



Distributionally Robust Kelly Portfolio Optimization Based on K-L Divergence

Asghar Zafari

Department of Financial engineering, Tabriz Branch, Islamic Azad University, Tabriz, Iran.

Yaghoub Pourkrim (Corresponding author)

Department of Accounting, Tabriz Branch, Islamic Azad University, Tabriz, Iran.

pourkarim@iaut.ac.ir

Seyedali Paytakhti oskoi

Department of Economy, Tabriz Branch, Islamic Azad University, Tabriz, Iran.

Mehdi Zeynali

Department of Accounting, Tabriz Branch, Islamic Azad University, Tabriz, Iran.

Ahmad Mohammady

Department of Accounting, Tabriz Branch, Islamic Azad University, Tabriz, Iran.

Article Info	Extended Abstract
Article type: Research Article	Introduction One of the major challenges in finance is the optimal portfolio selection problem, which entails constructing a portfolio of assets based on optimality criteria such as maximizing returns and minimizing risks. Traditional models, such as the mean-variance approach, optimize asset allocation by evaluating risk through standard deviation and return via the weighted average. However, these models are limited by their reliance on single historical return distributions and their subsequent vulnerability to overfitting, which negatively impacts out-of-sample performance.
Article history: Received: 09 Nov 2024 Accepted: 05 May 2025	Literature Review In response to uncertainty in the empirical distribution of returns, several advanced portfolio optimization frameworks have emerged. These include robust and distributionally robust models utilizing various distance metrics (e.g. Wasserstein, KL-divergence, spectral risk measures) and optimization algorithms. Notably, the Kelly criterion, which maximizes the expected logarithmic growth rate of portfolio value, has received attention due to its superior long-term growth properties. However, using
Keywords: distributionally robust, Kelly portfolio, K-L divergence.	
JEL Classification: G30 - G11.	



empirical return distributions in the Kelly model may lead to overfitting. Distributionally robust optimization, particularly based on Kullback-Leibler (KL) divergence, seeks to address this shortcoming by considering a family of possible distributions surrounding the empirical one.

Methodology

This study develops a distributionally robust Kelly portfolio optimization model based on the KL-divergence. The robust model constructs a so-called “ambiguity set”—a neighborhood of distributions within a specified KL-divergence from the empirical distribution. The model adopts a max-min approach: for each candidate set of portfolio weights, the lowest expected logarithmic return among all distributions within this neighborhood is considered as the objective function. The model is solved using a particle swarm optimization (PSO) algorithm due to the complexity and non-analytic nature of the simulation process.

The empirical study is conducted on the Tehran Stock Exchange. A dataset covering weekly returns of ten selected industry indices over a period of about 15 years is used. From these, all possible combinations of five-asset portfolios (252 portfolios) are constructed. Historical data are split into training (85%) and test (15%) sets. The ambiguity sets are constructed around the empirical distributions using KL-divergence, and optimization is performed with PSO for each portfolio.

Findings

The empirical findings indicate that the distributionally robust Kelly portfolio significantly outperforms both the standard Kelly portfolio and the equally-weighted portfolio in terms of risk-adjusted returns, measured by the Sharpe ratio. Specifically, the robust portfolio achieved a Sharpe ratio more than 2.5 times higher than the standard Kelly and 5 times higher than the equally-weighted portfolio based on out-of-sample test data. This demonstrates the substantial improvement in risk-adjusted cumulative returns attributable to the proposed robust optimization approach. The findings are consistent with recent studies in the field, confirming the effectiveness of distributional robustness in managing model risk and uncertainty.

Conclusion



The study shows that optimizing portfolios using a distributionally robust Kelly model with KL-divergence not only mitigates the adverse effects of overfitting to historical data, but also enhances risk management and improves long-term performance—particularly in dynamic and uncertain markets such as the Tehran Stock Exchange. Practically, this approach is highly recommended for risk-averse investors aiming to maximize growth while maintaining robust performance. Further research may extend this methodology to other markets or incorporate additional sources of uncertainty.

Conflict of Interest

The authors declare that they have no conflict of interest with respect to the author or publication of this article.





بهینه‌سازی استوار توزیعی سبد سهام کلی بر اساس معیار واگرایی کی-ال

اصغر ظفری

گروه مهندسی مالی، واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران.

یعقوب پورکریم (نویسنده مسئول)

گروه حسابداری، واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران.

pourkarim@iaut.ac.ir

سید علی پایتختی اسکویی

گروه اقتصاد، واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران.

مهدی زینالی

گروه حسابداری، واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران.

احمد محمدی

گروه حسابداری، واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران.

اطلاعات مقاله

چکیده

نوع مقاله:

پژوهشی

تاریخچه مقاله:

تاریخ دریافت: ۰۹ آبان‌ماه

۱۴۰۳

تاریخ پذیرش: ۱۵ اردیبهشت

ماه ۱۴۰۳

واژگان کلیدی:

استوار توزیعی، سبد سهام

کلی، واگرایی کی-ال.

سبد سهام کلی یک مدل انتخاب سبد سهام با هدف تخصیص بهینه سرمایه به منظور به حداکثر رساندن بازده تجمعی مورد انتظار سبد سهام در بلندمدت است. غالباً در این مدل از توزیع بازده تجربی استفاده می‌شود که این رویکرد باعث مسئله تطابق بیش‌ازحد با نمونه‌های تاریخی می‌شود که به عملکرد ضعیف خارج از نمونه منجر می‌شود. برای رفع این مشکل در پژوهش حاضر یک مدل استوار توزیعی از سبد سهام کلی با رویکرد بدترین سناریو ارائه می‌شود که در آن سناریوها، توزیع‌های در یک شعاع همسایگی از توزیع تجربی بر اساس معیار فاصله واگرایی کی-ال می‌باشد و برای ساختن آن‌ها از رویکرد شبیه‌سازی استفاده می‌شود. بهینه‌سازی مدل استوار توزیعی سبد سهام کلی بر اساس معیار واگرایی کی-ال بر روی نمونه آماری متشکل از ۲۵۲ سبد ۵ عضوی با افق زمانی هفتگی از بین ۱۰ دارایی و با الگوریتم بهینه‌سازی تجمعی ذرات نشان داد که سبد استوار توزیعی در معیار نسبت شارپ از دو سبد هم‌وزن و سبد کلی معمولی بهتر عمل می‌کند. به‌صورتی که نسبت شارپ بازده تجمعی سبد پیشنهادی بیش از ۲/۵ برابر سبد کلی معمولی و ۵ برابر سبد هم‌وزن می‌باشد. این مطلب نشان می‌دهد که استوار سازی توزیعی دارای اثر قابل‌توجهی در بهبود بازده تجمعی تعدیل‌شده با ریسک دارد.



© نویسندگان.

ناشر: دانشگاه آزاد اسلامی واحد آبد کنول.

۱. مقدمه

یکی از مهم‌ترین چالش‌ها در دنیای مالی، مسئله انتخاب سبد سهام بهینه است. سبد سهام مجموعه‌ای از دارایی‌هاست که بر اساس یک یا چند معیار بهینگی انتخاب می‌شود. غالباً این معیارها در مورد بازده و ریسک سبد اعمال می‌شود تا مشخص کند که سهم هر دارایی در سبد بهینه به چه میزان است. در ادبیات تحقیق مدل‌های مختلفی از سبد سهام توسعه یافته است. سبد میانگین-واریانس^۱ اولین تلاش در مدل‌سازی ریاضی-آماري از این مسئله می‌باشد و سبدي در مرز کارایی را انتخاب می‌کند که ضمن برآورد حداقل بازده مورد انتظار سرمایه‌گذار، از کمترین ریسک ممکن برخوردار باشد (Ji et al., 2022). در این مدل برای سنجش بازده سبد سهام از میانگین موزون بازده دارایی‌ها و برای سنجش ریسک از انحراف معیار استاندارد به عنوان یک معیار سنجش انحراف محور متقارن استفاده می‌شود. همچنین می‌توان از معیارهای ریسک نامطلوب یا مبتنی بر ضرر استفاده کرد که در آن ریسک سبد سهام بر اساس میزان ضرر در یک سطح اطمینان مشخص تعریف می‌گردد. ارزش در معرض ریسک، ریزش مورد انتظار و امید چندی از مهم‌ترین این معیارها هستند (Hsieh, 2020). از دیگر مدل‌های انتخاب سبد سهام بهینه با فلسفه خاص می‌توان به مدل برابری ریسک اشاره کرد که در آن سهم ریسک دارایی‌ها از ریسک کل سبد تا حد ممکن یکسان می‌گردد تا تغییرات شدید در بازده یک یا چند دارایی نسبت به مقدار مورد انتظارشان، سبد سهام را با تغییرات غیرمنتظره شدید مواجه نکند. سبد حداکثر مقدار پیش‌بینی پذیری نیز گونه دیگری از سبد سهام است که اوزان سبد را به گونه‌ای بهینه می‌کند تا میزان پیش‌بینی پذیری بازده مورد انتظار سبد سهام در معیارهای همچون ضریب تعیین تعدیل شده بیشینه گردد. خلاصه اینکه با در نظر گرفتن معیارها و روش‌های مختلف برآورد بازده و ریسک، مدل‌های مختلفی از سبد سهام با فلسفه‌های مختلف شکل گرفته‌اند (Su & Li, 2024).

1 Mean-variance portfolio

در صورتی که برای سنجش بازده مورد انتظار از بازده لگاریتمی استفاده شود، مدل سبد سهام کلی^۱ شکل می‌گیرد. استراتژی کلی که توسط جان کلی در سال ۱۹۵۶ ایجاد شد، در ابتدا برای به حداکثر رساندن ثروت انباشته در بازی‌های شرط‌بندی مکرر طراحی شد، اما بعداً برای تخصیص بهینه سرمایه با هدف به حداکثر رساندن نرخ رشد مورد انتظار سبد سهام در بلندمدت گسترش یافت ([Carta & Conversano, 2020](#)). مطالعات مختلف نشان داده‌اند که یک سبد سرمایه‌گذاری بر اساس استراتژی کلی می‌تواند در درازمدت از هر سبد دیگری بهتر عمل کند ([Hsieh, 2020](#))؛ بنابراین فلسفه این مدل در کسب بازده تجمعی بالاتر در درازمدت می‌باشد. در مدل کلی توزیع بازده سبد یک پارامتر اصلی و یک منبع نا اطمینانی در مدل محسوب می‌شود. در واقع ذات پویای بازار سرمایه امکان انحراف از یک برآورد آماری از توزیع بازده سبد را امکان‌پذیر می‌کند. بدین صورت نیاز است تا سبد سهام در مقابل این منبع نا اطمینانی استوار گردد. بر اساس این نیاز، هدف پژوهش حاضر، بهینه‌سازی استوار توزیعی سبد سهام با معیار کلی با رویکرد واگرایی کی ال^۲ می‌باشد. نوآوری پژوهش حاضر در بعد نظری طراحی مدل ترکیبی سبد سهام استوار توزیعی با معیار کلی با رویکرد واگرایی کی-ال و در بعد عملی بررسی عملکرد صورت استوار مدل کلی در بورس اوراق بهادار تهران و مقایسه عملکرد استواری و سودآوری آن با فرم معمولی آن و با سبد هم‌وزن می‌باشد.

۲. مبانی نظری و پیشینه پژوهش

هر مسئله بهینه‌سازی دارای پارامترهایی است که باید قبل از محاسبه جواب بهینه، مقداردهی شوند. به‌عنوان نمونه در مسئله بهینه‌سازی سیاست تولید، سود محصولات و میزان منابع در دسترس، پارامترهای مدل هستند. در یک اقتصاد با نا اطمینانی بالا قطعاً این دو پارامتر مستعد تغییر هستند و از این رو مدل با یک منبع نا اطمینانی مواجه است. در بسیاری از مدل‌های بهینه‌سازی، پارامترهایی وجود دارند که باید به‌صورت آماری برآورد گردند. زمانی که در یک مدل، پارامتر آماری وجود داشته باشد ([Adak et al., 2024](#)). زمینه برای بی‌ثباتی مدل فراهم می‌گردد؛ زیرا در عمل، ممکن است

1 Kelly portfolio

2 KL divergence

پارامتر موردنظر از مقدار برآوردی، برحسب کوچکی و بزرگی واریانس، فاصله بگیرد. ازاین رو در صورت تغییرات شدید ممکن است نتایج غیرقابل پیش بینی حاصل شود. مسئله انتخاب سبد سهام بهینه در زمره این دسته از مدل ها است زیرا بازده و ریسک دو پارامتر مهم در این گونه مسائل هستند که غالباً به صورت آماری و برحسب داده های تاریخی برآورد می گردند. بعلاوه در نظر گرفتن یک مقدار به جای پارامتر با ذات پویای بازار سرمایه خصوصاً در کشور ما که با ریسک های سیاسی و اقتصادی فراوان همراه هست، چندان درست به نظر نمی رسد. بهینه سازی استوار رهیافتی برای مواجهه با عدم قطعیت در پارامترهای مورد استفاده در مدل سازی و خصوصاً مسئله انتخاب سبد سهام بهینه است (Jing et al., 2023).

مدل سبد بهینه در پژوهش حاضر، سبد استوار با معیار کلی یا به اختصار سبد کلی می باشد که در آن برای سنجش بازده مورد انتظار از بازده لگاریتمی استفاده می شود. هدف و فلسفه این مدل تخصیص بهینه سرمایه با هدف به حداکثر رساندن نرخ رشد مورد انتظار سبد سهام در بلندمدت است. مطالعات مختلف نشان داده اند که یک سبد سرمایه گذاری بر اساس استراتژی کلی می تواند در درازمدت از هر سبد دیگری بهتر عمل کند. در مدل سبد کلی فرض می شود که سرمایه گذار اطلاعات کاملی از بازده توأم دارایی های تشکیل دهنده سبد دارد. باین حال، درواقعیت، توزیع بازده قابل مشاهده نیست و باید به صورت آماری برآورد گردد (Gunjan & Bhattacharyya, 2023).

چندین مطالعه نشان داده اند که سبد بهینه سازی شده بر اساس توزیع بازده نادرست می تواند در تست خارج از نمونه عملکرد ضعیفی داشته باشد. یک رویکرد جایگزین که کاملاً مبتنی بر داده است، اعمال مستقیم توزیع بازده تجربی ساخته شده از بازده های تاریخی است. این رویکرد باعث مسئله تطابق بیش از حد^۱ با نمونه های تاریخی می شود که همچنان می تواند منجر به عملکرد ضعیف خارج از نمونه شود. این می تواند برای سرمایه گذارانی که نگران رویدادهای شدیدی هستند که ممکن است باعث انحراف چشمگیر دارایی ها از عملکرد تاریخی خود شوند، نگران کننده باشد (Bermin & Holm, 2023). ایده اصلی پشت استوار سازی توزیعی این است که عدم قطعیت در توزیع

¹ Overfitting

بازده را با ساخت مجموعه‌ای از توزیع‌های ابهام^۱ که می‌تواند توزیع مولد داده را با اطمینان بالا شامل شود، توضیح دهد. یک‌راه حل استوار با بهینه‌سازی در برابر توزیع بدترین حالت در مجموعه ابهام به دست می‌آید (Beyranvand et al., 2024a).

پویایی بازار سهام می‌تواند موجب تغییر در بازده دارایی‌های سبد سهام برای دوره‌های زمانی مختلف شود و مسئله سبد سهام استوار توزیعی، با توزیع بازده سبد سهام به صورت یک پارامتر دارای عدم قطعیت برخورد می‌کند. در مدل کلی به صورت متداول، توزیع بازده سبد سهام (نه تک تک دارایی‌ها) از دیدگاه توزیع تجربی موردبررسی قرار می‌گیرد. بدین صورت توزیع سبد سهام می‌تواند از مقدار برآوردی تجربی خود منحرف شود و زمینه برای عدم استواری سبد سهام ایجاد گردد. همان‌طور که بیان شد یک‌راه حل برای مواجهه با این شرایط، در نظر گرفتن یک خانواده از توزیع‌ها به جای یک توزیع می‌باشد. این خانواده از توزیع‌ها در نزدیکی و همسایگی از توزیع تجربی قرار دارند و سناریوهایی را شبیه‌سازی می‌کنند که نشان‌دهنده انحراف توزیع سبد از توزیع تجربی است. برای این منظور نیاز است تا فاصله بین دو توزیع (توزیع تجربی و توزیع دارای انحراف از توزیع تجربی) مورداندازه‌گیری قرار گیرد. برای این منظور پژوهش حاضر از معیار فاصله واگرایی کی-ال^۲ استفاده می‌کند. با اندازه‌گیری فاصله بین دو اندازه احتمال، ناستواری سبد سهام توسط یک شعاع همسایگی حول بازده تجربی کنترل می‌شود. بدین صورت استوار سازی با اطمینان بالاتر با شعاع همسایگی بزرگ‌تر حول توزیع تجربی کنترل می‌شود. بنا بر آنچه گذشت، در ابتدا به اهمیت مدل‌های استوار در محیط نااطمینانی اشاره گردید و سپس معیار کلی برای کسب بازده بالاتر در بلندمدت موردتوجه قرار گرفت. در ادامه مدل‌های استوار توزیعی معرفی شد که پارامتر بازده سبد را به عنوان منبع نااطمینانی در بهینه‌سازی سبد سهام در نظر می‌گرفت. خلأ تحقیقاتی که پژوهش حاضر موردتوجه قرار می‌دهد، ترکیب سه مورد اشاره شده در قالب طراحی مدل سبد سهام بهینه استوار توزیعی کلی است که تاکنون در ادبیات تحقیق موردبررسی قرار نگرفته است. رهیافت مورد استفاده

1 Ambiguity sets

2 Kullback-Leibler divergence

برای استوار سازی توزیعی، رویکرد بدترین سناریو یا مکس-مین^۱ می باشد که در آن جواب بهینه به صورتی انتخاب می شود تا بدترین ضرر حاصل شده از سناریوهای مختلف (توزیع های انحرافی حول توزیع تجربی) کمینه گردد. برای ساختن توزیع های انحرافی از رویکرد شبیه سازی استفاده خواهد شد و از الگوریتم تجمعی ذرات برای یافتن سبد بهینه استفاده خواهد شد. در بخش مدل پژوهش، جزئیات ریاضی مدل پژوهش مورد بررسی قرار می گیرد. در ادامه به بررسی پیشنهادی تحقیقات پرداخته می شود.

بیرانوند و همکاران (Beyranvand et al., 2024a) به پیشنهادی سبد سهام استوار توزیعی بر اساس نسبت کالمار با متریک واسرشتن پرداختند. استراتژی پژوهش برای استوار سازی پارامتر توزیع بازده، در نظر گرفتن تمام بازده هایی می باشد که در یک همسایگی از توزیع تجربی سبد قرار دارد که برای تعیین چنین توزیع هایی از معیار متریک واسرشتن استفاده شده است. سبد نمونه ای پژوهش حاضر متشکل از ۸ شاخص یا صنعت از بورس اوراق بهادار تهران و در افق زمانی هفتگی، نشان داد که سبد استوار توزیعی کالمار نسبت مذکور را به میزان ۲۷/۱ بهبود می دهد و بعلاوه کمینه نسبت کالمار در ۵ دوره در سبد استوار توزیعی نسبت به سبد فاقد این خاصیت بیشتر می باشد.

تا و لی (Tu & Li, 2024) یک چارچوب بهینه سازی سبد استوار را پیشنهاد کردند که پارامترهای مدل را در پیش بینی بازده با به حداکثر رساندن متوسط واریانس، استوار می کند. چارچوب پیشنهادی به طور مؤثر، پیش بینی بازده و تصمیم های سبد سهام را ترکیب می کند در حالی که عدم قطعیت در پیش بینی بازده را کاهش می دهد. تجزیه و تحلیل تجربی بر روی S&P500 نشان می دهد که چارچوب پیشنهادی به ریسک کمتر و بازده تعدیل شده با ریسک بالاتری دست می یابد که از تخمین وزن پایدارتر و سبدهای متنوع نشأت می گیرد.

فن و لئون (Fan et al., 2024) یک خانواده جدید از مسائل بهینه سازی استوار توزیعی را تحت ابهام حاشیه ای و کاپولایی برای مسائل بهینه سازی سبد سهام بررسی کردند. مدل پیشنهادی مجموعه ابهامی از بازده سبد سهام را در نظر می گیرد که در آن توزیع های حاشیه ای در معیار سنجش متریک

1 Max-min

وازرترین به همتایان اسمی خود نزدیک باشند. نتایج نشان می‌دهد که شعاع همسایگی وازرترین بر روی عملکرد سودآوری سبد سهام تأثیر دارد. همچنین عملکرد سودآوری مدل استوار توزیعی در معیار نسبت شارپ از مدل وزن برابر و مدل ارزش در معرض ریسک شرطی بدون ابهام بهتر می‌باشد. سو و لی (Su & Li, 2024) مسئله تصمیم‌گیری سبد استوار را با ریسک گریزی ذهنی تحت عدم قطعیت وابستگی حل کردند و از معیارهای ریسک طیفی برای شناسایی ریسک گریزی ذهنی سرمایه‌گذاران استفاده کردند و بدترین معیارهای ریسک طیفی را به‌عنوان ابزاری برای مسئله تصمیم‌گیری سبد بهینه استوار، استفاده کردند. یک مطالعه تجربی با استفاده از هشت شاخص سهام جهانی نشان می‌دهد که سبد استوار در سرمایه‌گذاری‌های ایستا و پویا که شامل دوره کامل خارج از نمونه و دوره‌های بحران در سطوح مختلف ریسک گریزی است، از دو سبد دیگر بهتر عمل می‌کند. لی (Li, 2023) یک نوع استوار سازی از مدل بهینه‌سازی سبد سهام کلی به نام بهینه‌سازی سبد کلی-وازرترین را معرفی کردند. در این مدل به استوار سازی توزیعی سبد سهام کلی با تعریف یک همسایگی از توزیع‌های نزدیک به توزیع بازگشتی تجربی با استفاده از متریک وازرترین می‌پردازد. مدل به‌صورت کارآمد به‌عنوان یک برنامه محذب قابل حل است. با استفاده از داده‌های مالی تجربی، مطالعه عددی نشان می‌دهد که سبد کلی-وازرترین می‌تواند در آزمایش‌های خارج از نمونه در چندین معیار عملکرد بهتر از سبدهای کلی عمل کند و ثبات بیشتری از خود نشان دهد.

شیرکوند و فدایی (Shirkavand & Fadaei, 2022) به‌منظور به دست آوردن سبد سهام بهینه استوار، از سناریوبندی وضعیت‌های مختلف بازار، بر اساس بازده روزانه شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران و به‌کارگیری الگوریتم بهینه‌سازی توده ذرات و ملاک حداقل حداکثر پشیمانی استفاده کردند. همچنین در این پژوهش، توابع هدف چندمتغیره و امگا - ارزش در معرض ریسک شرطی، به‌عنوان توابع برازش در بهینه‌سازی توده ذرات به کار گرفته شده است. نتیجه نشان می‌دهد که سناریوبندی بازار و به‌کارگیری ملاک حداقل حداکثر پشیمانی، عملکرد سبدهای سهام بهینه استوار را بهبود می‌دهد. همچنین، تابع چند متغیره و ضریب امگا - ارزش در معرض ریسک شرطی به بهبود بیشتری در عملکرد سبدهای سهام استوار منجر می‌شود.

برمین و هلم ([Bermin & Holm, 2023](#)) نشان دادند که معامله‌گران استراتژی کلی به‌طور طبیعی به‌گونه‌ای معامله می‌کنند که تعادلی را برای ماتریس کوواریانس آنی القا کنند. این تعادل، که به‌تنهایی از معاملات ناشی می‌شود، این ویژگی را دارد که همبستگی تعادل را می‌توان به‌عنوان نقطه زین یک بازی دیفرانسیل تصادفی توصیف کرد. با این حال، از آنجایی که بازی لزوماً یک بازی با مجموع صفر نیست، نوسانات تعادلی کمتر از آن چیزی است که از بازی پیش‌بینی می‌شود. تعادل کوواریانس به‌طور کامل توسط نرخ بازده لگاریتمی، نرخ بهره و تمایل کل به اهرمی که در بازار مشاهده می‌شود مشخص می‌شود.

سی ([Hsieh, 2020](#)) یک سبد زمان گسسته را در نظر گرفتند که شامل فرکانس تعادل مجدد به‌عنوان یک پارامتر اضافی در بهینه‌سازی می‌شود و معیار کلی به‌عنوان معیار عملکرد استفاده می‌شود. برای این منظور با استفاده از معیار کلی در فرمول‌بندی مبتنی بر فرکانس، ابتدا شرایط لازم و کافی برای سبد بهینه کلی مبتنی بر فرکانس اثبات می‌شود. با کمک این شرایط، چندین ویژگی بهینه جدید مانند بهینه نسبت مورد انتظار و بهینه نسبی مجانبی نشان داده می‌شود. درنهایت یک الگوریتم معاملاتی ساده با استفاده از مفهومی به نام شرط دارایی غالب پیشنهاد می‌شود.

کارتا و کانونسانو ([Carta & Conversano, 2020](#)) یک چارچوب کلی برای اعمال معیار کلی برای داده‌های بازار سهام و در نتیجه بهینه‌سازی سبد سهام ایجاد کردند. تحت شرایط محدود، با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو با سناریوهای مختلف، ثابت می‌شود که معیار کلی در بسیاری از جنبه‌ها به‌ویژه نرخ رشد مورد انتظار و میانه ثروت نهایی بر روش‌های دیگر برتری دارد. همچنین نشان داده می‌شود که تحت یک توزیع نرمال بازده، معیار کلی بهترین عملکرد را در بلندمدت دارد. در مرحله بعد، یک سبد با معیار کلی بدون اهرم و شرایط فروش کوتاه بهینه می‌شود و نشان داده می‌شود که این سبد در مرز کارآمدی میانگین-واریانس قرار دارد و بازده مورد انتظار بالاتر و واریانس بالاتری دارد، اگرچه تنوع کمتری دارد.

جی و همکاران ([Ji et al., 2022](#)) مسئله بهینه‌سازی استوار توزیعی سبد سهام با نسبت بازده تعدیل‌شده با دم پایدار خطی شده را مطالعه کردند که در آن هدف به حداکثر رساندن معیار عملکرد

نسبت مذکور در بدترین حالت تحت ابهام وازرتین مبتنی بر داده است. برای منعکس کردن محدودیت‌های بازار سهام، دو محدودیت به نام محدودیت‌های آستانه خرید و تنوع در نظر گرفته می‌شود. مسائل پیشنهادی به مسائل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح مختلط فرموله می‌شوند و در پایان نتایج اعتبارسنجی با استفاده از روش افق غلتشی، عملکرد برتر خارج از نمونه سبدهای پژوهش را نشان می‌دهد.

حسینی نوده و همکاران ([Hosseini-Nodeh et al., 2022](#)) بهینه‌سازی سبد سهام با فرض توزیع ناشناخته بازده دارایی از نظر توزیع را با یک محدودیت تسلط تصادفی مبهم در نظر می‌گیرد. هدف، به حداکثر رساندن بازده مورد انتظار در بدترین حالت و مشروط به یک محدودیت غالب تصادفی مرتبه دوم مبهم است نشان داده شده است که بهینه‌سازی سبد سهام مبتنی بر ابهام وازرتین را می‌توان به یک برنامه نیمه معین و برنامه‌ریزی مخروطی مرتبه دوم کاهش داد. مسائل با استفاده از راه‌حل‌های بهینه برنامه‌های بهینه‌سازی بر اساس تنظیمات مختلف به‌طور عمیق مورد بررسی قرار می‌گیرند.

ژانگ ([Zhang, 2022](#)) با در نظر گرفتن ریسک گریزی سرمایه‌گذاران و عدم قطعیت مشخص‌کننده بازده دارایی یک مدل سبد پرتفوی استوار توزیعی را تحت شرایطی ایجاد کردند که توزیع بازده دارایی پرخطر ناشناخته باشد. به‌طور خاص، هدف یافتن یک سبد بهینه از دارایی‌ها است که سطح مطلوبیت بدترین حالت را در اندازه واسرشتن به حداکثر می‌رساند. این مدل همچنین به‌عنوان یک مسئله برنامه‌نویسی اعداد صحیح درجه دوم با محدودیت‌های کاردینالیت (تعداد سهام) فرموله شده است. علاوه بر این، یک الگوریتم ترکیبی برای بهبود کارایی راه‌حل و مناسب‌تر کردن آن برای مسائل در مقیاس بزرگ پیشنهاد شده است.

با مطالعه پیشینه تحقیقات مشخص می‌گردد، استوار سازی توزیعی سبد سهام با معیار کلی با رویکرد واگرایی کی-ال تاکنون در ادبیات تحقیق مورد مطالعه قرار نگرفته است. به‌علاوه سبد سهام کلی در فرم معمولی خود نیز در مورد مطالعاتی بورس اوراق بهادار تهران تاکنون مورد بررسی قرار نگرفته است. بر این اساس نوآوری پژوهش حاضر در دو بعد نظری و عملی به‌صورت زیر است:

۱- طراحی مدل سبد سهام استوار توزیعی با معیار کلی با رویکرد واگرایی کی-ال؛

۲- بررسی عملکرد صورت استوار مدل کلی در بورس اوراق بهادار تهران؛ و مقایسه عملکرد استواری و سودآوری آن با فرم معمولی آن و با سبد هم وزن.

۳. مدل تحقیق

در ابتدا به طراحی مدل سبد استوار توزیعی کلی با معیار واگرایی کی-ال پرداخته می شود. این مدل دارای تابع هدف بیشینه سازی بازده لگاریتمی می باشد. فرض کنیم سبد سهام از N دارایی تشکیل شده باشد که به صورت یک سبد سهام چند دوره ای با T دوره در نظر گرفته می شود؛ بنابراین سبد در انتهای هر دوره $t \in \{1, 2, \dots, T\}$ دارای یک ارزش (پولی) می باشد. برای دوره t ام، بردار بازده دارایی های سبد سهام به صورت $R_t = [R_{t1}, R_{t2}, \dots, R_{tN}]^T$ در نظر گرفته می شود و بردار وزن سبد سهام با $w = (w_1, \dots, w_N)$ نشان داده می شود. به وضوح تمام سبدهای شدنی در مجموعه $W := \{w \in R^N \mid 1^T \cdot w = 1; w \geq 0\}$ قرار دارند. در صورتی که ارزش اولیه سبد برابر یک واحد پول باشد، ارزش نهایی سبد سهام (برحسب واحد پول) بر روی T دوره از رابطه (۱) محاسبه می شود.

$$V_T = \prod_{t=1}^T (1 + R_t^T w) \quad (1)$$

نرخ رشد سبد سهام نیز از طریق لگاریتم میانگین هندسی V_T به صورت رابطه (۲) محاسبه می شود.

$$\gamma_t = \log \left(\sqrt[T]{\prod_{t=1}^T (1 + R_t^T w)} \right) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \log(1 + R_t^T w) \quad (2)$$

بر اساس قانون قوی اعداد بزرگ^۱ و با فرض اینکه متغیرهای تصادفی R_t نوفه سفید^۲ باشند و دوبه دو از هم مستقل باشند، می توان نشان داد که

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \gamma_T = E(\log(1 + R^T w)) \quad (G30)$$

1 strong law of large numbers

2 White noise

در رابطه (G30)، R هم توزیع با R_t می‌باشد. سبد سهام کلی به دنبال شبیه‌سازی نرخ رشد لگاریتمی می‌باشد. بدین صورت مسئله بهینه‌سازی سبد سهام کلی در فرم معمولی به صورت رابطه (۴) تعریف می‌شود (Li, 2023).

$$\max_w E(\log(1 + R^T w)) \quad (۴)$$

$$1^T \cdot w = 1; w \geq 0; w \in R^N$$

برای بهینه‌سازی مدل کلی نیاز است تا توزیع متغیر R مشخص باشد. برای این منظور غالباً از

$$\hat{F}_R = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{\{R_j\}}$$

توزیع تجربی به شکل استفاده می‌شود. همان‌طور که بیان شد به کارگیری توزیع تجربی باعث پدیده برازش بیش از اندازه در داده‌های آموزشی می‌شود و استواری عملکرد سبد را بر روی داده‌های تست کاهش می‌دهد. برای رفع این مشکل، پژوهش حاضر به استوار سازی توزیعی سبد سهام کلی با رویکرد واگرایی کی ال می‌پردازد و در ادامه واگرایی کی ال معرفی می‌گردد.

واگرایی کی ال که آنتروپی نسبی^۱ نیز نامیده می‌شود و با $D_{KL}(P \square Q)$ نشان داده می‌شود، یک نوع فاصله آماری است: یعنی معیاری برای تفاوت یک توزیع احتمال P با توزیع احتمال دوم مرجع Q است. یک تفسیر ساده از واگرایی $D_{KL}(P \square Q)$ ، غافلگیری بیش از حد مورد انتظار استفاده از اندازه Q به جای توزیع واقعی P است. واگرایی کی ال درحالی که یک فاصله است، یک متریک نیست یعنی واگرایی کی ال برای دو توزیع دارای خاصیت تقارن نیست و نابرابری مثلث را نیز برآورده نمی‌کند. در حالت ساده، واگرایی کی ال با مقدار صفر نشان می‌دهد که دو توزیع مورد نظر دارای مقادیر یکسانی از اطلاعات هستند. واگرایی کی ال به صورت

$$D_{KL}(P \square Q) = \sum_{x \in X} P(x) \log \left(\frac{P(x)}{Q(x)} \right) \quad (۵)$$

تعریف می‌شود که در فرم پیوسته (توزیع پیوسته) به صورت رابطه زیر تعریف می‌گردد.

1 relative entropy

$$D_{KL}(P \square Q) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log \left(\frac{p(x)}{q(x)} \right) dx \quad (6)$$

واگرایی کی-ال همواره مقداری مثبت است یعنی $D_{KL}(P \square Q) \geq 0$ و به عنوان نمونه برای دو توزیع احتمال نرمال با میانگین های μ_0, μ_1 و واریانس های Σ_0, Σ_1 برابر رابطه (۷) محاسبه می شود [\(Beyranvand et al., 2024b\)](#).

$$D_{KL}(N_0 \square N_1) = \frac{1}{2} \left(\text{tr}(\Sigma_1^{-1} \Sigma_0) - k + (\mu_1 - \mu_0)^T \Sigma_1^{-1} (\mu_1 - \mu_0) + \ln \left(\frac{\det \Sigma_1}{\det \Sigma_0} \right) \right). \quad (7)$$

در ادامه نحوه استفاده از واگرایی کی-ال برای استوار سازی سبد سهام معرفی می گردد. برای استوار سازی توزیعی سبد سهام کلی با رویکرد واگرایی کی-ال ابتدا یک همسایگی از توزیع ها حول توزیع تجربی به صورت $B(\varepsilon) := \{F \mid d_{KL}(F, \hat{F}_R) \leq \varepsilon\}$ مشخص می گردد که $B(\varepsilon)$ متشکل از توزیع هایی می باشد که در شعاع ε از توزیع تجربی قرار دارند. سبد استوار توزیعی کلی که در پژوهش حاضر معرفی می شود، یک سبد از خانواده مکس-مین می باشد. بدین صورت که تابع هدف کلی برای یک انتخاب دلخواه از اوزان سبد سهام برای تمام توزیع های موجود در همسایگی محاسبه می شود و سپس کمترین مقدار تابع هدف، به عنوان مقدار تابع هدف سبد استوار برای آن اوزان استخراج می شود. بدین صورت اوزانی از سبد سهام به عنوان بهینه محسوب می گردد که تابع هدف را بیشینه کند. بدین صورت سبد استوار توزیعی کلی با معیار واگرایی کی ال به صورت رابطه (۸) می باشد.

$$\max_{w \in W} \min_{F \in B(\varepsilon)} E_F(\log(1 + R^T w)) \quad (8)$$

$$1^T \cdot w = 1; w \geq 0; w \in R^N$$

در پژوهش حاضر برای ساختن توزیع‌های در همسایگی توزیع تجربی از رویکرد شبیه‌سازی استفاده خواهد شد و برای بهینه‌سازی مدل (۸) از الگوریتم تجمعی ذرات استفاده شده است. دلیل استفاده از این الگوریتم شبیه‌سازی به کاررفته در مدل می‌باشد که عملاً محاسبه جواب بهینه تحلیلی را غیرممکن می‌سازد. در پیاده‌سازی مدل، به صورت عملی نحوه بهینه‌سازی مدل (۸) تشریح می‌گردد.

۴. یافته‌های پژوهش

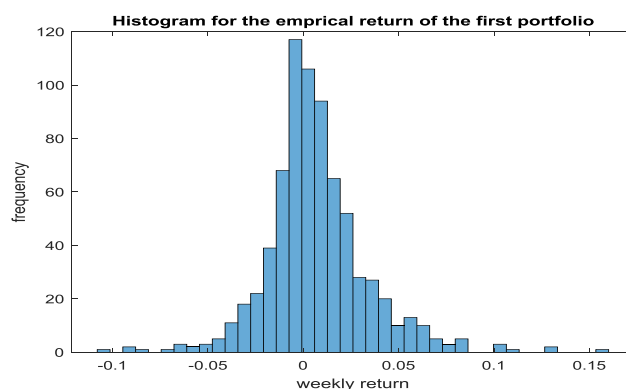
در این بخش نحوه پیاده‌سازی عملی مدل تشریح می‌گردد و عملکرد سبد نمونه‌ای پژوهش با رویکرد استوار توزیعی کلی موردسنجش قرار می‌گیرد. سبدهای نمونه‌ای پژوهش متشکل از ۲۵۲ سبد می‌باشد و هر سبد از ۵ دارایی تشکیل شده است. پنج دارایی موجود در هر سبد از بین ۱۰ دارایی لیست شده در جدول (۱) انتخاب می‌شود و ۲۵۲، تعداد کل انتخاب‌های ۵ دارایی از بین ۱۰ دارایی می‌باشد. با توجه به حجم بالای محاسباتی به واسطه شبیه‌سازی، تعداد دارایی‌های هر سبد برابر ۵ انتخاب شده است. انتخاب شاخص به عنوان دارایی به معنی تشکیل یک سبد متنوع از سهام زیرمجموعه آن شاخص می‌باشد. بدین صورت اصل تنوع در تشکیل سبد سهام رعایت می‌گردد.

جدول ۱. دارایی‌های نامزد ورود به سبدهای نمونه‌ای پژوهش

دارایی (شاخص)	شماره	دارایی (شاخص)	شماره
قند	۱	بانک	۶
ماشین‌آلات	۲	کانی‌های فلزی	۷
شیمیایی	۳	خودرو	۸
دارو	۴	فرآورده‌های نفتی	۹
سیمان	۵	کانی‌های غیرفلزی	۱۰

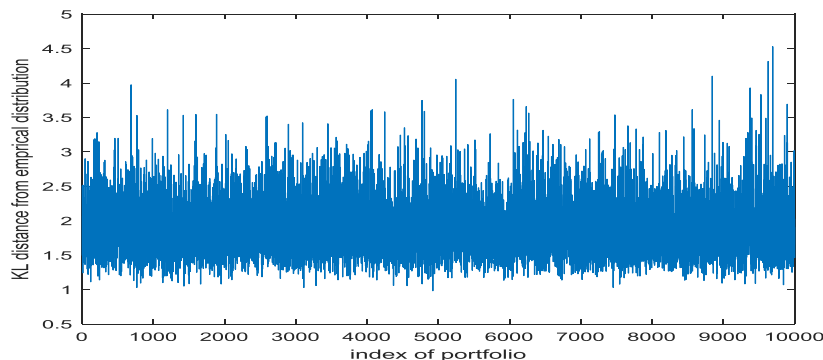
داده‌های تاریخی پژوهش مربوط به ابتدای سال ۱۳۸۸ تا پایان سال ۱۴۰۲ می‌باشد. افق زمانی سبدهای نمونه‌ای پژوهش، هفتگی (۵ روز کاری) می‌باشد و بر این اساس ۷۳۸ بازده تاریخی در اختیار می‌باشد. از این تعداد ۸۵٪ برای آموزش (بهینه‌سازی سبد سهام) و ۱۵٪ برای ارزیابی عملکرد سبد سهام (تست) مورد استفاده قرار گرفته است. در ادامه به عنوان نمونه روند ساخت اولین سبد بهینه

از بین ۲۵۲ سبد تشریح می‌گردد که سبد متشکل از ۵ دارایی اول جدول (۱) می‌باشد. در ابتدا برای هر انتخاب از اوزان این سبد (یک بردار پنج‌تایی مثبت با مجموع یک)، توزیع بازده سبد بر روی داده‌های آموزشی یا همان توزیع تجربی استخراج می‌گردد. به‌عنوان نمونه در صورت انتخاب برابر اوزان سبد (هرکدام $0/2$) و با تقسیم بازده‌های تاریخی سبد به ۴۰ دسته، توزیع تجربی به‌صورت نمودار فراوانی (۱) محاسبه گردید. از این‌رو توزیع تجربی چهل مقدار (مراکز دسته‌ها) را با احتمالات متناسب با فراوانی هر دسته کسب می‌کند.



نمودار ۱. توزیع بازده تجربی برای سبد هم‌وزن برای سبد متشکل از پنج دارایی اول

با توجه به اینکه مدل پژوهش از نوع استوار توزیعی کلی می‌باشد، در ادامه باید توزیع‌هایی را بیابیم که در یک همسایگی از توزیع تجربی بر اساس فاصله و اگرایی کی-ال باشند. برای این منظور از رویکرد شبیه‌سازی استفاده گردید و ۱۰۰۰۰۰ سبد نمونه‌ای انتخاب گردید و فاصله آن از توزیع تجربی محاسبه گردید که فاصله ۱۰۰۰۰ سبد شبیه‌سازی اول از توزیع تجربی به‌صورت نمودار (۲) می‌باشد. برای ساختن سبدهای شبیه‌سازی ابتدا ۵ عدد تصادفی بین صفر و یک انتخاب گردید و سپس با تقسیم بر مجموع آن‌ها، یک سبد مجاز (مجموع اوزان برابر یک) به دست آمد.



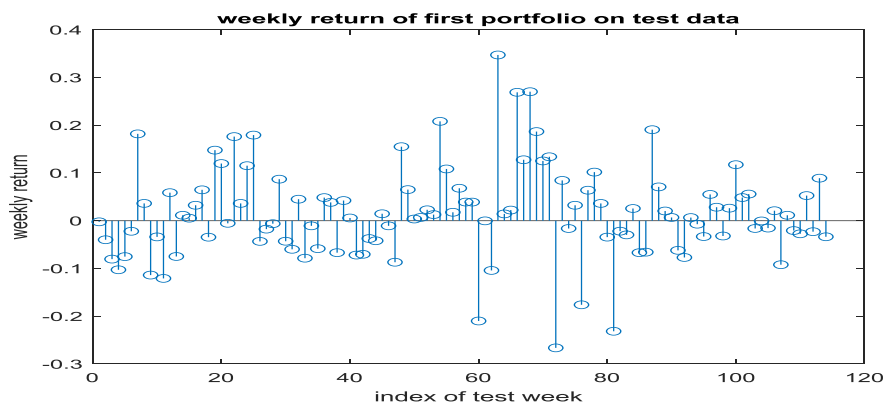
نمودار ۲. فاصله واگرایی کی-ال ۱۰۰۰ سبد شبیه‌سازی شده از توزیع تجربی برای سبد اول

با توجه به فاصله‌های حاصل شده از توزیع تجربی، یک‌دهم بیشترین و کمترین فاصله برای شعاع همسایگی انتخاب گردید؛ بنابراین در فرآیند بهینه‌سازی استوار توزیعی مدل پژوهش از توزیع‌های در این شعاع همسایگی استفاده می‌شود. حال برای هر انتخاب از اوزان سبد شماره یک، تابع هدف مدل استوار توزیعی کلی، برای تمام توزیع‌های موجود در همسایگی یک‌دهم توزیع تجربی مورد محاسبه قرار می‌گیرد؛ و از بین آن‌ها، کمترین بازده لگاریتمی انتخاب می‌شود؛ بنابراین به هر سبد یک بازده تخصیص داده می‌شود. در نهایت سبدهای انتخاب می‌شود که کمترین بازده حاصل شده از عملکرد آن تحت سناریوهای شبیه‌سازی شده، بیشترین مقدار را در بین سبدها داشته باشد. برای پیاده‌سازی این رویکرد مکس-مین، از الگوریتم تجمعی ذرات با ۱۰۰۰ ذره و ۱۰۰ تکرار استفاده گردید. برای پوشش محدودیت مجموع اوزان سبد برابر یک، سبد بهینه پس از محاسبه مورد نرمال‌سازی (تقسیم بر مجموع) قرار گرفت. به عنوان نمونه برای اولین سبد، اوزان بهینه به صورت زیر جدول (۲) محاسبه گردید.

جدول ۲. اوزان بهینه اولین سبد نمونه‌ای پژوهش

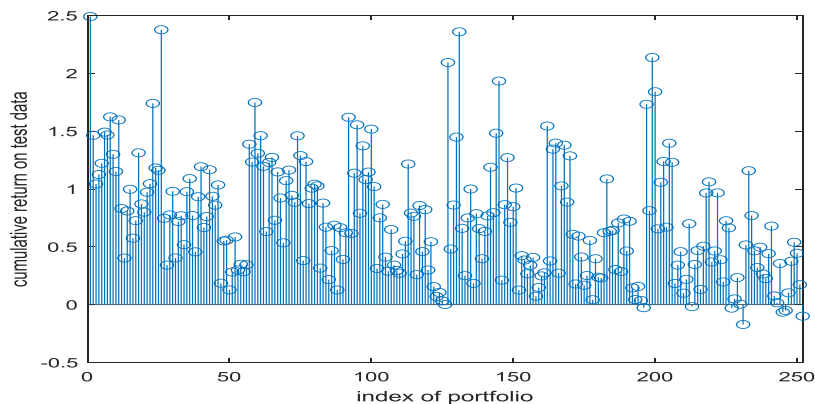
شماره دارایی	۱	۲	۳	۴	۵
وزن	۰/۱۵۹۳۹۲	۰/۰۸۹۸۸۱	۰/۳۰۱۴۷۶	۰/۱۱۵۵۵۶	۰/۳۳۳۷۳۵

پس از بهینه‌سازی ۲۵۲ سبد پژوهش، عملکرد آن‌ها بر روی داده‌های تست ارزیابی گردید و برای هر هفته از داده‌های تست، یک بازده هفتگی ایجاد شد. به‌عنوان نمونه عملکرد سبد بهینه اول بر روی ۱۱۴ هفته تست به‌صورت نمودار (G30) استخراج گردید.



نمودار ۳. عملکرد سبد بهینه اول بر روی داده‌های تست

همان‌طور که در فلسفه مدل کلی بیان گردید، هدف از این مدل، بیشینه‌سازی بازده تجمعی سبد سهام می‌باشد. برای این منظور بازده تجمعی هر سبد بر روی ۱۱۴ هفته تست محاسبه گردید که به‌عنوان نمونه برای سبد شماره یک برابر ۲/۴۹۱۲ می‌باشد. روند بهینه‌سازی ۲۵۲ سبد مطابق آنچه برای سبد اول بیان شد، صورت گرفت. هر سبد دارای داری یک بردار اوزان بهینه و یک عملکرد بازده تجمعی بر روی ۱۱۴ هفته تست می‌باشد. بازده تجمعی حاصل‌شده برای ۲۵۲ سبد به‌صورت نمودار (۴) می‌باشد.



نمودار ۴. بازده‌های تجمعی برای ۲۵۲ سبد بهینه پژوهش بر روی داده‌های تست

در ادامه به بررسی عملکرد سبدهای نمونه‌ای در داده‌های تست پرداخته می‌شود. برای این منظور، مشخصات آماری مربوط به ۲۵۲ بازده تجمعی حاصل‌شده از سبد استوار توزیعی کلی در معیارهای میانگین بازده تجمعی، ریسک (انحراف معیار بازده‌های تجمعی) و نسبت شارپ محاسبه گردید. نسبت شارپ از تقسیم میانگین به ریسک محاسبه می‌شود و نشان می‌دهد که به ازای یک واحد ریسک، بازده به چه میزان افزایش می‌یابد. درواقع نسبت شارپ بازده تعدیل‌شده با ریسک می‌باشد و مقادیر بالاتر آن برای سرمایه‌گذاران مطلوب می‌باشد. علاوه بر مدل پژوهش، مدل‌های برابری وزن (هم‌وزن) و مدل کلی بدون خاصیت استوار توزیعی نیز مورد ارزیابی عملکرد بر روی داده‌های تست قرار گرفتند. در مدل برابری وزن، از اطلاعات محیط سرمایه‌گذاری هیچ استفاده‌ای نمی‌شود و وزن همه دارایی در سبد سرمایه‌گذاری یکسان در نظر گرفته می‌شود. مدل سبد کلی معمولی نیز بر اساس الگوریتم فرایتکاری تجمعی ذرات در همان داده‌های آموزشی و تست مورد استفاده در مدل استوار توزیعی مورد بهینه‌سازی قرار گرفت. جدول (G30) نتیجه حاصل از سنجش عملکرد سه مدل سبد سهام را در داده‌های تست نشان می‌دهد.

جدول ۳. عملکرد مدل پژوهش در مقایسه با مدل‌های برابری وزن و کلی معمولی

نسبت شارپ	ریسک (انحراف معیار)	میانگین بازده‌های تجمعی	سبد
۱/۴۴۰۸	۰/۳۲۱۶۹۶	۰/۴۶۳۵	برابری ریسک
۰/۷۸۷	۰/۷۵۸۱۹۶	۰/۵۹۶۷	سبد کلی
۳/۹۲۷۵	۰/۳۶۶۸۴۹	۱/۴۴۰۸	سبد استوار کلی

مقایسه نتایج حاصل‌شده در جدول (G30) نشان می‌دهد که سبد استوار توزیعی نه تنها دارای میانگین بازده تجمعی بالاتری نسبت به دو سبد دیگر می‌باشد، بلکه بازده تجمعی تعدیل‌شده یا ریسک آن نیز به صورت چشمگیری از دو سبد دیگر بالاتر می‌باشد. همان‌طور که بیان شد، فلسفه مدل کلی کسب بازده بالاتر در درازمدت می‌باشد. سبد پژوهش از بابت داشتن تابع هدف بازده لگاریتمی کلی توانسته است نسبت به دو مدل دیگر در میانگین بازده تجمعی بهتر عمل کند. از طرفی مدل پژوهش، سبد سهام کلی را با در نظر گرفتن توزیع‌های حول توزیع تجربی با معیار واگرایی کی-ال مورد استوار سازی قرار داد. از این‌رو انتظار می‌رفت که مدیریت ریسک بهتری برای سبد سهام صورت گیرد. نسبت شارپ بالاتر سبد پژوهش این مطلب را تأیید می‌کند و نشان می‌دهد که در بورس اوراق بهادار تهران در نظر گرفتن توزیع‌های حول توزیع تجربی بسیار حائز اهمیت می‌باشد و درواقع توزیع بازده در طول زمان ثابت نیست و استوار سازی توزیعی در بازده تعدیل‌شده نسبت به ریسک مؤثر است.

۵. نتیجه‌گیری و پیشنهادها

هدف از پژوهش حاضر ارائه یک صورت از مدل‌سازی استوار توزیعی از سبد سرمایه‌گذاری کلی و بررسی عملکرد سودآوری آن در بورس اوراق بهادار تهران بود. پارامتر ناطمینانی که عمل استوار سازی روی آن صورت گرفت، توزیع بازده سبد سهام می‌باشد. برای این منظور به جای در نظر گرفتن تنها یک توزیع و آن هم توزیع تجربی، یک خانواده از توزیع‌ها در همسایگی توزیع تجربی مورد استفاده قرار گرفت و برای کنترل شعاع همسایگی از معیار واگرایی کی-ال استفاده گردید. درواقع واگرایی کی-ال معیاری برای سنجش فاصله دو اندازه یا توزیع احتمال است. مدل استوار

توزیعی پژوهش در نهایت به شکل یک مدل از نوع مکس-مین استخراج گردید. در جهت بررسی عملکرد مدل پیشنهادی، ۲۵۲ سبد ۵ عضوی با افق زمانی هفتگی از بین ۱۰ دارایی به عنوان نمونه آماری انتخاب گردید. سبدهای نمونه‌ای بر روی داده‌های تاریخی به کمک شبیه‌سازی و الگوریتم تجمعی ذرات مورد بهینه‌سازی قرار گرفت. از آنجاکه فلسفه اصلی سبد کلی، کسب بازده بالا در درازمدت می‌باشد، برای هر سبد بازده تجمعی بر روی داده‌های تست به عنوان معیار اصلی عملکرد سودآوری سبدهای نمونه‌ای پژوهش انتخاب گردید. نتایج حاصل از بررسی عملکرد نشان داد که سبد استوار توزیعی پژوهش در معیار نسبت شارپ از دو سبد هم‌وزن و سبد کلی فاقد ویژگی استوار توزیعی بهتر عمل می‌کند. به صورتی که نسبت شارپ بازده تجمعی سبد پیشنهادی بیش از ۲/۵ برابر سبد کلی معمولی و ۵ برابر سبد هم‌وزن می‌باشد. این مطلب نشان می‌دهد که استوار سازی توزیعی دارای اثر قابل توجهی در بهبود بازده تعدیل شده با ریسک دارد. نتیجه حاصل از پژوهش با پژوهش‌های کارتا و کانونسانو ([Carta & Conversano, 2020](#))، لی و همکاران ([Li, 2023](#)) و فن و لجون ([Fan et al., 2024](#)) مطابقت دارد. در پژوهش کارتا و کانونسانو با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو با سناریوهای مختلف، ثابت می‌شود که معیار کلی در بسیاری از جنبه‌ها و علی‌الخصوص نسبت شارپ بر هر رویکرد دیگری برتری دارد. همچنین لی نشان داد که سبد کلی-وازرتین می‌تواند در آزمایش‌های خارج از نمونه در چندین معیار عملکرد بهتر از سبدهای کلی عمل کند و ثبات بیشتری از خود نشان دهد و پژوهش حاضر نیز این یافته را مورد تأیید قرار می‌دهد. همچنین فن و لجون ([Fan et al., 2024](#)) نیز نشان دادند که عملکرد سودآوری مدل استوار توزیعی در معیار نسبت شارپ از مدل وزن برابر بهتر می‌باشد که با نتایج پژوهش حاضر مطابقت دارد. نسبت شارپ برای سرمایه‌گذاران ریسک‌گریزی که تمایل به ریسک به اندازه دارند، دارای اهمیت فراوانی می‌باشد. از این رو به سرمایه‌گذاران ریسک‌گریز پیشنهاد می‌شود که برای کسب بازده بالا در بلندمدت از سبد کلی با رویکرد استوار توزیعی بهره ببرند. برای این منظور نیاز است تا سبد موردنظر سرمایه‌گذار بر روی داده‌های آموزشی مورد بهینه‌سازی قرار گیرد و پس از عملکرد مناسب سودآوری بر روی داده‌های تست (آزمون) در جهت سرمایه‌گذاری عملی مورد استفاده قرار گیرد.

منابع

- Adak, R., Meshki Miavaghi, M., & Qolizadeh, M. H. (2024). A Comparative Study of Dynamic Portfolio Optimization Using Grey Relational Analysis Methods and Basic Methods (Average, Moving Average and Moving Average) in Tehran Stock Exchange *Journal of Capital Market Analysis*, 1(4), 158–178.
- Bermin, H.-P., & Holm, M. (2023). Kelly trading and market equilibrium. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 26(01), 2350001.
- Beyranvand, m., Davoodi, S. M. R., & Sharifi-Ghazvini, M. (2024a). Design and optimization of distribution stable stock portfolio based on Kalmar and Rachoff ratios *Journal of Capital Market Analysis* 2(4), 67–96.
- Beyranvand, M., Davoodi, S. M. R., & Sharifi-Ghazvini, M. (2024b). Distributionally Robust portfolio Optimization based on the Calmar ratio using the Wasserstein metric. *International Journal of Finance & Managerial Accounting*, 11(40), 81–92.
- Carta, A., & Conversano, C. (2020). Practical implementation of the kelly criterion: Optimal growth rate, number of trades, and rebalancing frequency for equity portfolios. *Frontiers in Applied Mathematics and Statistics*, 6, 577050.
- Fan, Z., Ji, R., & Lejeune, M. A. (2024). Distributionally robust portfolio optimization under marginal and copula ambiguity. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 203(3), 2870–2907.
- G30. (2021). *U.S. Treasury Markets: Steps Toward Increased Resilience*. G. o. Thirty. https://stein.scholars.harvard.edu/files/steinscholars/files/g30_paper.pdf
- Gunjan, A., & Bhattacharyya, S. (2023). A brief review of portfolio optimization techniques. *Artificial Intelligence Review*, 56(5), 3847–3886.
- Hosseini-Nodeh, Z., Khanjani-Shiraz, R., & Pardalos, P. M. (2022). Distributionally robust portfolio optimization with second-order stochastic dominance based on wasserstein metric. *Information Sciences*, 613, 828–852.
- Hsieh, C.-H. (2020). Necessary and sufficient conditions for frequency-based Kelly optimal portfolio. *IEEE Control Systems Letters*, 5(1), 349–354.
- Ji, R., Lejeune, M. A., & Fan, Z. (2022). Distributionally robust portfolio optimization with linearized STARR performance measure. *Quantitative Finance*, 22(1), 113–127.
- Jing, D., Imeni, M., Edalatpanah, S. A., Alburaikan, A., & Khalifa, H. A. E.-W. (2023). Optimal selection of stock portfolios using multi-criteria decision-making methods. *Mathematics*, 11(2), 415.
- Li, J. Y.-M. (2023). Wasserstein-Kelly Portfolios: A Robust Data-Driven Solution to Optimize Portfolio Growth. *arXiv preprint arXiv:2302.13979*.
- Shirkavand, S., & Fadaei, H. (2022). Robust Portfolio Optimization by Applying Multi-objective and Omega-conditional Value at Risk Models Based on the Mini-max Regret Criterion. *Financial Research Journal*, 24(1), 1–17.
- Su, X., & Li, Y. (2024). Robust portfolio selection with subjective risk aversion under dependence uncertainty. *Economic Modelling*, 132, 106667.
- Tu, X., & Li, B. (2024). Robust portfolio selection with smart return prediction. *Economic Modelling*, 135, 106719.

Zhang, X. (2022). Distributional Robust Portfolio Construction based on Investor Aversion.
arXiv preprint arXiv:2203.13999.