



طراحی و بهینه‌سازی سبدسهم استوار توزیعی کلی با معیار حداکثر اختلاف میانگین

چکیده

فلسفه سبد سهام کلی، بهینه‌سازی بازده تجمعی در درازمدت است. بهینه‌سازی این مدل معمولاً با استفاده از توزیع تجربی داده‌های تاریخی انجام می‌شود، اما تطابق بیش‌ازحد با داده‌های تاریخی می‌تواند عملکرد ضعیفی در داده‌های تست داشته باشد. برای رفع این مشکل، پژوهش حاضر سبد سهام استوار توزیعی با معیار مکس-مین را معرفی می‌کند. سناریوها شامل توزیع‌هایی در همسایگی توزیع تجربی هستند که شعاع همسایگی با معیار حداکثر اختلاف میانگین کنترل می‌شود. بررسی ۲۵۲ سبد ۵ عضوی از میان ۱۰ دارایی با الگوریتم بهینه‌سازی تجمعی ذرات نشان داد که سبد پیشنهادی در معیار نسبت شارپ، عملکرد بهتری نسبت به سبدهای هموزن و معمولی دارد و بازده تجمعی تعدیل‌شده با ریسک را بهبود می‌بخشد.

کلمات کلیدی: استوار توزیعی، سبدسهم کلی، حداکثر اختلاف میانگین

مقدمه

یا توجه به ریسک بالای سرمایه‌گذاری بر روی یک دارایی، نظریه سبدسهم چارچوبی را برای مدیریت ریسک و بازده در غالب سرمایه‌گذاری بر روی چند دارایی فراهم می‌کند. هدف یک مدل سبدسهم، تخصیص بهینه بودجه سرمایه‌گذار بین چند دارایی می‌باشد تا اهداف سرمایه‌گذاری که غالباً توسط بازده و ریسک اندازه‌گیری می‌شود، برآورده شود. تنوع معیارهای سنجش ریسک و بازده، باعث ایجاد مدل‌های مختلفی از مدل سبدسهم در ادبیات تحقیق شده است. سبدسهم میانگین-واریانس بعنوان اولین مدل پیشنهادی، بهینگی سبد را بر روی فاکتور ریسک قرار می‌دهد و آن را توسط انحراف معیار استاندارد مدل‌سازی می‌کند. در این مدل سرمایه‌گذار می‌تواند حداقل بازده مورد انتظار خود را در غالب یک محدودیت به مدل اضافه کند. سنجش ریسک می‌تواند توسط معیارهای انحراف محور مانند انحراف معیار استاندارد، نیم انحراف معیار، انحراف از میانه و ... و یا توسط معیارهای ضرر محور مانند ارزش در معرض ریسک، ریزش مورد انتظار، امید چندی و ... مدل‌سازی شود. بازده نیز می‌تواند توسط مدل‌های مختلفی مانند مدل‌های سری زمانی مانند آریما، مدل‌های شبکه عصبی، شبکه مارکوف مخفی و ... مدل‌سازی شود.

مدل‌های سبدسهم برآمده از فلسفه‌های مختلفی هستند. بعنوان نمونه فلسفه مدل میانگین-واریانس کمینه‌سازی ریسک ضمن حفظ سطح خاصی از بازده مورد انتظار می‌باشد. مدل برابری ریسک گونه دیگری از مدل‌های بهینه‌سازی سبدسهم می‌باشد که فلسفه آن تنوع بخشی به ریسک از طریق تقسیم تا حد یکسان ریسک کل سبدسهم بین اجزای آن می‌باشد تا تغییرات شدید یک دارای نتواند کل بازده سبدسهم را تحت تاثیر قرار دهد. سبد حداکثر پیش بینی پذیری نیز گونه دیگری از مدل‌های انتخاب سبدسهم بهینه می‌باشد که در آن سعی می‌شود پارامترهای مدل‌های پیش بینی کننده بازده مورد انتظار بگونه ای پیش بینی شوند که حداکثر بازده با بالاترین اطمینان نسبت به رخداد آن حاصل گردد.

در صورتی که برای سنجش بازده مورد انتظار از بازده لگاریتمی استفاده شود، مدل سبدسهم کلی^۱ شکل می‌گیرد. استراتژی کلی که توسط جان کلی در سال ۱۹۵۶ ایجاد شد، در ابتدا برای به حداکثر رساندن ثروت انباشته در بازی‌های شرط‌بندی مکرر طراحی شد، اما بعداً برای تخصیص بهینه سرمایه با هدف به حداکثر رساندن نرخ رشد مورد انتظار سبدسهم در بلندمدت گسترش یافت (کارتا و کانونسانو^۲، ۲۰۲۰). مطالعات مختلف نشان داده‌اند که یک سبد سرمایه‌گذاری بر اساس استراتژی کلی می‌تواند در درازمدت از هر سبد دیگری بهتر عمل کند. بنابراین فلسفه این مدل در کسب بازده تجمعی در درازمدت می‌باشد (سی^۳، ۲۰۲۰). در مدل کلی توزیع بازده سبد یک پارامتر اصلی و یک منبع نااطمینانی در مدل محسوب می‌شود. در واقع ذات پویای بازار سرمایه امکان انحراف از یک برآورد آماری از توزیع بازده سبد را امکان پذیر می‌کند. بدین صورت نیاز است تا سبدسهم در مقابل این منبع نااطمینانی استوار گردد. بر اساس این نیاز، هدف پژوهش حاضر، استوارسازی توزیعی سبدسهم با معیار کلی با رویکرد حداکثر

طراحی و بهینه‌سازی سبدسهم استوار توزیعی کلی با معیار حداکثر اختلاف میانگین

اختلاف میانگین^۴ می‌باشد. نوآوری پژوهش حاضر در بعد نظری طراحی مدل ترکیبی سبدسهم استوار توزیعی با معیار کلی با رویکرد حداکثر اختلاف میانگین و در بعد عملی بررسی عملکرد صورت استوار مدل کلی در بورس اوراق بهادار تهران و مقایسه عملکرد استواری و سودآوری آن با فرم معمولی آن و با سبد هموزن می‌باشد.

مبانی نظری پژوهش

مدل های ریاضی بهینه‌سازی از تابع هدف و محدودیت‌ها تشکیل شده‌اند که برای ایجاد آنها ترکیبی از متغیرهای تصمیم و پارامترهای مدل نقش دارند. پارامترهای مدل می‌تواند یک منبع ایجاد نااطمینانی در آن باشد. بعنوان نمونه در یک محیط اقتصادی با تغییرات شدید، سود یک محصول می‌تواند تحت سناریوهای مختلف قرار گیرد و از این رو در نظر در نظر گرفتن یک عدد برای آن در یک مدل سیاست تولید محصول، می‌تواند نتایج سودآوری مدل را تحت تاثیر قرار دهد (فن و آنل^۵، ۲۰۲۴). مدل های بهینه‌سازی سبدسهم نیز از این نااطمینانی در امان نیستند. در این مدل‌ها غالباً به جای بازده و ریسک از برآوردگرهای آماری استفاده می‌شود. یک برآوردگر آماری مانند میانگین می‌تواند بر حسب بزرگی واریانس خود یک منبع نااطمینانی در مدل باشد. زیرا در زمان تست واقعی مدل، این پارامتر می‌تواند از مقدار برآوردی خود فاصله بگیرد و در صورت انحراف شدید از آن، عملکرد سودآوری مدل به صورت کلی تحت تاثیر قرار گیرد و احیاناً سبد با ضررهای شدید مواجه گردد. از این رو نیاز است تا گونه‌ای از مدل های سبدسهم توسعه یابند که نسبت به تغییرات پارامترها دارای استواری باشند که مدل های انتخاب سبدسهم استوار با این انگیزه توسعه یافته اند.

مدل سبد بهینه در پژوهش حاضر، سبد با معیار کلی یا به اختصار سبد کلی می‌باشد که در آن سنجش بازده مورد انتظار از بازده لگاریتمی استفاده شود. هدف و فلسفه این مدل تخصیص بهینه سرمایه با هدف به حداکثر رساندن نرخ رشد مورد انتظار سبدسهم در بلندمدت گسترش یافت. مطالعات مختلف نشان داده‌اند که یک سبد سرمایه‌گذاری بر اساس استراتژی کلی می‌تواند در درازمدت از هر سبد دیگری بهتر عمل کند. در مدل سبد کلی فرض می‌شود که سرمایه‌گذار اطلاعات کاملی از بازده توام دارایی های تشکیل دهنده سبد دارد. با این حال، در واقعیت، توزیع بازده قابل مشاهده نیست و باید به صورت آماری برآورد گردد (کارتا و کانونسانو^۶، ۲۰۲۰).

چندین مطالعه نشان داده اند که سبد بهینه‌سازی شده بر اساس توزیع بازده نادرست می‌تواند در تست خارج از نمونه عملکرد ضعیفی داشته باشد. یک رویکرد جایگزین، که کاملاً مبتنی بر داده است، اعمال مستقیم توزیع بازده تجربی ساخته شده از بازده های تاریخی است. این رویکرد باعث مسئله تطابق

بیش از حد^۷ با نمونه های تاریخی می شود که همچنان می تواند منجر به عملکرد ضعیف خارج از نمونه شود. این می تواند برای سرمایه گذاری که نگران رویدادهای شدیدی هستند که ممکن است باعث انحراف چشمگیر دارایی ها از عملکرد تاریخی خود شوند، نگران کننده باشد (برمین و هلم^۸، ۲۰۲۲). ایده اصلی پشت استوارسازی توزیعی این است که عدم قطعیت در توزیع بازده را با ساخت مجموعه ای از توزیع های ابهام^۹ که می تواند توزیع مولد داده را با اطمینان بالا شامل شود، توضیح دهد. یک راه حل استوار با بهینه سازی در برابر توزیع بدترین حالت در مجموعه ابهام به دست می آید (لی^{۱۰}، ۲۰۲۳).

پویایی بازار سهام می تواند موجب تغییر در بازده دارایی های سبدسهم برای دوره های زمانی مختلف شود و مسئله سبدسهم استوار توزیعی، با توزیع بازده سبدسهم به صورت یک پارامتر دارای عدم قطعیت برخورد می کند. در مدل کلی به صورت متداول، توزیع بازده سبدسهم (نه تک تک دارایی ها) از دیدگاه توزیع تجربی مورد بررسی قرار می گیرد. بدین صورت توزیع سبدسهم می تواند از مقدار برآوردی تجربی خود منحرف شود و زمینه برای عدم استواری سبدسهم ایجاد گردد. همانطور که بیان شد یک راه حل برای مواجهه با این شرایط، در نظر گرفتن یک خانواده از توزیع ها به جای یک توزیع می باشد. این خانواده از توزیع ها در نزدیکی و همسایگی از توزیع تجربی قرار دارند و سناریوهایی را شبیه سازی می کنند که نشان دهنده انحراف توزیع سبد از توزیع تجربی است. برای این منظور نیاز است تا فاصله بین دو توزیع (توزیع تجربی و توزیع دارای انحراف از توزیع تجربی) مورد اندازه گیری قرار گیرد. برای این منظور پژوهش حاضر از معیار حداکثر اختلاف میانگین استفاده می کند. با اندازه گیری فاصله بین دو اندازه احتمال، نااستواری سبدسهم توسط یک شعاع همسایگی حول بازده تجربی کنترل می شود. بدین صورت استوارسازی با اطمینان بالاتر با شعاع همسایگی بزرگتر حول توزیع تجربی کنترل می شود.

بنابر آنچه گذشت، در ابتدا به اهمیت مدل های استوار در محیط نااطمینانی اشاره گردید و سپس معیار کلی برای کسب بازده بالاتر در بلندمدت مورد توجه قرار گرفت. در ادامه مدل های استوار توزیعی معرفی شد که پارامتر بازده سبد را بعنوان منبع نااطمینانی در بهینه سازی سبد سهام در نظر می گرفت. خلا تحقیقاتی که پژوهش حاضر مورد توجه قرار می دهد، ترکیب سه مورد اشاره شده در قالب طراحی مدل سبدسهم بهینه استوار توزیعی کلی است که تا کنون در ادبیات تحقیق مورد بررسی قرار نگرفته است. رهیافت مورد استفاده برای استوارسازی توزیعی، رویکرد بدترین سناریو یا مین-مکس می باشد که در آن جواب بهینه به صورتی انتخابی شود تا بدترین ضرر حاصل شده از سناریوهای مختلف (توزیع های انحرافی حول توزیع تجربی) کمینه گردد. برای ساختن توزیع های انحرافی از رویکرد شبیه سازی استفاده خواهد شد و از الگوریتم تجمعی ذرات برای یافتن سبد بهینه استفاده خواهد شد. در بخش مدل تحقیق، از جنبه ریاضی به معرفی کامل مدل پژوهش پرداخته خواهد شد.

طراحی و بهینه‌سازی سبدسهم استوار توزیعی کلی با معیار حداکثر اختلاف میانگین

پیشینه پژوهش

بیرانوند و همکاران (۱۴۰۳) به بهینه‌سازی سبد سهم استوار توزیعی براساس نسبت کالمار با متریک واسرشتن پرداختند. استراتژی پژوهش برای استوارسازی پارامتر توزیع بازده، در نظر گرفتن تمام بازده‌هایی می‌باشد که در یک همسایگی از توزیع تجربی سبد قرار دارد که برای تعیین چنین توزیع‌هایی از معیار متریک واسرشتن استفاده شده است. سبد نمونه‌ای پژوهش حاضر متشکل از ۸ شاخص یا صنعت از بورس اوراق بهادار تهران و در افق زمانی هفتگی، نشان داد که سبد استوار توزیعی کالمار نسبت مذکور را به میزان $27/1$ بهبود می‌دهد و بعلاوه کمینه نسبت کالمار در ۵ دوره در سبد استوار توزیعی نسبت به سبد فاقد این خاصیت بیشتر می‌باشد. شیرکوند و فدایی (۱۴۰۲) به منظور به‌دست آوردن سبد سهم بهینه استوار، از سناریوبندی وضعیت‌های مختلف بازار، بر اساس بازده روزانه شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران و به‌کارگیری الگوریتم بهینه‌سازی توده ذرات و ملاک حداقل حداکثر پشیمانی استفاده کردند. همچنین در این پژوهش، توابع هدف چندمتغیره و امگا - ارزش در معرض ریسک شرطی، به‌عنوان توابع برازش در بهینه‌سازی توده ذرات به‌کار گرفته شده است. نتیجه نشان می‌دهد که سناریوبندی بازار و به‌کارگیری ملاک حداقل حداکثر پشیمانی، عملکرد سبدهای سهم بهینه استوار را بهبود می‌دهد. همچنین، تابع چندمتغیره و ضریب امگا - ارزش در معرض ریسک شرطی به بهبود بیشتری در عملکرد سبدهای سهم استوار منجر می‌شود.

فن و لجون^۱ (۲۰۲۴)، یک خانواده جدید از مسائل بهینه‌سازی استوار توزیعی را تحت ابهام حاشیه‌ای و کاپولایی برای مسائل بهینه‌سازی سبد سهم بررسی کردند. مدل پیشنهادی مجموعه ابهامی از بازده سبدسهم را در نظر می‌گیرد که در آن توزیع‌های حاشیه‌ای در معیار سنجش متریک وازرتین به همتایان اسمی خود نزدیک باشند. نتایج نشان می‌دهد که شعاع همسایگی وازرتین بر روی عملکرد سودآوری سبد سهم تاثیر دارد. همچنین عملکرد سودآوری مدل استوار توزیعی در معیار نسبت شارپ از مدل وزن برابر و مدل ارزش در معرض ریسک شرطی بدون ابهام بهتر می‌باشد. یوپهارا و همکاران^{۱۱} (۲۰۲۴) به مساله تخصیص بهینه کوپن‌ها به مشتریانی که تحت محدودیت بودجه در یک وب سایت تجارت الکترونیک هستند، پرداختند و یک مدل بهینه‌سازی سبد استوار توزیعی مبتنی بر تقسیم‌بندی مشتری را برای مشکل تخصیص کوپن اعمال کردند. آنها همچنین کارایی روش خود را از طریق آزمایش‌های عددی با استفاده از داده‌های واقعی از کوپن‌های توزیع‌شده به‌طور تصادفی تأیید کردند. نتایج عددی دقیق نشان می‌دهد که مدل بهینه‌سازی استوار نسبت به مدل کوله‌پشتی چند گزینه‌ای که معمولاً استفاده می‌شود و مدل بهینه‌سازی میانگین واریانس مرسوم به افزایش فروش بیشتری دست می‌یابد.

فن و آنل^{۱۲} (۲۰۲۴) به مطالعه ابهام‌گریزی به کمک استوارسازی توزیعی در چارچوب یک سرمایه‌گذاری به منظور به حداکثر رساندن مطلوبیت تحت مدل اصلاح‌شده الاستیسیته نوسانات ثابت برای دارایی اساسی پرداختند و راه‌حل‌های شکل بسته از نوع غیر آفین را برای تخصیص بهینه و تابع مقدار از طریق مسئله کوشی استخراج کردند. شی هان و همکاران^{۱۳} (۲۰۲۳) مسئله بهینه‌سازی سبدسهم آلفای استوار توزیعی را تحت عدم قطعیت توزیع بازده بررسی کردند و مدل مرتبط با معیار اول ایمنی و نابرابری چبیشف تعمیم یافته را ایجاد کردند. سپس استراتژی سرمایه‌گذاری بهینه را برای این مدل استخراج کردند و در پایان یک تحلیل تجربی انجام شده است.

ژو و یو^{۱۴} (۲۰۲۴) یک مدل بهینه‌سازی استوار توزیعی جدید تحت گشتاورهای اول و دوم شناخته‌شده برای توزیع‌های نامشخص ارائه کردند. آنها هر دو معیار انحراف استاندارد و ارزش در معرض خطر شرطی را برای اندازه‌گیری ریسک استفاده کردند. مدل جدید را می‌توان به یک مدل ساده از نظر توزیع استوار تحت فرضیات اندازه‌گیری پاداش، کاهش داد. علاوه بر این، می‌توان آن را به‌عنوان یک مسئله برنامه‌ریزی نیمه معین قابل حل با قضیه دوگانگی تحت اطلاعات جزئی شناخته شده پارامترهای نامشخص بازنویسی کرد. در نهایت، مدل بر روی مسائل سبدسهم آزمایش شد و از نتایج عددی تأیید شد که مومنتوم‌های اول و دوم می‌تواند تصمیم معقولی بدهد.

لی (۲۰۲۳) یک نوع استوارسازی از مدل بهینه‌سازی سبدسهم کلی به نام بهینه‌سازی سبد کلی-وازرترین^{۱۵} را معرفی کردند. در این مدل یک استوارسازی توزیعی به مسئله اساسی خطای تخمین در بهینه‌سازی سبدسهم کلی^{۱۶} با تعریف یک همسایگی از توزیع‌های نزدیک به توزیع بازگشتی تجربی با استفاده از متریک وازرتین می‌پردازد. مدل به صورت کارآمد به عنوان یک برنامه محذب قابل حل است. با استفاده از داده‌های مالی تجربی، مطالعه عددی نشان می‌دهد که سبد کلی-وازرترین می‌تواند در آزمایش‌های خارج از نمونه در چندین معیار عملکرد بهتر از سبدهای کلی عمل کند و ثبات بیشتری از خود نشان دهد.

برمین و هلم^{۱۷} (۲۰۲۲) نشان دادند که معامله‌گران استراتژی کلی به طور طبیعی به گونه‌ای معامله می‌کنند که تعادلی را برای ماتریس کوواریانس آنی القا کنند. این تعادل، که به تنهایی از معاملات ناشی می‌شود، این ویژگی را دارد که همبستگی تعادل را می‌توان به عنوان نقطه زین یک بازی دیفرانسیل تصادفی توصیف کرد. با این حال، از آنجایی که بازی لزوماً یک بازی با مجموع صفر نیست، نوسانات تعادلی کمتر از آن چیزی است که از بازی پیش‌بینی می‌شود. تعادل کوواریانس به طور کامل توسط نرخ بازده لگاریتمی، نرخ بهره و تمایل کل به اهرمی که در بازار مشاهده می‌شود مشخص می‌شود. سی^{۱۸} (۲۰۲۰) یک سبد زمان گسسته را در نظر گرفتند که شامل فرکانس تعادل مجدد به عنوان یک پارامتر اضافی در بهینه‌سازی می‌شود و معیار کلی به عنوان معیار عملکرد استفاده می‌شود. برای این منظور با

طراحی و بهینه‌سازی سبدسهم استوار توزیعی کلی با معیار حداکثر اختلاف میانگین

استفاده از معیار کلی در فرمول بندی مبتنی بر فرکانس، ابتدا شرایط لازم و کافی برای سبد بهینه کلی مبتنی بر فرکانس اثبات می‌شود. با کمک این شرایط، چندین ویژگی بهینه جدید مانند بهینه نسبت مورد انتظار و بهینه نسبی مجانبی نشان داده می‌شود. در نهایت یک الگوریتم معاملاتی ساده با استفاده از مفهومی به نام شرط دارایی غالب پیشنهاد می‌شود.

کارتا و کانونسانو^{۱۹} (۲۰۲۰) یک چارچوب کلی برای اعمال معیار کلی برای داده‌های بازار سهام و در نتیجه بهینه‌سازی سبدسهم ایجاد کردند. تحت شرایط معدود، با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو با سناریوهای مختلف، ثابت می‌شود که معیار کلی در بسیاری از جنبه‌ها بر هر رویکرد دیگری برتری دارد. به ویژه، نرخ رشد مورد انتظار و میانه ثروت نهایی را به حداکثر می‌رساند. همچنین نشان داده می‌شود که تحت یک توزیع نرمال بازده، معیار کلی بهترین عملکرد را در بلندمدت دارد. در مرحله بعد، یک سبد با معیار کلی بدون اهرم و شرایط فروش کوتاه بهینه می‌شود و نشان داده می‌شود که این سبد در مرز کارآمدی میانگین-واریانس قرار دارد و بازده مورد انتظار بالاتر و واریانس بالاتری دارد، اگرچه تنوع کمتری دارد، جی و همکاران^{۲۰} (۲۰۲۲) مسئله بهینه‌سازی استوار توزیعی سبدسهم با نسبت بازده تعدیل شده با دم پایدار خطی شده را مطالعه کردند که در آن هدف به حداکثر رساندن معیار عملکرد نسبت مذکور در بدترین حالت تحت ابهام وازرتین مبتنی بر داده است. برای منعکس کردن محدودیت‌های بازار سهام، دو محدودیت به نام محدودیت‌های آستانه خرید و تنوع در نظر گرفته می‌شود. مسائل پیشنهادی به مسائل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح مختلط فرموله می‌شوند و در پایان نتایج اعتبارسنجی با استفاده از روش افق غلتشی، عملکرد برتر خارج از نمونه سبدهای پژوهش را نشان می‌دهد. حسینی نوده و همکاران^{۲۱} (۲۰۲۲) بهینه‌سازی سبدسهم با فرض توزیع ناشناخته بازده دارایی از نظر توزیع را با یک محدودیت تسلط تصادفی مبهم در نظر می‌گیرد. هدف، به حداکثر رساندن بازده مورد انتظار در بدترین حالت و مشروط به یک محدودیت غالب تصادفی مرتبه دوم مبهم است نشان داده شده است که بهینه‌سازی سبدسهم مبتنی بر ابهام وازرتین را می‌توان به یک برنامه نیمه معین و برنامه‌ریزی مخروطی مرتبه دوم کاهش داد. مسائل با استفاده از راه‌حل‌های بهینه برنامه‌های بهینه‌سازی بر اساس تنظیمات مختلف به طور عمیق مورد بررسی قرار می‌گیرند. ژانگ^{۲۱} (۲۰۲۲) با در نظر گرفتن ریسک گریزی سرمایه گذاران و عدم قطعیت مشخص کننده بازده دارایی یک مدل سبد پرتفوی استوار توزیعی را تحت شرایطی ایجاد کردند که توزیع بازده دارایی پرخطر ناشناخته باشد. به طور خاص، هدف یافتن یک سبد بهینه از دارایی‌ها است که سطح مطلوبیت بدترین حالت را در اندازه واسرشتن به حداکثر می‌رساند. این مدل همچنین به عنوان یک مسئله برنامه نویسی اعداد صحیح درجه دوم با محدودیت‌های کاردینالیت (تعداد سهام) فرموله شده است. علاوه بر این، یک الگوریتم ترکیبی برای بهبود کارایی راه‌حل و مناسب‌تر کردن آن برای مسائل در مقیاس بزرگ پیشنهاد شده است.

سبدهای سهام با معیار کلی گونه ای از مدل های انتخاب بهینه سبدهای سهام می باشد که در آن تاکید بر رشد سبدهای سهام در دراز مدت با تابع هدف رشد لگاریتمی می باشد. استوارسازی توزیعی سبدهای سهام با معیار کلی با رویکرد حداکثر اختلاف میانگین تا کنون در ادبیات تحقیق مورد مطالعه قرار نگرفته است. بعلاوه سبدهای سهام کلی در فرم معمولی خود نیز در مورد مطالعاتی بورس اوراق بهادار تهران تا کنون مورد بررسی قرار نگرفته است. بر این اساس نوآوری پژوهش حاضر در دو بعد نظری و عملی به صورت زیر است:

۱- طراحی مدل سبدهای سهام استوار توزیعی با معیار کلی با رویکرد حداکثر اختلاف میانگین؛

۲- بررسی عملکرد صورت استوار مدل کلی در بورس اوراق بهادار تهران. و مقایسه عملکرد استواری و سودآوری آن با فرم معمولی سبد کلی و سبد هموزن.

مدل تحقیق

در این بخش به طراحی مدل سبد استوار توزیعی کلی با معیار واگرایی کی-ال پرداخته می شود. فرض کنیم سبدهای سهام از N دارایی تشکیل شده باشد که به صورت یک سبدهای چند دوره ای با T دوره در نظر گرفته می شود. بنابراین سبد در انتهای هر دوره $t \in \{1, 2, \dots, T\}$ دارای یک ارزش (پولی) می باشد. برای دوره t ام، بردار بازده دارایی های سبدهای سهام به صورت $R_t = [R_{t1}, R_{t2}, \dots, R_{tN}]^T$ در نظر گرفته می شود و بردار وزن سبدهای سهام با $w = (w_1, \dots, w_N)$ نشان داده می شود. به وضوح تمام سبدهای شدنی در مجموعه $W := \{w \in R^N \mid 1^T w = 1; w \geq 0\}$ قرار دارند. در صورتی که ارزش اولیه سبد برابر یک واحد پول باشد، ارزش نهایی سبدهای سهام (بر حسب واحد پول) بر روی T دوره از رابطه (۱) محاسبه می شود.

$$V_T = \prod_{t=1}^T (1 + R_t^T w) \quad (1)$$

نرخ رشد سبدهای سهام نیز از طریق لگاریتم میانگین هندسی V_T به صورت رابطه (۲) محاسبه می شود (برمین و هلم ۲۰۲۲، ۲۲).

$$\gamma_t = \log \left(\sqrt[T]{\prod_{t=1}^T (1 + R_t^T w)} \right) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \log(1 + R_t^T w) \quad (2)$$

طراحی و بهینه‌سازی سبدسهم استوار توزیعی کلی با معیار حداکثر اختلاف میانگین

نرخ رشد لگاریتمی در سبد سهم به دلیل تعدیل نوسانات و کاهش تأثیر بازده‌های کوتاه‌مدت، ارزیابی دقیق‌تری از رشد بلندمدت ارائه می‌دهد. این روش با ارائه تخمینی بهتر از رشد واقعی، در تحلیل‌های مالی و ارزیابی ریسک بسیار کاربردی است و نسبت به روش‌های دیگر ثبات بیشتری دارد (فن و لجون^۲، ۲۰۲۴). بر اساس قانون قوی اعداد بزرگ^{۲۳} و با فرض اینکه متغیرهای تصادفی R_t نوفه سفید^{۲۴} باشند و دو به دو از هم مستقل باشند، می‌توان نشان داد که

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \gamma_T = E(\log(1 + R^T w)) \quad (۳)$$

در رابطه (۳)، R هم توزیع با R_t می‌باشد. سبدسهم کلی به دنبال بیشینه‌سازی نرخ رشد لگاریتمی می‌باشد. بدین صورت مسئله بهینه‌سازی سبدسهم کلی در فرم معمولی به صورت رابطه (۴) تعریف می‌شود (لی، ۲۰۲۳).

$$\max_w E(\log(1 + R^T w)) \quad (۴)$$

$$1^T \cdot w = 1; w \geq 0; w \in R^N$$

برای بهینه‌سازی مدل کلی نیاز است تا توزیع متغیر R مشخص باشد. برای این منظور غالباً از توزیع تجربی به شکل $\hat{F}_R = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{\{R_j\}}$ استفاده می‌شود. همانطور که بیان شد به کارگیری توزیع تجربی باعث پدیده برازش بیش از اندازه در داده‌های آموزشی می‌شود و استواری عملکرد سبد را بر روی داده‌های تست کاهش می‌دهد. برای رفع این مشکل، پژوهش حاضر به استوارسازی توزیعی سبدسهم کلی با رویکرد حداکثر اختلاف میانگین می‌پردازد و در ادامه معیار حداکثر اختلاف میانگین معرفی می‌گردد. حداکثر اختلاف میانگین (MMD) یک آزمون آماری ناپارمتریک مبتنی بر هسته (کرنل) است که برای تعیین اینکه آیا دو توزیع داده شده مشابه هستند یا خیر در گروتن و همکاران^{۲۵} (۲۰۱۲) پیشنهاد شده است. حداکثر اختلاف میانگین می‌تواند به عنوان یک تابع ضرر/هزینه در الگوریتم‌های مختلف یادگیری ماشین مانند تخمین چگالی، مدل‌های مولد، شبکه‌های عصبی معکوس مورد استفاده در مسائل معکوس استفاده شود. فرض کنیم X, Y دو متغیر تصادفی هستند که به ترتیب دارای تابع‌های توزیع Q, P هستند. برای سنجش فاصله دو توزیع احتمال، یکی از ابتدایی‌ترین ایده‌ها، سنجش اختلاف بین میانگین دو توزیع می‌باشد. بنابراین در صورتی که P, Q دو اندازه احتمال باشند، حداکثر اختلاف میانگین به صورت رابطه (۵) تعریف می‌گردد.

$$MMD^2(P, Q) = |\mu_P - \mu_Q|^2 \quad (5)$$

که μ_P و μ_Q به ترتیب میانگین متغیرهای تصادفی X, Y می‌باشد. اگر دو توزیع میانگین یکسان و واریانس متفاوت دارند (پس دو توزیع متفاوت هستند)، در این صورت در نظر گرفتن تفاضل میانگین دو توزیع، به صورت آنچه بیان شد، آنده مناسبی نیست. زیرا با این انتخاب، فاصله دو توزیع صفر می‌شود. برای رفع این مشکل می‌توان سایر گشتاورهای توزیع را نیز در نظر گرفت. فرض کنیم $\Phi: X \rightarrow (X, X^2, \dots, X^n)$ تابعی باشد که مقادیر متغیر تصادفی را بر روی n توان اول آن مقدار تصویر می‌کند (مقادیر نمونه ای را به داخل فضای اقلیدسی از مراتب بالاتر می‌نگارد). در این صورت

$$\mu_P(\Phi(X)) = [E[X^1], \dots, E[X^n]]^T \quad (6)$$

$$\mu_Q(\Phi(Y)) = [E[Y^1], \dots, E[Y^n]]^T$$

و بر این اساس حداکثر اختلاف میانگین در فضای اقلیدسی بعد بالاتر بر اساس گشتاورها محاسبه می‌شود.

$$MMD^2(P, Q) = \|\mu_P(\Phi(X)) - \mu_Q(\Phi(Y))\|_2^2 = \langle \mu_P(\Phi(X)) - \mu_Q(\Phi(Y)), \mu_P(\Phi(X)) - \mu_Q(\Phi(Y)) \rangle \quad (7)$$

این ایده را می‌توان گسترش داد و تابع Φ را به صورت دلخواه در نظر گرفت که می‌تواند به داخل یک فضای هیلبرت مقدار بگیرد تا بدین صورت تمام گشتاورها در محاسبه وارد گردد. در این صورت

$$MMD^2(P, Q) = \|\mu_P(\Phi(X)) - \mu_Q(\Phi(Y))\|_H^2 = \quad (8)$$

$$\langle \mu_P(\Phi(X)) - \mu_Q(\Phi(Y)), \mu_P(\Phi(X)) - \mu_Q(\Phi(Y)) \rangle =$$

$$\langle \mu_P(\Phi(X)), \mu_P(\Phi(X)) \rangle - 2\langle \mu_P(\Phi(X)), \mu_Q(\Phi(Y)) \rangle + \langle \mu_Q(\Phi(Y)), \mu_Q(\Phi(Y)) \rangle$$

محاسبه عبارت بالا با در دست داشتن تابع Φ امکان پذیر می‌باشد. اما نکته قابل توجه این است که بدون دانستن ضابطه Φ نیز می‌توان عبارت بالا را محاسبه کرد که برای این منظور از حقه کرنل^{۲۶} استفاده می‌شود که بیان می‌کند برای تابع Φ تابع کرنل k موجود است بصورتی که

$$\langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle = k(x, y) \quad (9)$$

بر این اساس رابطه (۸) به صورت رابطه (۱۰) بازنویسی می‌شود.

طراحی و بهینه‌سازی سیدسهم استوار توزیعی کلی با معیار حداکثر اختلاف میانگین

$$MMD^2(P, Q) = E_p[k(X, X)] - 2E_{p,Q}[k(X, Y)] + E_Q[k(Y, Y)] \quad (۱۰)$$

که از نقطه نظر عملیاتی به صورت رابطه (۱۱) محاسبه می‌گردد.

$$MMD^2(X, Y) = \frac{1}{m(m-1)} \sum_i \sum_{j \neq i} k(x_i, x_j) - \frac{1}{m.m} \sum_i \sum_{j \neq i} k(x_i, y_j) + \frac{1}{m.(m-1)} \sum k(y_i, y_j) \quad (۱۱)$$

که $k(x_i, x_j) = \exp\left(\frac{-\|x_i, x_j\|^2}{2\sigma^2}\right)$ تابع کرنل گوسی می‌باشد. (گروتن و همکاران ۲۰۱۲، ۲۷).

برای استوارسازی توزیعی سیدسهم کلی با رویکرد حداکثر اختلاف میانگین، ابتدا یک همسایگی از توزیع‌ها حول توزیع تجربی به صورت $B(\varepsilon) := \{F \mid d_{MMD}^{\wedge}(F, F_R) \leq \varepsilon\}$ مشخص می‌گردد که $B(\varepsilon)$ متشکل از توزیع‌هایی می‌باشد که در شعاع ε از توزیع تجربی قرار دارند. سید استوار توزیعی کلی که در پژوهش حاضر معرفی می‌شود، یک سید از خانواده مکس-مین می‌باشد. بدین صورت که تابع هدف کلی برای یک انتخاب دلخواه از اوزان سیدسهم برای تمام توزیع‌های موجود در همسایگی محاسبه می‌شود و سپس کمترین مقدار تابع هدف، بعنوان مقدار تابع هدف سید استوار برای آن اوزان استخراج می‌شود. بدین صورت اوزانی از سیدسهم بعنوان بهینه محسوب می‌گردد که تابع هدف را بیشینه کند. بدین صورت سید استوار توزیعی کلی با معیار واگرایی کی ال به صورت رابطه (۱۲) می‌باشد.

$$\max_{w \in W} \min_{F \in B(\varepsilon)} E_F(\log(1 + R^T w)) \quad (۱۲)$$

$$1^T \cdot w = 1; w \geq 0; w \in R^N$$

که در آن، مطابق رابطه (۳)، $E_F(\log(1 + R^T w))$ نرخ رشد لگاریتمی بر اساس توزیع F حول توزیع تجربی می‌باشد. در پژوهش حاضر برای ساختن توزیع‌های در همسایگی توزیع تجربی از رویکرد شبیه‌سازی استفاده خواهد شد و برای بهینه‌سازی مدل (۸) از الگوریتم تجمعی ذرات استفاده خواهد شد. دلیل استفاده از این الگوریتم شبیه‌سازی به کار رفته در مدل می‌باشد که عملاً محاسبه جواب بهینه تحلیلی را غیر ممکن می‌سازد. ویژگی متمایز مدل سید سهم پژوهش حاضر در مقایسه با ادبیات تحقیق، استوارسازی توزیعی مدل کلی می‌باشد. استوارسازی توزیعی در سید سهم اهمیت بسیاری در کاهش ریسک و بهبود عملکرد کلی سرمایه‌گذاری دارد در پیاده‌سازی مدل، به صورت عملی نحوه بهینه‌سازی مدل (۱۲) تشریح می‌گردد.

یافته های پژوهش

در این بخش نحوه پیاده سازی عملی مدل تشریح می گردد و عملکرد سبد نمونه ای پژوهش با رویکرد استوار توزیعی کلی مورد سنجش قرار می گیرد. سبدهای نمونه ای پژوهش متشکل از ۲۵۲ سبد می باشد و هر سبد از ۵ دارایی تشکیل شده است. پنج دارایی موجود در هر سبد از بین ۱۰ دارایی لیست شده در جدول (۱) انتخاب می شود و ۲۵۲، تعداد کل انتخاب های ۵ دارایی از بین ۱۰ دارایی می باشد. با توجه به حجم بالای محاسباتی بواسطه شبیه سازی، تعداد دارایی های هر سبد برابر ۵ انتخاب شده است. بنابراین جامعه آماری همه سبدهای با ۵ دارایی از بین ۱۰ شاخص جدول (۱) می باشد و نمونه آماری برابر جامعه آماری در نظر گرفته شده است. انتخاب شاخص بعنوان دارایی به معنی تشکیل یک سبد متنوع از سهام زیر مجموعه آن شاخص می باشد. بدین صورت اصل تنوع در تشکیل سبد سهام رعایت می گردد.

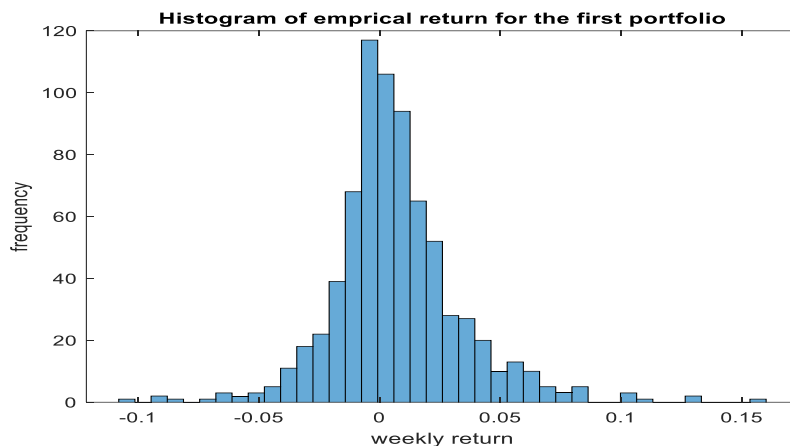
جدول ۱. دارایی های نامزد ورود به سبدهای نمونه ای پژوهش

دارایی (شاخص)	شماره	دارایی (شاخص)	شماره
قند	۱	بانک	۶
ماشین آلات	۲	کانی های فلزی	۷
شیمیایی	۳	خودرو	۸
دارو	۴	فرآورده های نفتی	۹
سیمان	۵	کانی های غیرفلزی	۱۰

داده های تاریخی پژوهش مربوط به ابتدای سال ۱۳۸۸ تا پایان سال ۱۴۰۲ می باشد. افق زمانی سبدهای نمونه ای پژوهش، هفتگی (۵روز کاری) می باشد و بر این اساس ۷۳۸ بازده تاریخی در اختیار می باشد. از این تعداد ۸۵٪ برای آموزش (بهینه سازی سبد سهام) و ۱۵٪ برای ارزیابی عملکرد سبد سهام (تست) مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

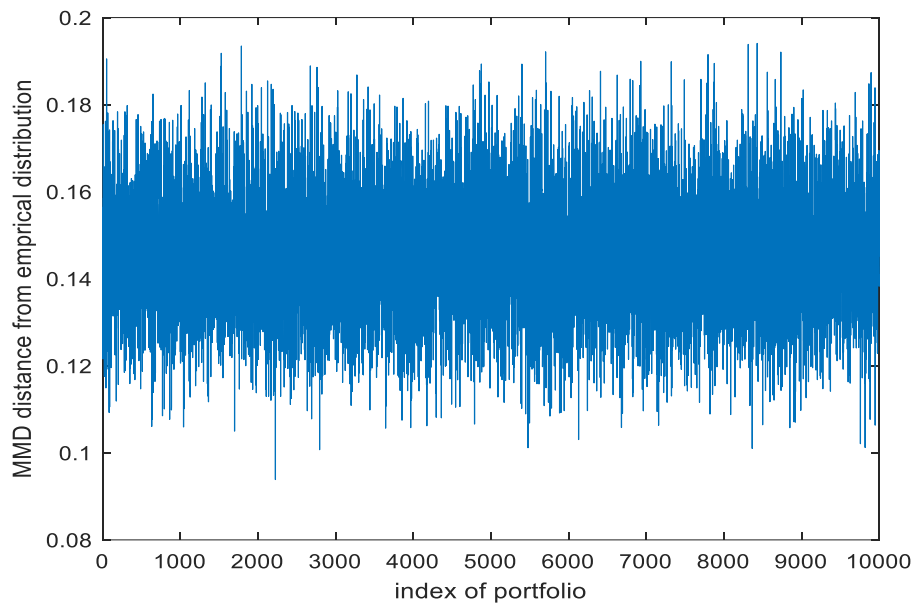
در ادامه روند بعنوان نمونه روند ساخت اولین سبد بهینه از بین ۲۵۲ سبد تشریح می گردد که سبد متشکل از ۵ دارایی اول جدول (۱) می باشد. برای هر انتخاب از اوزان این سبد (یک بردار پنج تایی مثبت با مجموع یک)، توزیع بازده سبد بر روی داده های آموزشی یا همان توزیع تجربی استخراج می گردد. بعنوان نمونه در صورت انتخاب برابر اوزان سبد (هر کدام ۰/۲) و با تقسیم بازده های تاریخی سبد به ۴۰ دسته، توزیع تجربی به صورت نمودار فراوانی (۱) محاسبه گردید. از این رو توزیع تجربی چهل مقدار (مراکز دسته ها) را با احتمالات متناسب با فراوانی هر دسته کسب می کند.

طراحی و بهینه‌سازی سبدسهم استوار توزیعی کلی با معیار حداکثر اختلاف میانگین



نمودار ۱. توزیع بازده تجربی برای سبد هموزن ابرای سبد متشکل از ۵ دارایی اول

با توجه به اینکه مدل پژوهش از نوع استوار توزیعی کلی می‌باشد، در ادامه باید توزیع هایی را بیابیم که در یک همسایگی از توزیع تجربی بر اساس فاصله حداکثر اختلاف میانگین باشند. برای این منظور از رویکرد شبیه سازی استفاده گردید و ۱۰۰۰۰۰ سبد نمونه ای انتخاب گردید و فاصله آن از توزیع تجربی محاسبه گردید که فاصله ۱۰۰۰۰ سبد شبیه سازی اول از توزیع تجربی به صورت نمودار (۲) می‌باشد. برای ساختن سبدهای شبیه سازی ابتدا ۵ عدد تصادفی بین صفر و یک انتخاب گردید و سپس با تقسیم بر مجموع آنها، یک سبد مجاز (مجموع اوزان برابر یک) بدست آمد.



نمودار ۲. فاصله حداکثر اختلاف میانگین ۱۰۰۰۰ سبد شبیه سازی شده از توزیع تجربی برای سبد اول

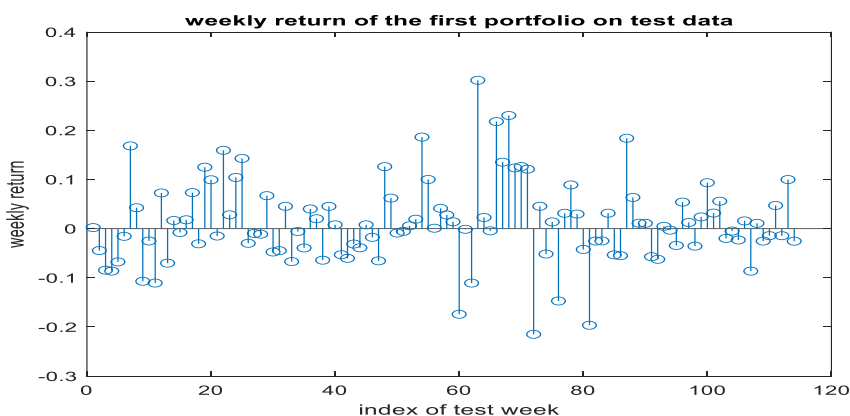
با توجه به فاصله های حاصل شده از توزیع تجربی، یک دهم بیشترین و کمترین فاصله برای شعاع همسایگی انتخاب گردید. بنابراین در فرآیند بهینه سازی استوار توزیعی مدل پژوهش از توزیع های در این شعاع همسایگی استفاده می شود. حال برای هر انتخاب از اوزان سبد شماره یک، تابع هدف مدل استوار توزیعی کلی، برای تمام توزیع های موجود در همسایگی یک دهم توزیع تجربی مورد محاسبه قرار می گیرد و از بین آنها، کمترین بازده لگاریتمی انتخاب می شود. بنابراین به هر سبد یک بازده تخصیص داده می شود. در نهایت سبدهای انتخاب می شود که کمترین بازده حاصل شده از عملکرد آن تحت سناریوهای شبیه سازی شده، بیشترین مقدار را در بین سبدها داشته باشد. برای پیاده سازی این رویکرد مکس-مین، از الگوریتم تجمعی ذرات با ۱۰۰۰ ذره و ۱۰۰ تکرار استفاده گردید. برای پوشش محدودیت مجموع اوزان سبد برابر یک، سبد بهینه پس از محاسبه مورد نرمال سازی (تقسیم بر مجموع) قرار گرفت. بعنوان نمونه برای اولین سبد، اوزان بهینه مدل استوار توزیعی پژوهش به صورت زیر جدول (۲) محاسبه گردید. وزن هر دارایی، درصدی از سرمایه اولیه است که به خرید آن دارایی اختصاص می یابد.

طراحی و بهینه‌سازی سبدسهم استوار توزیعی کلی با معیار حداکثر اختلاف میانگین

جدول ۲. اوزان بهینه اولین سبد نمونه ای پژوهش

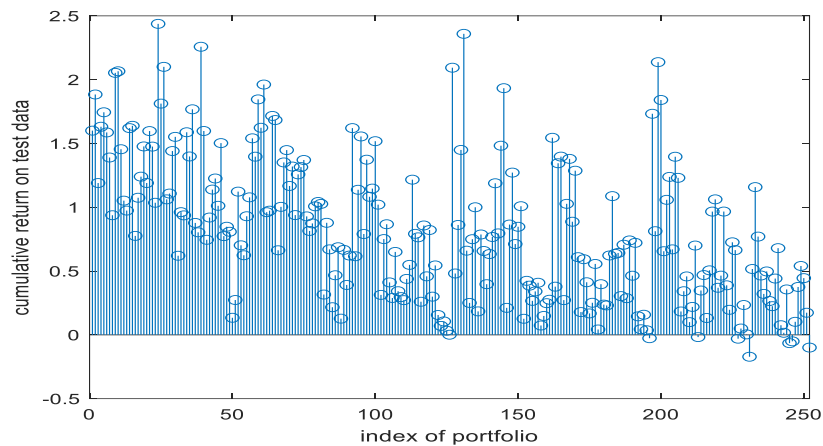
شماره دارایی	۱	۲	۳	۴	۵
وزن	۰	۰/۲۷۰۵۶۲	۰/۲۹۴۲۳۷	۰/۰۳۵۰۴۱	۰/۴۰۰۱۶

پس از بهینه‌سازی ۲۵۲ سبد پژوهش، عملکرد آنها بر روی داده های تست ارزیابی گردید و برای هر هفته از داده های تست، یک بازده هفتگی ایجاد شد. بعنوان نمونه عملکرد سبد بهینه اول بروی ۱۱۴ هفته تست به صورت نمودار (۳) استخراج گردید.



نمودار ۳. عملکرد سبد بهینه اول بر روی داده های تست

همانطور که در فلسفه مدل کلی بیان گردید، هدف از این مدل، بیشینه سازی بازده تجمعی سبدسهم می‌باشد. برای این منظور بازده تجمعی هر سبد بر روی داده های تست محاسبه گردید که بعنوان نمونه برای سبد شماره یک برابر $1/6006$ می‌باشد. روند بهینه‌سازی ۲۵۲ سبد مطابق آنچه برای سبد اول بیان شد، صورت گرفت. هر سبد دارای یک وزن بهینه و یک عملکرد بازده تجمعی بر روی ۱۱۴ هفته تست می‌باشد. بازده تجمعی حاصل شده برای ۲۵۲ سبد به صورت نمودار (۴) می‌باشد.



نمودار ۴. بازده های تجمعی برای ۲۵۲ سبد بهینه پژوهش بر روی داده های تست

در ادامه به بررسی عملکرد سبد های نمونه ای در داده های تست پرداخته می شود. برای این منظور، مشخصات آماری مربوط به ۲۵۲ بازده تجمعی حاصل شده از سبد استوار توزیعی کلی در معیارهای میانگین بازده تجمعی، ریسک (انحراف معیار بازده های تجمعی) و نسبت شارپ محاسبه گردید. نسبت شارپ از تقسیم میانگین به ریسک محاسبه می شود و نشان می دهد که به ازای یک واحد ریسک، بازده به چه میزان افزایش می باید. در واقع نسبت شارپ بازده تعدیل شده با ریسک می باشد و مقادیر بالاتر آن برای سرمایه گذاران مطلوب می باشد. علاوه بر مدل پژوهش، مدل های برابری وزن و مدل کلی بدون خاصیت استوار توزیعی نیز مورد ارزیابی عملکرد بر روی داده های تست قرار گرفتند. در مدل برابری وزن، از اطلاعات محیط سرمایه گذاری هیچ استفاده ای نمی شود و وزن همه دارایی در سبد سرمایه گذاری یکسان در نظر گرفته می شود. مدل سبد کلی معمولی نیز بر اساس الگوریتم فرابتکاری تجمعی ذرات در همان داده های آموزشی و تست مورد استفاده در مدل استوار توزیعی مورد بهینه سازی قرار گرفت. جدول (۳) نتیجه حاصل از سنجش عملکرد سه مدل سبد سهام را در داده های تست نشان می دهد.

جدول ۳. عملکرد مدل پژوهش در مقایسه با مدل های برابری وزن و کلی معمولی

نسبت شارپ	ریسک (انحراف معیار)	میانگین بازده های تجمعی	سبد
۱/۴۴۰۸	۰/۳۲۱۶۹۶	۰/۴۶۳۵	برابری ریسک
۰/۷۸۷	۰/۶۶۳۹۱۴	۰/۵۲۲۵	سبد کلی
۲/۳۲۷۵	۰/۵۴۷۵۴	۱/۲۷۴۴	سبد استوار کلی

طراحی و بهینه‌سازی سیدسهم استوار توزیعی کلی با معیار حداکثر اختلاف میانگین

مقایسه نتایج حاصل شده در جدول (۳) نشان می‌دهد که سبد استوار توزیعی نه تنها دارای میانگین بازده تجمعی بالاتری نسبت به دو سبد دیگر می‌باشد، بلکه بازده تجمعی تعدیل شده یا ریسک آن نیز به صورت چشمگیری از دو سبد دیگر بالاتر می‌باشد. این مطلب نشان می‌دهد که در بورس اوراق بهادار تهران در نظر گرفتن توزیع‌های حول توزیع تجربی بسیار حائز اهمیت می‌باشد و در واقع توزیع بازده در طول زمان ثابت نیست.

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

هدف از پژوهش حاضر ارائه یک صورت از مدل‌سازی استوار توزیعی از سبد بهینه کلی و بررسی عملکرد سودآوری آن در بورس اوراق بهادار تهران بود. پارامتر نااطمینانی که عمل استوارسازی روی آن صورت گرفت، توزیع بازده سیدسهم می‌باشد. برای این منظور به جای در نظر گرفتن تنها یک توزیع و آن هم توزیع تجربی، یک خانواده از توزیع‌ها در همسایگی توزیع تجربی مورد استفاده قرار گرفت و برای کنترل شعاع همسایگی از معیار حداکثر اختلاف میانگین استفاده گردید. حداکثر اختلاف میانگین یک رویکرد داده‌محور برای سنجش فاصله دو اندازه یا توزیع احتمال می‌باشد. در جهت بررسی عملکرد مدل پیشنهادی، ۲۵۲ سبد ۵ عضوی با افق زمانی هفتگی از بین ۱۰ دارای بعنوان نمونه آماری انتخاب گردید. سبدهای نمونه‌ای بر روی داده‌های تاریخی به کمک شبیه‌سازی و الگوریتم تجمعی ذرات مورد بهینه‌سازی قرار گرفت. از آنجا که فلسفه اصلی سبد کلی، کسب بازده تجمعی بالاتر در دراز مدت می‌باشد، برای هر سبد بازده تجمعی بر روی داده‌های تست بعنوان معیار اصلی عملکرد سودآوری سبدهای نمونه ای پژوهش انتخاب گردید. نتایج حاصل از بررسی عملکرد نشان می‌دهد که سبد استوار توزیعی پژوهش در معیار نسبت شارپ از دو سبد هموزن و سبد کلی فاقد ویژگی استوار توزیعی بهتر عمل می‌کند. بصورتی که نسبت شارپ بازده تجمعی سبد پیشنهادی بیش از $1/5$ برابر سبد کلی معمولی و ۳ برابر سبد هموزن می‌باشد. این مطلب نشان می‌دهد که استوارسازی توزیعی دارای اثر قابل توجهی در بهبود بازده تجمعی تعدیل شده با ریسک دارد. نتیجه حاصل از پژوهش با پژوهش‌های کارتا و کانونسانو (۲۰۲۰)، لی و همکاران (۲۰۲۳) و فن و لجون (۲۰۲۴) مطابقت دارد. در پژوهش کارتا و کانونسانو با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو با سناریوهای مختلف، ثابت می‌شود که معیار کلی در بسیاری از جنبه‌ها و علی‌الخصوص نسبت شارپ بر هر رویکرد دیگری برتری دارد. همچنین لی نشان داد که سبد کلی-واژرتین می‌تواند در آزمایش‌های خارج از نمونه در چندین معیار عملکرد بهتر از سبدهای کلی عمل کند و ثبات بیشتری از خود نشان دهد و پژوهش حاضر نیز این یافته را مورد تایید قرار می‌دهد. همچنین فن و لجون (۲۰۲۴) نیز نشان دادند که عملکرد سودآوری مدل استوار توزیعی در معیار نسبت شارپ از مدل وزن برابر بهتر می‌باشد که با نتایج پژوهش حاضر مطابقت دارد. نسبت شارپ برای سرمایه‌گذاران

ریسک‌گریزی که تمایل به ریسک به اندازه دارند، دارای اهمیت فراوانی می‌باشد. از این رو به سرمایه‌گذاران ریسک‌گریز پیشنهاد می‌شود که برای کسب بازده بالا در بلندمدت از سبد کلی با رویکرد استوار توزیعی بهره‌برند و برای این منظور نیاز است تا سبد مورد نظر سرمایه‌گذار بر روی داده‌های آموزشی مورد بهینه‌سازی قرار گیرد و پس از عملکرد مناسب سودآوری بر روی داده‌های تست (آزمون) در جهت سرمایه‌گذاری عملی مورد استفاده قرار گیرد.

منابع

- (۱) بیرانوند، منا؛ داودی، سید محمد رضا و شریفی قزوینی، محمدرضا. (۱۴۰۳). بهینه‌سازی سبد سهام استوار توزیعی براساس نسبت کالمار. نشریه مهندسی سیستم و بهره‌وری. ۹۴-۱۰۹.
- (۲) شیرکوند، سعید؛ فدائی، حمیدرضا. (۱۴۰۱). بهینه‌سازی سبد سهام استوار با به‌کارگیری مدل‌های چند متغیره و امگا- ارزش در معرض ریسک شرطی بر پایه ملاک حداقل حداکثر پشیمانی. تحقیقات مالی، (۱)، ۱۷، ۲۴-۱.
1. Bermin, H. P., & Holm, M. (2022). Kelly trading and market equilibrium (No. 2019/2). Lund University, Knut Wicksell Centre for Financial Studies.
2. Carta, A., & Conversano, C. (2020). Practical Implementation of the Kelly Criterion: Optimal Growth Rate, Number of Trades, and Rebalancing Frequency for Equity Portfolios. *Frontiers in Applied Mathematics and Statistics*, 6, 577050.
3. Fan, W. L., & Anel, M. E. (2024). Robust Portfolio Choice under the Modified Constant Elasticity of Variance. *Mathematics*, 12(3), 440.
4. Fan, Z & Lejeune, M. A. (2024). Distributionally robust portfolio optimization under marginal and copula ambiguity. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1-38.
5. Gretton, A., Borgwardt, K. M., Rasch, M. J., Schölkopf, B., & Smola, A. (2012). A kernel two-sample test. *The Journal of Machine Learning Research*, 13(1), 723-773.
6. Hosseini-Nodeh, Z., Khanjani-Shiraz, R., & Pardalos, P. M. (2022). Distributionally Robust Portfolio Optimization with Second-Order Stochastic Dominance Based on Wasserstein Metric. *Information Sciences*.
7. Hsieh, C. H. (2020). Necessary and sufficient conditions for frequency-based Kelly optimal portfolio. *IEEE Control Systems Letters*, 5(1), 349-354.
8. Ji, R., Lejeune, M. A., & Fan, Z. (2022). Distributionally robust portfolio optimization with linearized STARR performance measure. *Quantitative Finance*, 1-15.

9. Li, J. Y. M. (2023). Wasserstein-Kelly Portfolios: A Robust Data-Driven Solution to Optimize Portfolio Growth. arXiv preprint arXiv:2302.13979.
10. Shihan Di, Dong Ma, Peibiao Zhao . (202. 3) α -robust portfolio optimization problem under the distribution uncertainty. *Journal of Industrial and management Optimization*, 19(4): 2528-2548.
11. Uehara, Y., Nishimura, N., Li, Y., Yang, J., Jobson, D., Ohashi, K., ... & Takano, Y. (2024). Robust portfolio optimization model for electronic coupon allocation. *arXiv preprint arXiv:2405.12865*.
12. Zhang, X. (2022). Distributional Robust Portfolio Construction based on Investor Aversion. arXiv preprint arXiv:2203.13999
13. Zhou, Y., & Xu, L. (2024). A new distributionally robust reward-risk model for portfolio optimization. *Open Mathematics*, 22(1), 20240010.

یادداشت‌ها

-
- ¹ Kelly
 - ² Carta & Conversano
 - ³ Hsieh
 - ⁴ MMD: maximum mean discrepancy
 - ⁵ Fan and Anel
 - ⁶ Carta & Conversano
 - ⁷ Overfitting
 - ⁸ Bermin and Holm
 - ⁹ Ambiguity sets
 - ¹⁰ Li
 - ¹¹ Uehara et al.
 - ¹² Fan and Anel
 - ¹³ Shihan et al.
 - ¹⁴ Zhou and Xu
 - ¹⁵ Wasserstein
 - ¹⁶ Li
 - ¹⁷ Bermin and Holm
 - ¹⁸ Hsieh
 - ¹⁹ Carta & Conversano
 - ²⁰ Ji et al
 - ²¹ Zhang
 - ²² Bermin and Holm
 - ²³ strong law of large numbers
 - ²⁴ White noise
 - ²⁵ Gretton
 - ²⁶ Kernel trick
 - ²⁷ Gretton