j}$ بیانگر مشتق مکانی u_i نسبت به جهت x_j می باشد.

۳. اصل حساب تغییرات

که f_{bi} ، t_i و q_e به ترتیب بیانگر نیروی حجمی، بردار تنش سطحی و شارژ الکتریکی سطحی می باشد. با جایگذاری معادلات (۱۳) و (۱۴) در معادله (۱۲)، استفاده از تکنیک انتگرال جزء به جزء و تئوری دیورژانس، فرم ضعیف شده (Weak form)، F ، به صورت زیر بدست خواهد آمد:

انرژی کرنش در یک ماده الاستیک خطی و شامل ترم های پیزوالکتریک، می تواند به صورت زیر بیان شود:

$$U(\varepsilon, E) = \frac{1}{2} c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - e_{kji} E_i \varepsilon_{kl} - \frac{1}{2} \chi_{ij} E_i E_j \quad (11)$$

$$\begin{aligned} F = & \int_{\Gamma} n_j \sigma_{ij} \delta u_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} \delta u_i d\Omega \\ & + \int_{\Gamma} n_j \sigma_{mj} u_{i,m} \delta u_i d\Gamma - \int_{\Omega} [\sigma_{mj} u_{i,m}]_{,j} \delta u_i d\Omega \\ & + \int_{\Gamma} n_i D_i \delta \varphi d\Gamma - \int_{\Omega} D_{i,i} \delta \varphi d\Omega - \int_{\Omega} (f_{bi} \delta u_i) d\Omega \\ & - \int_{\Gamma} (t_i \delta u_i) d\Gamma - \int_{\Gamma} (q_e \delta \varphi) d\Gamma \end{aligned} \quad (15)$$

اصل کار مجازی را برای ماده پیزوالکتریک به حجم Ω و سطح Γ می توان به صورت زیر نوشته شود:

$$\delta U - \delta W = 0 \quad (12)$$

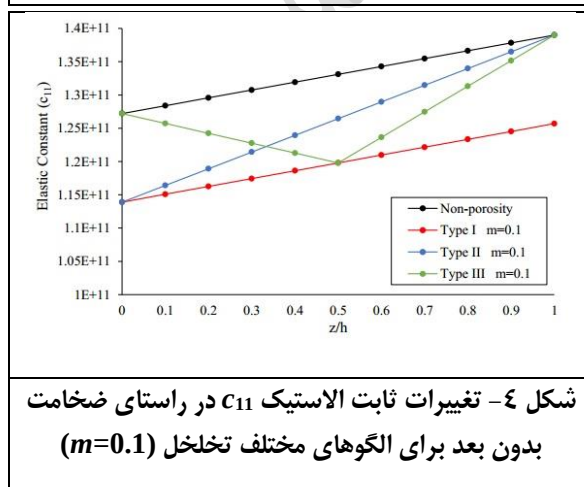
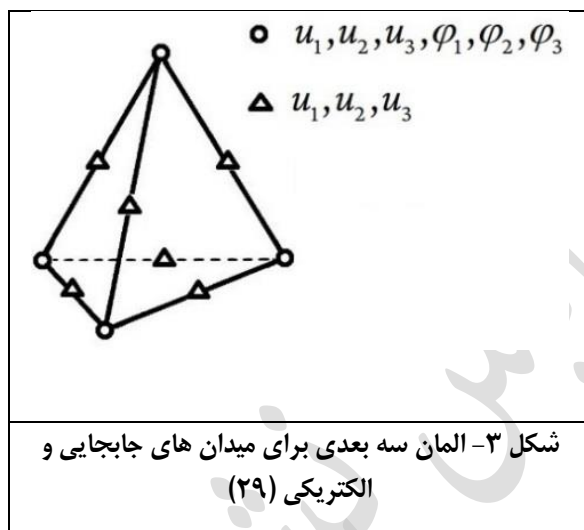
با جمع آوری ضرایب ترم های δu_i و $\delta \varphi$ ، معادلات حاکمه به شکل زیر نتیجه خواهد شد:

$$F(u_i^k, \delta u_i) + J_i \Delta u_i = 0 \quad (20)$$

مشتق جهتی (directional derivative) که اثر تغییر جزئی τ را تقریب می زند، می توان به صورت زیر بیان کرد (۲۶):

$$J_i \Delta u_i = \left. \frac{d}{d\tau} F(u_i + \tau \Delta u_i, \delta u_i) \right|_{\tau=0} \quad (21)$$

روش تکراری (Iterative) پژوهش حاضر در محیط پایتون کد نویسی شده و پلتفرم منبع باز فینیکس (۲۷) برای حل معادلات غیر خطی استفاده شده است. المان لاگرانژی ترکیبی استاندارد (۲۸) جهت حل مساله انتخاب شده است، که شامل ده گره مرتبه دو و چهار گره خطی است و در مجموع دارای ۴۲ درجه آزادی برای تقریب میدان های جابجایی و الکتریکی است (شکل ۳).



$$\sigma_{ij,j} + [\sigma_{mj} u_{i,m}]_{,j} + f_{bi} = 0 \quad (16)$$

و شرایط مرزی مربوطه به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \delta u_i &= 0 \quad \text{or} \quad n_j \sigma_{ij} + n_j \sigma_{mj} u_{i,m} - t_i = 0 \\ \delta \varphi &= 0 \quad \text{or} \quad n_i D_i - q_e = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

۴. روش حل

برای حل معادلات غیر خطی بدست آمده در رابطه (۱۵)، تکنیک خطی سازی مورد نیاز است. بدین منظور الگوریتم نیوتن-رافسون برای تغییرات کوچک در مقدار u_i مورد استفاده قرار گرفته است. این روش به شکل زیر سیستم معادلات را برای تغییرات جزئی در تکرار $k+1$ ام خطی سازی می کند (۲۵):

$$u_i^{k+1} = u_i^k + \Delta u \quad (18)$$

که Δu تغییرات جزئی u_i از مرحله k تا $k+1$ ام است. بنابراین، رابطه بین مرحله فعلی و قبلی می تواند به صورت زیر بیان شود:

$$F(u_i^{k+1}, \delta u_i) = F(u_i^k, \delta u_i) + J_i \Delta u_i \quad (19)$$

که F فرم ضعیف شده رابطه (۱۴) و J_i مشتق F نسبت به مقادیر مجهول u_i است. در نتیجه معادلات خطی به صورت زیر بدست خواهند آمد:

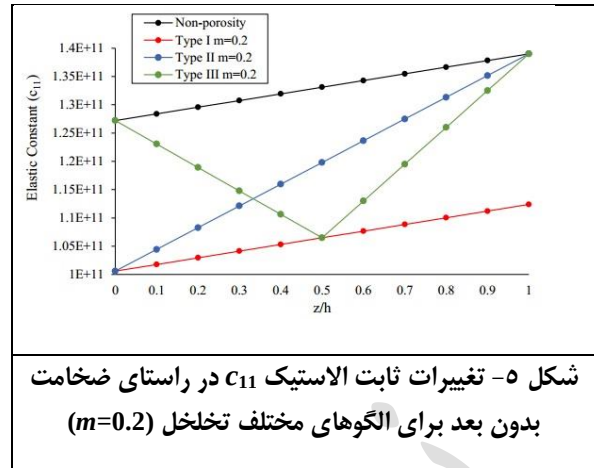
۵. نتایج و بحث عددی

در این بخش، تغییر شکل عملگر متخلخل هدفمند با نسبت های طول به ضخامت متفاوت L/h ، شاخص قانون توانی n و تخلخل m تحت بارهای الکترومکانیکی مورد بررسی قرار گرفته اند. تغییرات ثابت الاستیک c_{11} در راستای ضخامت برای شاخص های توانی و تخلخل مختلف در شکل های ۴ و ۵ ترسیم و با عملگر بدون تخلخل ($n=1$) مقایسه شده اند. وجود حفره ها بر اساس الگوهای مختلف توابع تخلخل و پارامتر های تخلخل m ، منجر به کاهش قابل توجهی در سفتی عملگر می شود. این پدیده همانگونه که در شکل ۵ نشان داده شده است، با افزایش شاخص کسر حجمی تشدید می گردد. ضخامت و عرض عملگر ۱ میلی متر در نظر گرفته شده است. عملگر در یک سمت به صورت گیردار و در سمت دیگر آزاد در نظر گرفته شده است. خواص مادی عملگر متخلخل هدفمند در جدول ۱ لیست شده است.

تغییر فرم نوک عملگر متخلخل با استفاده از مقدار جابجایی کل در سه بعد محاسبه شده است، که در آن u_1 ، u_2 و u_3 به ترتیب جابجایی در امتداد محورهای x ، y و z می‌باشند. ماکزیمم مقادیر تغییر فرم در هر جهت در نتایج ادامه گزارش ارائه شده‌است. میدان پتانسیل الکتریکی به صورت خطی در راستای ضخامت تقریب زده شده است و جابجایی‌های بدون بعد به صورت w/h ، Tip/h ، u/L ، v/L و w/L و در این تحقیق مورد استفاده قرار گرفته است. به منظور بررسی دقت و هم‌گرایی روش حل حاضر، نتایج خطی بدست آمده برای عملگرهای غیر متخلخل با نتایج مرجع (۳۱) مقایسه همخوانی خوبی مشاهده شد. هم‌گرایی نتایج با ریز کردن مش بندی ارزیابی و در جدول ۲ نشان داده شده‌است. عملگر تحت بارگذاری یکنواخت مکانیکی $t=10 \text{ kN/m}^2$ و ولتاژ الکتریکی $V=20$ ولت در سطح بالایی قرار گرفته است. اثر تغییرات شاخص کسر حجمی بر تغییر فرم ماکزیمم بدون بعد (Tip/L) نوک عملگر هدفمند با الگوی تخلخل نوع یک ($m=0.1$) برای مقادیر بار مختلف در شکل های ۶ و ۷ رسم شده‌است. عملگر متخلخل در معرض بارهای الکترومکانیکی قرار گرفته است. با افزایش اندازه بار اعمالی، تاثیر ترم های غیر خطی بر پاسخ خمشی قابل توجه است و تفاوت بین تئوری های خطی و غیر خطی قابل چشم‌پوشی نیست.

جدول ۲- جابجایی عرضی غیر خطی بدون بعد (w/t)
عملگر هدفمند متخلخل ($n=0.2$)

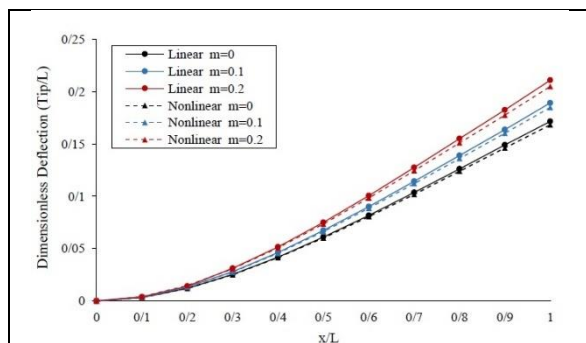
تعداد المان ها	نسبت طول به ضخامت (L/h)			
	۲۵	۱۵	۶	۴
۱۶۰	۰/۵۰۰۲۲	۲/۲۶۱۰	۸۵/۴۶۶	۶۵۷
۴۳۲	۰/۴۹۵۰۷	۲/۲۵۲۱	۸۵/۶۱۶	۶۵۹
۸۹۶	۰/۴۹۳۲۳	۲/۲۵۰۵	۸۵/۷۹۸	۶۶۱
۱۶۰۰	۰/۴۹۲۴۳	۲/۲۵۰۴	۸۵/۹۵۰	۶۶۳
۲۵۹۲	۰/۴۹۲۰۴	۲/۲۵۰۸	۸۶/۰۷۰	۶۶۴
۵۸۸۰	۰/۴۹۲۱۱	۲/۲۵۰۹	۸۶/۴۵۶	۶۶۸
مرجع (۳۱)	۰/۴۹۸۹۴	۲/۳۷۴۶	۸۹/۸۸۳	۶۹۲



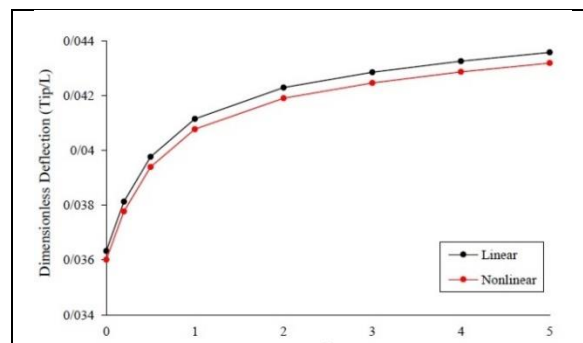
شکل ۵- تغییرات ثابت الاستیک c_{11} در راستای ضخامت بدون بعد برای الگوهای مختلف تخلخل ($m=0.2$)

جدول ۱- خواص مادی PZT-5H و PZT-4 (۳۰)

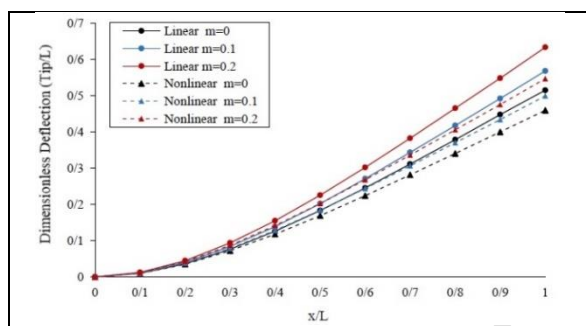
ثابت های مادی	PZT-4	PZT-5H
c_{11} (GPa)	۱۳۹	۱۲۷/۲۰
c_{12} (GPa)	۸/۷۷	۸۰/۲۱
c_{22} (GPa)	۱۳۹	۱۲۷/۲۰
c_{13} (GPa)	۷۴/۳	۸۴/۶۷
c_{23} (GPa)	۷۴/۳	۷۴/۶۷
c_{33} (GPa)	۱۱۵	۱۱۷/۴۴
c_{44} (GPa)	۲۵/۶	۲۲/۹۹
c_{55} (GPa)	۲۵/۶	۲۲/۹۹
c_{66} (GPa)	۳۰/۶	۲۳/۴۷
e_{15} (cm ⁻²)	۱۲/۷	۱۷/۰۳
e_{24} (cm ⁻²)	۱۲/۷	۱۷/۰۳
e_{31} (cm ⁻²)	-۵/۲	-۶/۶۲
e_{32} (cm ⁻²)	-۵/۲	-۶/۶۲
e_{33} (cm ⁻²)	۱۵/۱	۲۳/۲۴
χ_{11} (10 ⁻⁸ Fm ⁻¹)	۱/۳۰۶	۲/۷۷۱
χ_{22} (10 ⁻⁸ Fm ⁻¹)	۱/۳۰۶	۲/۷۷۱
χ_{33} (10 ⁻⁸ Fm ⁻¹)	۱/۱۵۱	۳/۰۱۰



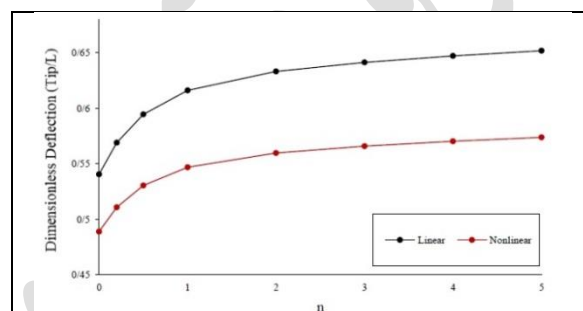
شکل ۸- اثرات شاخص تخلخل m بر روی جابجایی بدون بعد (w/L) نوک عملگر پیزوالکتریک هدفمند $(t=10 \text{ kN/m}^2, V=2 \text{ kVolt})$



شکل ۶- اثر تغییرات شاخص توانی n بر ماکزیمم جابجایی بی بعد نوک عملگر متخلخل $(t=10 \text{ kN/m}^2, V=2 \text{ kVolt})$



شکل ۹- اثرات شاخص تخلخل m بر روی جابجایی بدون بعد (w/L) نوک عملگر پیزوالکتریک هدفمند $(t=30 \text{ kN/m}^2, V=3 \text{ kVolt})$



شکل ۷- اثر تغییرات شاخص توانی n بر ماکزیمم جابجایی بی بعد نوک عملگر متخلخل $(t=30 \text{ kN/m}^2, V=3 \text{ kVolt})$

در حضور بارگذاری مکانیکی، خیز عرضی بدون بعد w/L ، نقش اصلی را در خیز کلی نوک عملگر متخلخل ایفا می کند، در حالی که در بارگذاری الکتریکی، خیز درون صفحه ای بدون بعد u/L نقش اصلی را دارد. این پدیده از نقطه نظر ریاضی به تفاوت در مولفه های کوپلینگ پیزوالکتریک e_{ijk} مربوط می شود. در مورد توزیع تخلخل مرکزی (نوع سه)، تغییر شکل های کمتری در مقایسه با انواع تخلخل دیگر مشاهده می شود که مربوط به مولفه های ثابت سفتی نسبتاً کوچک تر، به ویژه در اطراف نقاط مرکزی عملگر متخلخل می باشد.

شکل های ۸ و ۹ اثرات پارامتر تخلخل m را برای تئوری های خطی و غیر خطی نشان می دهند. افزایش پارامتر تخلخل، منجر به تغییر شکل های بیشتر در هر دو تئوری خطی و غیر خطی می شود. تئوری خطی همانگونه که در شکل ۹ نشان داده شده است، میزان تغییر شکل های بزرگتری را در بارگذاری الکترومکانیکی هنگامی که بارگذاری افزایش می یابد، پیش بینی می کند. پاسخ غیر خطی عملگر متخلخل تحت بارهای مکانیکی، الکتریکی و الکترومکانیکی در جداول ۳ تا ۵ گزارش شده است. تغییر شکل غیر خطی بدون بعد نوک عملگر متخلخل و مولفه های جابجایی در جهات x ، y و z برای سه نوع الگوی تخلخل و شاخص های کسر حجمی مختلف مقایسه شده اند و مشخص شد که تغییر شکل های بدون بعد در همه جهات با افزایش شاخص کسر حجمی افزایش می یابد.

جدول ۳. مقایسه جابجایی غیر خطی بدون بعد عملگر هدفمند متخلخل (نوع یک) برای انواع شاخص های توانی مختلف
($m=0.2$) ($L/h=6$)

Tip def./L	w/L	v/L	u/L	n	بار الکترومکانیکی
۰/۰۸۷۳۷	۰/۰۸۶۹۸	۰/۰۰۱۲۴	۰/۰۱۰۱۴	۰	$t=20000 \text{ kN/m}^2$
۰/۰۹۰۷۶	۰/۰۹۰۳۳	۰/۰۰۱۳۳	۰/۰۱۰۸۹	۰/۲	$V=30 \text{ kVolt}$
۰/۰۹۸۷۰	۰/۰۹۸۱۵	۰/۰۰۱۵۲	۰/۰۱۱۰۱	۱	
۰/۱۰۷۷۲	۰/۱۰۷۰۰	۰/۰۰۱۷۵	۰/۰۱۲۷۵	۵	
۰/۰۸۵۲۶	۰/۰۸۵۱۱	۰/۰۰۰۹۴	۰/۰۱۳۲۸	۰	$t=20000 \text{ kN/m}^2$
۰/۰۹۰۱۴	۰/۰۸۹۹۹	۰/۰۰۱۳۰	۰/۰۱۴۱۱	۰/۲	$V=0$
۰/۰۹۸۲۳	۰/۰۹۸۰۷	۰/۰۰۱۲۲	۰/۰۱۵۱۵	۱	
۰/۱۰۴۳۰	۰/۱۰۴۱۵	۰/۰۰۱۲۸	۰/۰۱۶۹۸	۵	
۰/۰۰۳۳۵	۰/۰۰۰۶۸	۰/۰۰۰۳۰	۰/۰۰۳۲۷	۰	$t=0$
۰/۰۰۴۹۴	۰/۰۰۲۷۰	۰/۰۰۰۳۷	۰/۰۰۴۱۲	۰/۲	$V=30 \text{ kVolt}$
۰/۰۰۶۹۴	۰/۰۰۴۰۹	۰/۰۰۰۵۲	۰/۰۰۵۵۸	۱	
۰/۰۰۸۰۳	۰/۰۰۲۹۷	۰/۰۰۰۶۷	۰/۰۰۷۴۴	۵	

جدول ۴- مقایسه جابجایی غیر خطی بدون بعد عملگر هدفمند متخلخل (نوع دو) برای انواع شاخص های توانی مختلف
($m=0.2$) ($L/h=6$)

Tip def./L	w/L	v/L	u/L	n	بار الکترومکانیکی
۰/۰۸۲۴۸	۰/۰۸۲۰۱	۰/۰۰۱۱۲	۰/۰۰۹۱۱	۰	$t=20000 \text{ kN/m}^2$
۰/۰۸۵۶۲	۰/۰۸۵۰۸	۰/۰۰۱۲۰	۰/۰۰۹۸۱	۰/۲	$V=30 \text{ kVolt}$
۰/۰۹۳۲۴	۰/۰۹۲۵۷	۰/۰۰۱۳۷	۰/۰۱۱۳۶	۱	
۰/۱۰۱۶۳	۰/۱۰۰۷۹	۰/۰۰۱۵۵	۰/۰۱۳۱۳	۵	
۰/۰۷۷۴۱	۰/۰۷۶۳۱	۰/۰۰۰۸۶	۰/۰۰۵۴۲	۰	$t=20000 \text{ kN/m}^2$
۰/۰۸۱۷۱	۰/۰۸۱۵۳	۰/۰۰۰۹۵	۰/۰۰۷۱۲	۰/۲	$V=0$
۰/۰۸۸۷۱	۰/۰۸۸۵۱	۰/۰۰۱۱۲	۰/۰۱۳۳۰	۱	
۰/۰۹۳۵۲	۰/۰۹۳۳۳	۰/۰۰۱۱۷	۰/۰۱۴۲۴	۵	
۰/۰۰۵۳۲	۰/۰۰۳۵۹	۰/۰۰۰۳۶	۰/۰۰۳۹۱	۰	$t=0$
۰/۰۰۴۷۹	۰/۰۰۲۱۷	۰/۰۰۰۴۱	۰/۰۰۴۲۵	۰/۲	$V=30 \text{ kVolt}$
۰/۰۰۵۹۱	۰/۰۰۲۱۰	۰/۰۰۰۵۵	۰/۰۰۵۵۱	۱	
۰/۰۰۹۱۳	۰/۰۰۴۷۹	۰/۰۰۰۷۵	۰/۰۰۷۷۵	۵	

جدول ۵- مقایسه جابجایی غیر خطی بدون بعد عملگر هدفمند متخلخل (نوع سه) برای انواع شاخص های توانی مختلف
($m=0.2$) ($L/h=6$)

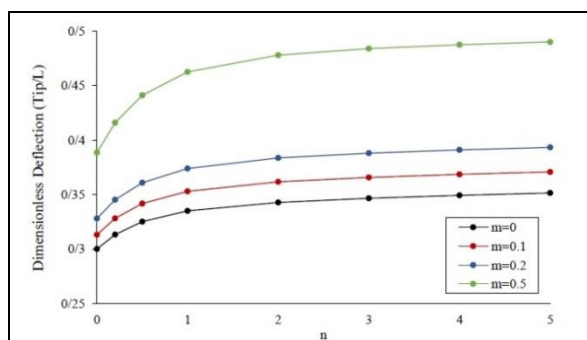
بار الکترومکانیکی	n	u/L	v/L	w/L	Tip def./L
$t=20000 \text{ kN/m}^2$ $V=30 \text{ kVolt}$	۰	۰/۰۰۸۳۸	۰/۰۱۰۹۰	۰/۰۷۵۵۹	۰/۰۷۶۰۳
	۰/۲	۰/۰۰۸۹۸	۰/۰۰۱۱۶	۰/۰۷۸۱۴	۰/۰۷۸۶۳
	۱	۰/۰۱۰۳۸	۰/۰۰۱۳۲	۰/۰۸۳۸۳	۰/۰۸۴۴۵
	۵	۰/۰۱۲۱۸	۰/۰۰۱۵۲	۰/۰۹۰۲۸	۰/۰۹۱۱۰
$t=20000 \text{ kN/m}^2$ $V=0$	۰	۰/۰۱۱۰۳	۰/۰۰۰۸۱	۰/۰۷۳۷۹	۰/۰۷۳۹۵
	۰/۲	۰/۰۱۱۵۸	۰/۰۰۰۸۸	۰/۰۷۷۳۴	۰/۰۷۷۵۰
	۱	۰/۰۱۲۵۲	۰/۰۰۱۰۱	۰/۰۸۳۱۵	۰/۰۸۳۳۲
	۵	۰/۰۱۳۴۸	۰/۰۰۱۰۶	۰/۰۸۷۴۹	۰/۰۸۷۶۵
$t=0$ $V=30 \text{ kVolt}$	۰	۰/۰۰۳۳۵	۰/۰۰۰۳۳	۰/۰۰۱۰۸	۰/۰۰۳۴۷
	۰/۲	۰/۰۰۴۰۵	۰/۰۰۰۳۸	۰/۰۰۱۹۶	۰/۰۰۴۶۰
	۱	۰/۰۰۵۴۸	۰/۰۰۰۴۹	۰/۰۰۲۲۸	۰/۰۰۶۳۳
	۵	۰/۰۰۷۲۰	۰/۰۰۰۶۹	۰/۰۰۲۴۰	۰/۰۰۷۶۰

بارگذاری الکترومکانیکی اعمالی به سطح بالایی عملگر، به صورت بار مکانیکی یکنواخت $t=10 \text{ kN/m}^2$ و بار الکتریکی $V=20$ ولت در نظر گرفته شده است. با افزایش شاخص توانی، خواص مادی از PZT-4 به PZT-5H متمایل می گردد و مقادیر بزرگتری برای جابجایی های بدون بعد مشاهده می شود. در همه موارد، نرخ تغییرات جابجایی در محدوده ۰ تا ۱ شاخص کسر حجمی برجسته تر است. تغییر شکل بدون بعد در توزیع تخلخل یکنواخت (نوع یک)، بیشترین تاثیر را از تغییر شاخص تخلخل متحمل می شود، در حالی که توزیع تخلخل مرکزی (نوع سه) کمترین تاثیر را می پذیرد. در همه موارد، تغییر شکل های بدون بعد عملگر در شاخص های کسر حجمی بالاتر به مقادیر حادی میل می کند

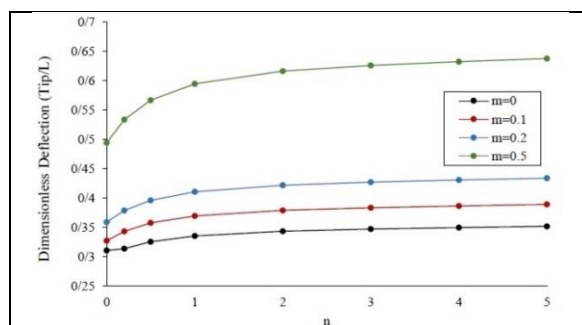
تاثیر تغییرات شاخص های توانی n و پارامتر تخلخل m بر تغییر فرم غیر خطی بدون بعد نوک عملگرهای پیزوالکتریک در جدول ۶ لیست شده است. عملگر تحت بار مکانیکی یکنواخت $t=25000 \text{ kN/m}^2$ و پتانسیل الکتریکی $V=200$ ولت قرار دارد. تاثیر حفره ها و تخلخل ها بر پاسخ خمشی عملگر قابل توجه است و برای همه الگوهای تخلخل، تغییر شکل بیشتر عملگر با افزایش شاخص های کسر حجمی و تخلخل مشاهده می شود. این روند به دلیل تغییرات در ثابت های سفتی عملگر و متاثر از وجود حفره ها است. حساسیت تغییرات شاخص کسر حجمی در محاسبه جابجایی بدون بعد نوک عملگر متخلخل که بر اثر تغییرات شاخص توانی n ایجاد می گردد، برای سه نوع تخلخل در شکل های ۱۰ تا ۱۲ ترسیم شده است.

جدول ۶- اثر تغییرات شاخص تخلخل بر روی جابجایی غیر خطی بدون بعد نوک عملگر پیزوالکتریک هدفمند ($L/h=10$)

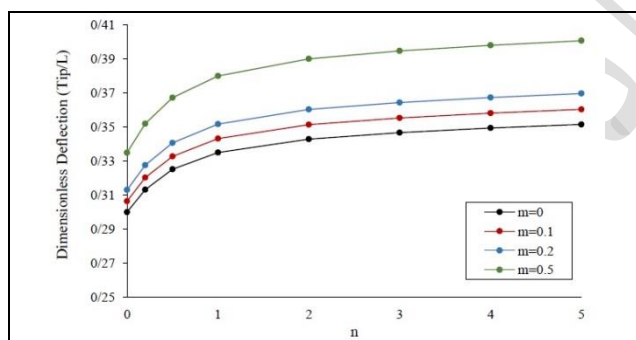
توزیع تخلخل	m	n						
		۰	۰/۲	۰/۵	۱	۲	۳	۵
غیر متخلخل	۰	۰/۳۵۸۱۷	۰/۳۷۱۷۴	۰/۳۸۳۶۸	۰/۳۹۳۴۲	۰/۴۰۱۰۴	۰/۴۰۴۷۴	۰/۴۰۹۵۰
نوع یک	۰/۱	۰/۳۸۵۹۶	۰/۴۰۱۷۶	۰/۴۱۵۷۴	۰/۴۲۷۲۶	۰/۴۳۶۳۵	۰/۴۴۰۷۶	۰/۴۴۴۴۴
نوع دو		۰/۳۷۱۹۸	۰/۳۸۷۱۰	۰/۴۰۰۴۸	۰/۴۱۱۴۳	۰/۴۱۹۸۷	۰/۴۲۳۸۳	۰/۴۲۸۸۲
نوع سه		۰/۳۶۴۹۸	۰/۳۷۹۰۶	۰/۳۹۱۴۷	۰/۴۰۱۶۲	۰/۴۰۹۵۷	۰/۴۱۳۴۲	۰/۴۱۸۳۸
نوع یک	۰/۲	۰/۴۱۷۹۹	۰/۴۳۶۷۶	۰/۴۵۳۵۷	۰/۴۶۷۶۸	۰/۴۷۸۸۹	۰/۴۸۴۲۶	۰/۴۹۱۱۱
نوع دو		۰/۳۸۷۴۴	۰/۴۰۴۴۴	۰/۴۱۹۶۳	۰/۴۳۲۱۶	۰/۴۴۱۷۲	۰/۴۴۶۰۴	۰/۴۵۱۳۳
نوع سه		۰/۳۷۲۰۶	۰/۳۸۶۶۹	۰/۳۹۹۶۱	۰/۴۱۰۱۹	۰/۴۱۸۵۰	۰/۴۲۲۵۳	۰/۴۲۷۷۰
نوع یک	۰/۵	۰/۵۵۰۰۱	۰/۵۸۵۵۵	۰/۶۱۴۵۸	۰/۶۴۰۲۴	۰/۶۶۱۹۹	۰/۶۷۲۶۳	۰/۶۸۶۳۷
نوع دو		۰/۴۴۸۲۰	۰/۴۷۴۷۶	۰/۴۹۹۷۶	۰/۵۲۰۷۲	۰/۵۳۵۵۰	۰/۵۴۱۰۵	۰/۵۴۶۸۱
نوع سه		۰/۳۹۵۲۰	۰/۴۱۱۷۴	۰/۴۲۶۴۳	۰/۴۳۸۶۲	۰/۴۴۸۲۶	۰/۴۵۲۹۰	۰/۴۵۸۸۵



شکل ۱۱- اثر تغییر شاخص های کسر حجمی و تخلخل بر روی جابجایی بدون بعد نوک عملگر متخلخل (نوع دو)



شکل ۱۰- اثر تغییر شاخص های کسر حجمی و تخلخل بر روی جابجایی بدون بعد نوک عملگر متخلخل (نوع یک)



شکل ۱۲- اثر تغییر شاخص های کسر حجمی و تخلخل بر روی جابجایی بدون بعد نوک عملگر متخلخل (نوع سه)

خطی مقایسه شده است و مشخص شد که تئوری خطی تغییر فرمها را در مقادیر بارگذاری الکترومکانیکی قوی بیش از مقدار واقعی پیش بینی می کند. خروجی مطالعه حاضر نشان می دهد که در نظر گرفتن حفره ها و تخلخل های موجود در فرمولاسیون مسئله، به طور قابل توجهی بر تغییر شکل عملگر متخلخل تأثیر می گذارد و توزیع تخلخل یکنواخت بیشترین تأثیر و توزیع تخلخل مرکزی کمترین تأثیر را می پذیرد. به علاوه، تغییرات در شاخص کسر حجمی در محدوده ۰ تا ۱ بیشترین نرخ تغییر در جابجایی نوک عملگر را دارد. بارگذاری مجزای مکانیکی و الکتریکی نشان داد که در مورد بارگذاری مکانیکی، مؤلفه عرضی جابجایی w نقش اصلی را دارد، در حالی که برای بارگذاری الکتریکی، مؤلفه درون صفحه ای جابجایی u بیشترین تأثیر را دارد. یافته های این تحقیق می تواند در طراحی و ساخت عملگرهای متخلخل پیزوالکتریک هدفمند مورد استفاده قرار گیرد.

تضاد منافع

نویسندگان اعلام می کنند که هیچ تضاد منافی ندارند.

۶. نتیجه گیری

در این مطالعه، تحلیل جابجایی غیر خطی نوک عملگر پیزوالکتریک متخلخل سه بعدی ساخته شده از مواد هدفمند تحت بارگذاری الکترومکانیکی مورد بررسی قرار گرفته است. خواص مادی عملگر براساس قانون توانی در راستای ضخامت و بر حسب کسر حجمی مواد تشکیل دهنده، تقریب زده شده است. ترم های غیرخطی فون-کارمن در میدان کرنش در نظر گرفته شده است. از اصل حساب تغییرات برای استخراج معادلات حاکمه غیر خطی و شرایط مرزی مربوطه استفاده شده است. معادلات غیر خطی بدست آمده با استفاده از روش نیوتن - رافسون خطی سازی شده و از پلتفرم جدید فینیکس جهت حل عددی معادلات استفاده شده است.

اثر پارامترهای شاخص توانی و تخلخل، نسبت طول به ضخامت و الگوهای توزیع تخلخل مختلف مورد بررسی و مقایسه قرار گرفته است. دقت و هم گرایی فرمول بندی حاضر به کمک نتایج موجود در مراجع مقایسه شده است. نتایج فرمولاسیون تئوری های غیرخطی با

7. Babaei M, Asemi K, Safarpour P. Buckling and static analyses of functionally graded saturated porous thick beam resting on elastic foundation based on higher order beam theory. *Iranian Journal of Mechanical Engineering Transactions of the ISME*. 2019 Mar 1;20(1):94-112. doi.org/10.1001.1.16059727.2019.20.1.4.0
8. Phuong NT, Tu TM, Phuong HT, Van Long N. Bending analysis of functionally graded beam with porosities resting on elastic foundation based on neutral surface position. *Journal of Science and Technology in Civil Engineering (JSTCE)-HUCE*. 2019 Jan 31;13(1):33-45. doi.org/10.31814/stce.nuce2019-13(1)-04
9. Kiran MC, Kattimani SC, Vinyas M. Porosity influence on structural behaviour of skew functionally graded magneto-electro-elastic plate. *Composite Structures*. 2018 May 1;191:36-77. doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.02.023
10. Taghian Dehaghani M, Ahmadian M. Fracture mechanism of CoCrMo porous nano-composite prepared by powder metallurgy route. *International Journal of Engineering*. 2018 Jan 1;31(1):19-24. Doi.org/10.5829/ije.2018.31.01a.03
11. Sarparast Z, Abdoli R, Rahbari A, Varmazyar M, Reza Kashyzadeh K. Experimental and numerical analysis of permeability in porous media. *International Journal of Engineering*. 2020 Nov
1. Biot MA. Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. I. Low-Frequency Range. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1956 Mar;28(2):168-78. doi.org/10.1121/1.1908239
2. Selvadurai AP, editor. *Mechanics of poroelastic media*. Springer Science & Business Media; 2013 Mar 14.
3. Busse A, Schanz M, Antes H. A Poroelastic Mindlin-Plate. In: *PAMM: Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics 2003 Dec (Vol. 3, No. 1, pp. 260-261)*. Berlin: WILEY-VCH Verlag. doi.org/10.1002/pamm.200310402
4. Magnucki K, Stasiewicz P. Elastic bending of an isotropic porous beam. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. 2004;9(2):351-60. ISSN : 1734-4492
5. Trinh MC, Kim SE. A three variable refined shear deformation theory for porous functionally graded doubly curved shell analysis. *Aerospace Science and technology*. 2019 Nov 1;94:105356. doi.org/10.1016/j.ast.2019.105356
6. Wang YQ, Zhao HL, Ye C, Zu JW. A porous microbeam model for bending and vibration analysis based on the sinusoidal beam theory and modified strain gradient theory. *International Journal of Applied Mechanics*. 2018 Jun 11;10(05):1850059. doi.org/10.1142/S175882511850059X

- International Journal of Engineering. 2012 Dec 1;25(4):353-62. doi.org/10.5829/idosi.ije.2013.25.04c.10
18. Fotros F, Pashaei MH, Alashti RA. Effects of geometric nonlinearity on stress analysis in large amplitude vibration of thin circular functionally graded plates with rigid core. doi.org/10.5829/idosi.ije.2011.24.03a.07
 19. Hecht F. New development in FreeFem++. Journal of numerical mathematics. 2012 Dec;20(3-4):251-66. doi.org/10.1515/jnum-2012-0013
 20. Rathgeber F, Ham DA, Mitchell L, Lange M, Luporini F, McRae AT, Bercea GT, Markall GR, Kelly PH. Firedrake: automating the finite element method by composing abstractions. ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS). 2016 Dec 21;43(3):1-27. doi.org/10.1145/2998441
 21. Langtangen HP. A FEniCS tutorial. In Automated solution of differential equations by the finite element method: The FEniCS book 2012 Feb 4 (pp. 1-73). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. ISSN 1439-7358
 22. Rodriguez MA, Augustin CM, Shadden SC. FEniCS mechanics: A package for continuum mechanics simulations. SoftwareX. 2019 Jan 1;9:107-11. doi.org/10.1016/j.softx.2018.10.005
 23. Shekarchizadeh N, Bersani AM. Developing an automatized optimization problem in FEniCS for parameter determination of metamaterials. In Proceedings of International Journal of Engineering. 2013(11):2408-15. doi.org/10.5829/ije.2020.33.11b.31
 12. Gupta A, Talha M. Influence of initial geometric imperfections and porosity on the stability of functionally graded material plates. Mechanics Based Design of Structures and Machines. 2018 Nov 2;46(6):693-711. doi.org/10.1080/15397734.2018.1449656
 13. Wang QM, Zhang Q, Xu B, Liu R, Cross LE. Nonlinear piezoelectric behavior of ceramic bending mode actuators under strong electric fields. Journal of Applied Physics. 1999 Sep 15;86(6):3352-60. doi.org/10.1063/1.371213
 14. Rezazadeh G, Khanchehgardan A, Shah-Mohammadi-Azar A, Shabani R. Mechanical response of a piezoelectrically sandwiched nano-beam based on the non-local theory. International Journal of Engineering. 2013 Dec 1;26(12):1515-24. doi.org/10.5829/idosi.ije.2013.26.12c.12
 15. Nosier A, Rouhi M. Three-dimensional analysis of laminated cylindrical panels with piezoelectric layers.
 16. Zhang Z, Fu G, Xu D. A Dynamic Model for Laminated Piezoelectric Microbeam. International Journal of Engineering. 2023 Jun 1;36(6):1143-9. doi.org/10.5829/ije.2023.36.06c.13
 17. Dardel M, Khavvaji A, Akbari Alashti R, Pashaei MH. Large Deflection Analysis of Compliant Beams of Variable Thickness and Non-Homogenous Material under Combined Load and Multiple Boundary Conditions.

- deformation theory. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2011 Feb;22(3):231-43.
doi.org/10.1177/1045389X11398162
31. Pandey VB, Parashar SK. Static bending and dynamic analysis of functionally graded piezoelectric beam subjected to electromechanical loads. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 2016 Dec;230(19):3457-69.
doi.org/10.1177/0954406215596359
 24. Phunpeng V, Baiz P. Mixed finite element formulations for strain-gradient elasticity problems using the FEniCS environment. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2015 Apr 1;96:23-40.
doi.org/10.1016/j.finel.2014.11.002
 25. Reddy JN. *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. CRC press; 2003 Nov 24. ISBN 9780429210693
 26. Abali BE, Müller WH, Eremeyev VA. Strain gradient elasticity with geometric nonlinearities and its computational evaluation. *Mechanics of Advanced Materials and Modern Processes*. 2015 Dec;1:1-1.
doi.org/10.1186/s40759-015-0004-3
 27. Logg A, Mardal KA, Wells G, editors. *Automated solution of differential equations by the finite element method: The FEniCS book*. Springer Science & Business Media; 2012 Feb 24.
doi.org/10.1007/978-3-642-23099-8
 28. Arnold DN, Logg A. Periodic table of the finite elements. *Siam News*. 2014 Nov 3;47(9):212.
 29. Alnæs M, Blechta J, Hake J, Johansson A, Kehlet B, Logg A, Richardson C, Ring J, Rognes ME, Wells GN. The FEniCS project version 1.5. *Archive of numerical software*. 2015 Dec 7;3(100).
 30. Doroushi A, Eslami MR, Komeili A. Vibration analysis and transient response of an FGPM beam under thermo-electro-mechanical loads using higher-order shear FEniCS 2021 2021 (pp. 660-679).
doi.org/10.6084/m9.figshare.14495607