

رهیافتی نو برای حل معادلات انتگرالی فردهولم و ولترا

غلامرضا محمددادی^۱

چکیده

: در سالهای اخیر، معادلات انتگرالی مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته است. این معادلات، در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و معادلات دیفرانسیل معمولی استفاده می شوند. یک نوع خاص از معادلات انتگرالی، معادلات انتگرالی ولترا است که در جمعیت شناسی به عنوان معادله انتگرال لوتکا، مطالعه مواد ویسکوالاستیک، در علم اکچوئری از طریق معادله تجدید و در مکانیک سیالات برای توصیف رفتار جریان در نزدیکی مرزهای با اندازه محدود کاربرد پیدا می کنند. در این مقاله رویکردی نو برای حل عددی معادلات انتگرالی ولترا ارائه شده است. در این روش، ابتدا معادلات انتگرالی ولترا به یک مسئله گشتاور با بعد نامتناهی تبدیل می شوند. سپس، با یک روش تقریبی، مسئله گشتاور با بعد نامتناهی به مسئله گشتاور با بعد محدود تبدیل می شود به گونه ای که خطای محاسبات قابل چشم پوشی است. در ادامه، مسئله گشتاور با بعد محدود به یک مسئله برنامه ریزی خطی تبدیل می شود. پاسخ مسئله برنامه ریزی خطی را به سادگی می توان با استفاده از نرم افزارهای مختلفی از جمله متلب بدست آورد که با حل آن، پاسخ معادلات انتگرالی ولترا بدست می آید. با استفاده از دومتال، عملکرد الگوریتم پیشنهادی بررسی شده است. شبیه سازیها نشان می دهد که روش پیشنهادی عملکرد قابل قبولی دارد.

دریافت مقاله:

پذیرش مقاله:

کلمات کلیدی: سریهای فوریه، برنامه ریز خطی، مسئله گشتاور با بعد نامتناهی، معادله انتگرالی ولترا و فردهولم

پیشگفتار

معادلات انتگرالی آن دسته از معادلات هستند که در آن‌ها تابع مجهول زیر نماد انتگرال قرار دارد. ارتباط نزدیکی بین معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی یا معادلات دیفرانسیل معمولی و انتگرال وجود دارد و می‌توان برخی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی یا معادلات دیفرانسیل معمولی را به صورت معادلات انتگرالی فرمول‌بندی کرد [۴-۱]. یکی از رایج‌ترین انواع معادلات انتگرالی، معادله انتگرالی ولترا است [۵]. معادله انتگرال ولترا به دو دسته معادلات انتگرال ولترا نوع اول و دوم تقسیم می‌شود که در ادامه این معادلات آورده شده است.

$$f(x) = \int_a^x k(x,t)y(t)dt \quad (۱)$$

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)y(t)dt \quad (۲)$$

در این معادلات، $f(x), k(x,t) \in L_2[a,b]$ توابعی معلوم در نظر گرفته می‌شوند که دارای سری فوریه هستند. a و λ مقادیری معلوم و y یک تابع مجهول فرض شده است. فرض کنید $\hat{k}(x,t)$ به صورت زیر تعریف شوند [۶-۴]:

$$\hat{k}(x,t) = \begin{cases} k(x,t) & a \leq t \leq x \\ 0 & x \leq t \leq b \end{cases} \quad (۳)$$

بر این اساس، معادلات انتگرال (۱) و (۲) به صورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$f(x) = \int_a^b \hat{k}(x,t)y(t)dt \quad (۴)$$

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \hat{k}(x,t)y(t)dt \quad (۵)$$

این معادلات، معادلات انتگرالی فرد هولم نوع اول و دوم نامیده می‌شوند. در این مقاله بدون از دست دادن کلیت مسئله، $a = 1$ و $0 \leq x \leq 1$ در نظر گرفته شده‌اند. بنابراین حل معادلات انتگرالی (۶) و (۷) معادل با حل معادلات انتگرالی (۱) و (۲) است.

$$f(x) = \int_0^1 k(x,t)y(t)dt \quad (۶)$$

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 k(x,t)y(t)dt \quad (۷)$$

۱. استفاده از سری فوریه برای حل معادلات انتگرالی ولترا

معادله انتگرالی (۶) را در نظر بگیرید. سری کسینوسی فوریه نیم دامنه توابع $f(x)$ و $k(x,t)$ به شرح زیر است:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos(k\pi x) \quad x \in [-1,1] \quad (۸)$$

$$k(x, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k(t) \cos(k\pi x) \quad x \in [-1,1], t \in [0,1] \quad (۹)$$

با جایگزینی (۸) و (۹) در معادله انتگرالی (۶) نتیجه می شود:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos(k\pi x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 b_k(t) y(t) dt \right) \cos(k\pi x) \quad (۱۰)$$

a_k و $b_k(t)$ مقادیری معلوم هستند و معادله (۱۰) برای همه توابع مجهول y برقرار است، اگر:

$$a_k = \int_0^1 b_k(t) y(t) dt \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (۱۱)$$

هم اکنون پیشنهاد می شود:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} C_k \cos(k\pi x) \quad (۱۲)$$

C_k مقادیری مجهول هستند. با جایگزینی (۸)، (۹) و (۱۲) در معادله انتگرالی (۷)، نتیجه می شود که:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} C_k \cos(k\pi x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos(k\pi x) + \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 b_k(t) y(t) dt \right) \cos(k\pi x) \quad (۱۳)$$

معادله (۱۳) برای تمام مقادیر x صادق است اگر:

$$C_k = a_k + \lambda \int_0^1 b_k(t) y(t) dt \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (۱۴)$$

معادلات (۱۱) و (۱۴) مسائل گشتاور با ابعاد نامتناهی هستند. برای یافتن جواب این معادلات باید این معادلات به مسائل گشتاور با بعد محدود تبدیل شوند.

۲. تبدیل مسئله گشتاور با بعد بی نهایت به مسئله گشتاور با بعد محدود

فرض کنید $\dot{f}(x)$ و $\ddot{f}(x)$ توابع پیوسته مرزدار هستند و برای یک L ثابت:

$$|\ddot{f}(x)| \leq L \quad (۱۵)$$

ضرایب سری فوریه کسینوسی نیم دامنه $f(x)$ را در نظر بگیرید:

$$a_k = \int_0^1 f(x) \cos(k\pi x) dx \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (۱۶)$$

با انجام چندین عمل جبری می توان نشان داد که

$$a_k = -\frac{1}{k^2\pi^2} \int_0^1 \ddot{f}(x) \cos(k\pi x) dx \quad (۱۷)$$

از رابطه فوق نتیجه می شود که:

$$|a_k| = \frac{1}{k^2\pi^2} \left| \int_0^1 \ddot{f}(x) \cos(k\pi x) dx \right| \leq \frac{L}{k^2\pi^2} \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (۱۸)$$

بنابراین

$$|f(x)| = \left| \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos(k\pi x) \right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{L}{k^2\pi^2} = \frac{L}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{L}{\pi^2} \frac{\pi^2}{6} = \frac{L}{6} < \infty \quad (۱۹)$$

در نتیجه، سری (۸) به طور یکنواخت در بازه $[0, 1]$ همگرا می شود. فرض کنید ε یک عدد مثبت اختیاری است. از معادله پارسوال نتیجه می شود که:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k^2 = \int_0^1 f^2(x) dx < \infty \quad (۲۰)$$

یک $M = M(\varepsilon)$ وجود دارد به طوری که

$$\sum_{k=M+1}^{+\infty} a_k^2 < \frac{\varepsilon^2}{4} \quad (۲۱)$$

تقریبی از $f(x)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$f_M(x) = \sum_{k=0}^M a_k \cos(k\pi x) \quad (۲۲)$$

با توجه به معادله پارسوال نتیجه می شود که:

$$|f(x) - f_M(x)|^2 = \sum_{k=M+1}^{+\infty} a_k^2 \quad (۲۳)$$

M به گونه ای انتخاب می شود که:

$$\sum_{k=M+1}^{+\infty} a_k^2 < \frac{\varepsilon^2}{4} \quad (۲۴)$$

بر این اساس، مسائل گشتاور با بعدی نامتناهی (۱۱) و (۱۴) به مسائل گشتاور با بعدی متناهی زیر تبدیل می شوند:

$$a_k = \int_0^1 b_k(t) y(t) dt \quad k = 0, 1, 2, \dots, M \quad (۲۵)$$

$$C_k = a_k + \lambda \int_0^1 b_k(t) y(t) dt \quad k = 0, 1, 2, \dots, M \quad f_M(x) = \sum_{k=0}^M a_k \cos(k\pi x) \quad (۲۶)$$

۳. تعیین تابع مجهول $y(x)$

برای یافتن $y(x)$ در معادله انتگرالی (۶)، مسئله گشتاور با بعد متناهی (۲۵) به مسئله بهینه سازی زیر تبدیل می شود:

$$J = \sum_{k=0}^M \left| a_k - \int_0^1 b_k(t) y(t) dt \right| \quad (27)$$

در (۲۷)، انتگرال را به صورت زیر می توان تقریب زد:

$$\int_0^1 b_k(t) y(t) dt \cong \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} b_k \left(\frac{i}{n} \right) y \left(\frac{i}{n} \right) \quad (28)$$

n یک عدد صحیح مثبت است. اگر x یک عدد آزاد (مثبت، منفی یا صفر) باشد، اعدادی مانند $A \geq 0$ و $B \geq 0$ وجود دارند به گونه ای که:

$$\begin{aligned} x &= A - B \\ |x| &= A + B \end{aligned} \quad (29)$$

با استفاده از (۲۸) و (۲۹) و با در نظر گرفتن $y \left(\frac{i}{n} \right) = y_i$ و $b_k \left(\frac{i}{n} \right) = b_{ki}$ رابطه (۲۷) به صورت زیر تبدیل می شود.

$$\begin{aligned} J &= \text{Min} \sum_{k=0}^M (A_k + B_k) \\ a_k - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} b_{ki} y_i &= A_k - B_k \quad k = 0, 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (30)$$

$$A_k, B_k \geq 0 \quad k = 0, 1, 2, \dots, M$$

با حل مسئله برنامه ریزی خطی (۳۰)، $y(x)$ به دست می آید. به روشی مشابه، حل معادله انتگرال (۷) را می توان به مسئله بهینه سازی زیر تبدیل کرد:

$$\begin{aligned} J &= \text{Min} \sum_{k=0}^M (A_k + B_k) \\ C_k - a_k - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} b_{ki} y_i &= A_k - B_k \quad k = 0, 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (31)$$

$$y_i = \sum_{k=0}^M C_k \cos \left(\frac{k\pi i}{n} \right) \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

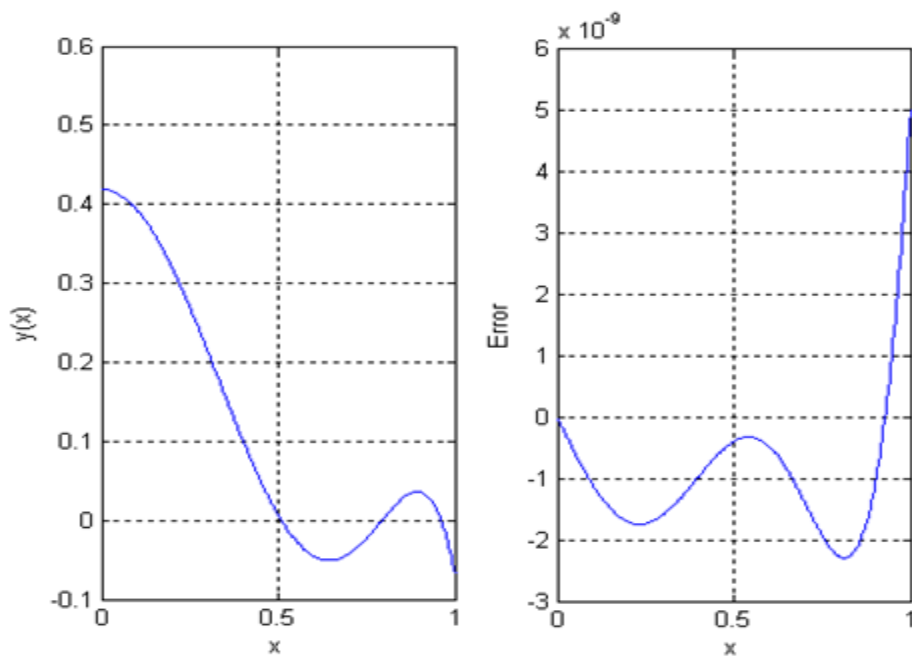
$$A_k, B_k \geq 0 \quad k = 0, 1, 2, \dots, M$$

۴. مثالها

مثال ۱: در معادله انتگرالی (۶)، فرض کنید:

$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ k(x, t) &= t \sin(xt) \end{aligned} \quad (32)$$

که در آن $0 \leq x \leq 1$ فرض کنید $n = 300$ و $\varepsilon = 0.001$ در این صورت، با استفاده از معادله (۲۴)، $M = 30$ می شود. $y(x)$ بدست آمده از مسئله برنامه ریزی خطی (۳۰) در شکل (۱-۱) و خطای حاصله $Error = f(x) - \int_0^1 k(x,t)y(t)dt$ بر حسب x در شکل (۲-۱) نشان داده شده است که تغییرات آن از مرتبه 10^{-9} است.



شکل ۱-۱- $y(x)$ بدست آمده از

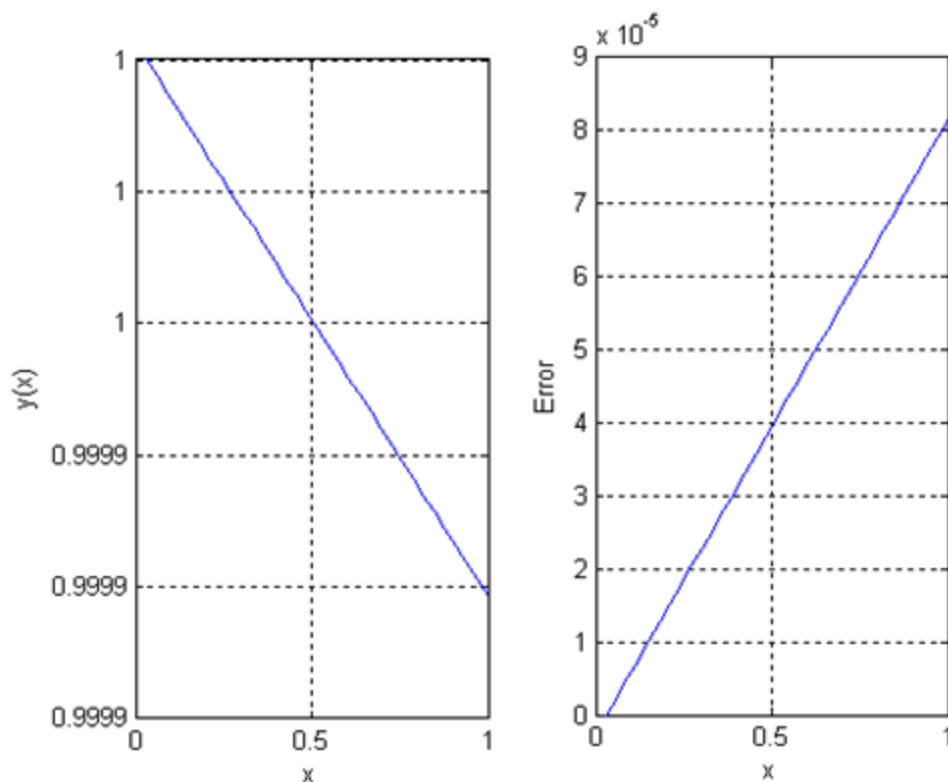
شکل ۲-۱- خطای روش پیشنهادی

مسئله برنامه ریزی خطی

مثال ۲: در معادله انتگرالی (۷)، فرض کنید:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \\ k(x,t) &= e^{x-t} \\ \lambda &= -1 \end{aligned} \quad (33)$$

که در آن $0 \leq x \leq 1$ فرض کنید $n = 300$ و $\varepsilon = 0.001$ در این صورت، با استفاده از معادله (۲۴)، $M = 40$ می شود. $y(x)$ بدست آمده از مسئله برنامه ریزی خطی (۳۱) در شکل (۱-۲) و در شکل (۲-۲) نشان داده شده است که تغییرات آن از مرتبه 10^{-5} است.



شکل ۲-۱- بدست آمده از $y(x)$

شکل ۲-۲- خطای روش پیشنهادی

مسئله برنامه ریزی خطی

۵. نتایج

در این مقاله روش جدیدی برای حل معادلات انتگرال ولترا ارائه گردید. در روش پیشنهادی، با دانستن ضرایب سری فوریه توابع معلوم $f(x)$ و $k(x, t)$ ، تابع مجهول $y(x)$ به راحتی بدست می آید. معادله انتگرالی به یک مسئله برنامه ریزی خطی تبدیل و سپس، با حل مسئله برنامه ریزی خطی، پاسخ $y(x)$ تعیین می گردد که این پاسخ، به اندازه کافی دقیق می باشد.

۶. مراجع

- [1] Michael A. Golberg, Numerical solution of integral equations, Springer, (1990).
- [2] M.A.Berger and V. J. Mizel. Volterra equations with Ito integrals I. J. Integral Equations, 187–245, (1980).
- [3]- Hackbusch,W., Integral Equations Theory and Numerical Treatment, vol.120 ISNM, Birkhauser Verlag, Switzerland (1995).

[4]- Annamaria Palamara Orsi, Product integration for Volterra Integral Equations for the second kind with weakly singular kernelsm Mathematics of Computation, Volume 65, Number 215, 1201-1212 (1996).

[5] J. A. D. Appleby. Almost sure asymptotic stability of linear Ito-Volterra equations with damped stochastic perturbations. Electronic Communications in Probability, 7:213–224, (2008).

[6] Ji-Huan He, A simple approach to Volterra-Fredholm integral equations, Journal of applied and computational mechanics, 1184-1186, (2020).