تعیین میدان جریان در پدیده سقوط ذرات رسوب در آب نزدیک به سکون با استفاده از حل معادله برگر دو بعدی با روش تفاضل محدود کاملاً ضمنی

ایمان رضایی[۱]، محمد واقفی[۲]*، حسین رهیده[۳]

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷-۰۴-۱۷ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸-۰۷-۲۹ تاریخ چاپ: ۱۳۹۹-۰۲-۲۲

چکیده

فرایندهای فیزیکی، وابسته به پارامترهای مختلف می‌باشد که در زبان ریاضی با معادله مخصوص به خود مدل می‌شوند. ازآنجایی که حل برخی از معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی، چنان دشوار است که به دست آوردن جواب تحلیلی آن‌ها مگر در شرایط خاص امکان‌پذیر نمی‌باشد، این‌گونه معادلات را می‌توان با روش‌های عددی حل نمود. معادله مورد نظر در این تحقیق، معادله برگر در حالت دو بعدی غیرخطی وابسته به زمان است که پدیده سرعت سقوط ذره درون سیال راکد یا نزدیک به سکون مانند آب رسوب دار پشت یک سد را مدل می‌کند. در این تحقیق برای حل معادله برگر دو بعدی ابتدا این معادله با استفاده از روش تفاضل محدود کاملاً ضمنی[۴] که یک روش پایدار غیرشرطی است گسسته سازی شده و سپس برنامه نویسی شد. همچنین دقت نتایج حل معادله با روش عددی دیگر (روش المان محدود) مقایسه شده است که دلالت بر همخوانی روش ساده‌تر تفاضل محدود نسبت به روش پیچیده‌تر المان محدود دارد. نتایج عددی برای لزجت‌ها و زمان‌های متفاوت به دست آمده و نقش آن‌ها در سرعت سقوط ذره مورد بررسی پارامتریک قرار گرفته است. به‌طور کلی نتایج نشان داد که با افزایش لزجت و زمان، سرعت سقوط ذره کاهش می‌یابد. با افزایش زمان، مکان هندسی سرعت های ماکزیمم در جهت عمقی به کف بستر و در جهت طولی به سمت انتهای طول نزدیک‌تر شدند. همچنین سرعت عمقی منفی (جریان رو به بالا) به‌خصوص در لبه‌های نزدیک بستر مشاهده شد که نشان‌دهنده‌ی معلق بودن ذرات در بعضی از مکان ها و زمان ها می‌باشد.

واژه های کلیدی: معادلات دیفرانسیل جزئی، معادله برگر، روش تفاضل محدود، سرعت سقوط ذرات رسوب

[۱] دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی عمران-سازه های هیدرولیکی، دانشکده مهندسی، دانشگاه خلیج فارس

[۲] دانشیار گروه مهندسی عمران-سازه های هیدرولیکی، دانشکده مهندسی، دانشگاه خلیج فارس

[۳] استادیار گروه مهندسی شیمی، دانشکده نفت و گاز، دانشگاه خلیج فارس

* نویسنده مسئول: vaghefi@pgu.ac.ir

[4] Fully implicit finite difference

مقدمه

در بیشتر سیال‌ها مواد و ذراتی وجود دارد که در آن حل نمی‌شوند و با جریان سیال در حال حرکت می‌باشند و از سویی به‌سوی دیگر می‌روند و دارای جابجایی می‌باشند؛ به این ذرات مواد معلق می‌گویند. حال اگر ذره‌ای در نظر گرفته شود که با سیال در حال جابجایی باشد آنچه مسلم است نیروی گرانش نیز به این ذره وارد می‌شود. اگر سیال در مسیر خود به هر دلیلی در زمان و مکانی متوقف شود سیال به حالت سکون یا نزدیک به سکون می‌رسد. در این حالت آن ذره معلق تحت تأثیر نیروی حرکتی سیال جابجا نمی‌شود اما تحت تأثیر نیروی گرانش شروع به جابجایی می‌نماید و مشخصاً از مکان اولیه خود در لحظه‌ای که سیال راکد شده است تغییر مکان داده و تحت تأثیر نیروی گرانش رو به پایین حرکت می‌کند و در بستر جمع می‌شود؛ به این پدیده رسوب‌گذاری مواد معلق می‌گویند. مثال عملی این پدیده در هنگام توقف جریان رودخانه‌ها در پشت یک بند انحرافی یا سد می‌باشد. در این حالت رسوبات معلق در جریان با حرکت قائم (تحت تأثیر نیروی گرانش) در پشت دیواره سد رسوب‌گذاری می‌کنند. به همین دلیل در طراحی سدها مخزن مرده یا دریچه رسوبگیر طراحی می‌کنند تا در بعضی مواقع مقداری از رسوبات را خارج نمایند. همچنین رسوب‌گذاری در پایین‌دست آبشکن ها خصوصاً آبشکن ها ی T شکل مثالی دیگر از تهنشینی رسوبات معلق را بیان می‌کند. ذرات معلق در زمان‌ها و مکان‌های متفاوت دارای سرعت‌های متفاوتی می‌باشند. معادله ناویر-استوکس[1] مدل ریاضی حاکم بر حرکات، جریانات و دینامیک سیالات (اعم از مایعات یا گازها) را شکل می‌دهد که حل کامل آن در دامنه‌ی فیزیکی بسیار دشوار است. معادله برگر در واقع همان معادله حرکت تراکم ناپذیر بدون ترم گرادیان فشار و معادله پیوستگی است که ترم‌های انتقال و پخش معادلات تراکم ناپذیر را دارا می‌باشد. این معادله یک مدل ساده برای فهم مسائل و جریان‌های فیزیکی مانند حرکت سیالات، آشفتگی و تلاطم در هیدرودینامیک، فرایندهای امواج(V.I. Rizun and Iu. K. Engel'Brekht, 1975)، بررسی لایه‌های مرزی، انتشار در محیط متخلخل، سرعت سقوط ذرات رسوب در سیال راکد و امواج شوک[2] (ضربه‌ای)(S. Watanabe et al., 1997) می‌باشد. این معادله برای اولین بار توسط Bateman (1915) معرفی شد که راه حلی را برای حالت ماندگار این معادله ارائه داد. پس از آن توسط Burgers (1939,1948) به‌عنوان یک مدل ریاضی برای آشفتگی تلقی شد. بنابراین این معادله به "معادله برگر" شهرت یافت. معادله برگر کاربردهای زیادی در زمینه‌های دیگری مانند جریان‌های ریزشی[3](L. Kofman and A.C. Rage, 1992)، دینامیک گاز[4](S. Albeverio et al., 1979) و... دارد. در سال‌های اخیر روش‌های حل عددی متفاوتی برای حل معادلات برگر به کار گرفته شده است که به چند مورد آن‌ها اشاره می‌شود. چند روش عددی المان محدود برای حل مسائل مقدار اولیه-مرزی معادلات برگر دو بعدی توسط Arminjon and Beauchamp (1979) شرح داده شد. Shu and Richards (1992) با استفاده از روش دیفرانسیل کوادرچر تعمیم یافته (GDQ) حل عددی معادله دو بعدی ناویر-استوکس تراکم ناپذیر را ارائه دادند. حل معادله برگر در فضای یک بعدی و دو بعدی با استفاده از توزیع توابع تقریبی (DAFs) برای گسسته سازی مکانی و استفاده از بسط تیلور برای گسسته سازی زمانی توسطWei et al. (1998) ارائه گردید. Zaki (2000) نوعی از معادله برگر به نام معادله KDV را ارزیابی و سپس به روش عددی اجزاء محدود بی-اسپیلاین حل نمود. Abdou and Soliman (2005) کوپل معادله برگر[5] را با استفاده از روش تکرار متغیر حل کرده و سپس نتایج خود را با حل به‌دست‌آمده از روش ADM[6] مقایسه نمودند؛ در انتها آن‌ها دریافتند که روش تکرار متغیر دقیق‌تر از روش ADM می‌باشد. Khater et al. (2008) از روش همبستگی چبیشف برای حل فرم‌های مختلف معادله برگر بهره بردند؛ آن‌ها نتایج حل عددی را برای هر فرم معادله ارائه داده و دقت بالای روش خود را از دیگر نتایج قبلی نشان دادند.

Haq et al. (2009) معادله KDV را ارزیابی کرده و با روش‌های بدون شبکه[7] به حل عددی این معادله

[1] Navier-Stokes equation
[2] Shock waves
[3] Jet flows
[4] gas dynamics
[5] Coupled Burger's equation
[6] Adomain Decomposition
[7] Mesh-Free

پرداختند. Rady et al. (2010) نوعی از معادله برگر به نام برگر-بوزینسک[۱] را معرفی کرده و حل این معادله را با روش tan h ارائه دادند. Tamsir and Srivastava (2011) روش تفاضل محدود نیمه ضمنی[۲] را برای حل معادله دو بعدی برگر به کار بردند. آن‌ها با مقایسه نتایج حل خود با نتایج حل دقیق و عددی قبلی، روش مورد مطالعه را کاربردی یافتند. Diaz et al. (2011) حل عددی نوعی از معادله برگر به نام برگر-هاکسلی را ارائه دادند؛ آن‌ها حل را برای فواصل شبکه متفاوت مورد بررسی قرار داده و خطاهای مربوطه را شرح دادند. روش دیفرانسیل کوادرچر المانی برای حل معادله یک‌بعدی برگر توسط Vaghefi et al. (2012) به کار گرفته شد؛ آن‌ها پس از نشان دادن همگرایی روش مورد مطالعه توسط مقایسه با روش حل دقیق، اثرات ویسکوزیته سینماتیکی را بر روی پارامتر سرعت مورد مطالعه قرار دادند. برای حل معادله غیرخطی یک‌بعدی برگر از روش دیفرانسیل کوادرچر بی-اسپیلاین مکعبی[۳] اصلاح‌شده (MCB-DQM) توسط Arora and Singh (2013) استفاده شد. Wazwaz (2014) حل عددی معادله دو بعدی و سه‌بعدی برگر تعمیم یافته را با استفاده از روش تغییر متغیر Hopf–Cole ارائه داد. Zhanlav et al. (2015) برای حل معادله ناماندگار برگر از طرح تفاضل محدود مرتبه بالا بهره بردند؛ آن‌ها نتایج خود را با نتایج حل دقیق برای اعداد رینولدز متفاوت نزدیک یافتند. حل عددی معادله دو بعدی برگر با استفاده از روش دیفرانسیل کوادرچر بی-اسپیلاین مکعبی اصلاح‌شده توسط Shukla et al. (2016) به کار برده شد. آن‌ها با مقایسه نتایج خود با نتایج عددی دیگر و حل دقیق، روش مورد مطالعه را مؤثر و قابل‌قبول یافتند. Zheng et al. (2017) روش تفاضل محدود جدیدی را روی دامنه نامحدود با دو شرط مرزی غیرخطی و شرط اولیه خطی برای حل معادله غیرهمگن یک‌بعدی برگر به کار بردند.

در این تحقیق با استفاده از روش تفاضل محدود کاملاً ضمنی که یک روش پایدار غیر شرطی است پرداخته می شود و میدان جریان و توزیع سرعت های طولی و عمقی در هر دو جهت طولی و عمقی و هم چنین نقش پارامتر های لزجت و زمان بر روی سرعت های سقوط مورد بررسی قرار می‌گیرد.

مواد و روش‌ها

معادله‌ای که در این تحقیق مورد بررسی قرار می‌گیرد، معادله برگر دو بعدی می‌باشد که برای پیش‌بینی سرعت سقوط ذرات رسوب در آب نزدیک به سکون مناسب است:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0\ ,\quad 0\le x\le 1\ ,\ 0\le y\le 1\ ,\ t>0\ . \qquad (۱)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)=0\ ,\quad 0\le x\le 1\ ,\ 0\le y\le 1\ ,\ t>0\ . \qquad (۲)$$

که در آن u و v به ترتیب سرعت سقوط ذرات رسوب در جهت طولی و عمقی و Re عدد بی‌بعد رینولدز می‌باشد. معادله فوق در واقع فرم بی‌بعد شده معادله برگر می‌باشد. در اینجا $\frac{1}{Re}$ با υ (ضریب لزجت سینماتیکی) نشان داده شده است. شرایط اولیه و مرزی برای حل این معادله به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

شرایط اولیه

$$u(x,y,0)=\sin(\pi x)\sin(\pi y)\ ,$$
$$v(x,y,0)=\left(\sin(\pi x)+\sin(2\pi x)\right)\left(\sin(\pi y)+\sin(2\pi y)\right),$$
$$0\le x\le 1\ ,\ 0\le y\le 1\ .$$

شرایط مرزی

$$u(x,0,t)=0,\quad u(x,1,t)=0,\quad u(0,y,t)=0,$$
$$u(1,y,t)=0,\quad v(x,0,t)=0,\quad v(x,1,t)=0,$$
$$v(0,y,t)=0,\quad v(1,y,t)=0\quad ,\ t>0.$$

در این تحقیق روش تفاضل محدود کاملاً ضمنی برای حل معادله برگر دو بعدی با شرایط اولیه و مرزی مشخص، استفاده می‌شود. نتایج محاسبه شده با نتایج حل عددی دیگر مقایسه می‌گردد.

روش حل

تقریب گسسته $u(x,y,t)$ و $v(x,y,t)$ در هر نقطه شبکه‌بندی $\left[\Delta x(i-1),\Delta y(j-1),\Delta t(n-1)\right]$ توسط $u_{i,j}^{n}$ و $v_{i,j}^{n}$ مشخص می‌گردد که $[i=1,2,\dots,N_x;\ j=1,2,\dots,N_y;\ n=1,2,\dots]$ N_x

۱ Boussinesq–Burgers equation
۲ Semi-implicit
۳ cubic B-spline

و N_y به ترتیب تعداد نقاط دقت در جهت x و y بوده و $\Delta x = 1/(N_x - 1)$ سایز شبکه‌بندی در جهت x و $\Delta y = 1/(N_x - 1)$ سایز شبکه‌بندی در جهت y و Δt نشان‌دهنده‌ی میزان افزایش زمان می‌باشد.

با توجه به شکل ۱ برای گسسته سازی از تفاضل محدود مرکزی[1] استفاده شده است که نسبت به تفاضل محدود پسرو و پیشرو از دقت بالاتری برخوردار می‌باشد.

گسسته سازی تفاضل محدود کاملاً ضمنی به‌صورت زیر است:

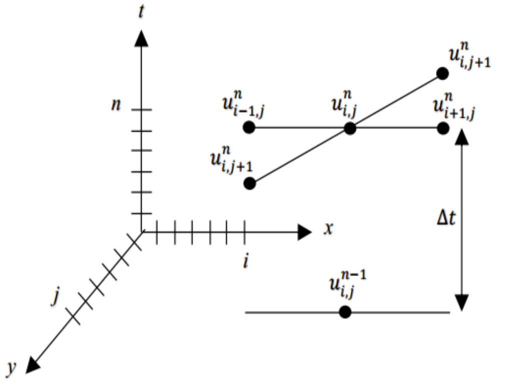
$$\frac{u_{i,j}^{n} - u_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} + u_{i,j}^{n}\left(\frac{u_{i+1,j}^{n} - u_{i-1,j}^{n}}{2\Delta x}\right) + v_{i,j}^{n}\left(\frac{u_{i,j+1}^{n} - u_{i,j-1}^{n}}{2\Delta y}\right) - \frac{1}{Re}\left(\frac{u_{i+1,j}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i-1,j}^{n}}{\Delta x^{2}} + \frac{u_{i,j+1}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i,j-1}^{n}}{\Delta y^{2}}\right) = 0 \qquad (۴)$$

$$\frac{v_{i,j}^{n} - v_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} + u_{i,j}^{n}\left(\frac{v_{i+1,j}^{n} - v_{i-1,j}^{n}}{2\Delta x}\right) + v_{i,j}^{n}\left(\frac{v_{i,j+1}^{n} - v_{i,j-1}^{n}}{2\Delta y}\right) - \frac{1}{Re}\left(\frac{v_{i+1,j}^{n} - vu_{i,j}^{n} + v_{i-1,j}^{n}}{\Delta x^{2}} + \frac{v_{i,j+1}^{n} - 2v_{i,j}^{n} + v_{i,j-1}^{n}}{\Delta y^{2}}\right) = 0 \,, \qquad (۵)$$

$, 2 \le i \le Nx - 1 \quad , 2 \le j \le Ny - 1, \; 2 \le n$

برای خطی سازی سیستم غیرخطی معادلات فوق از روش نیوتن-رافسون[2] استفاده می‌شود(Vaghefi et al., 2012).

محاسبات عددی مربوط به روش تفاضل محدود کاملاً ضمنی با استفاده از شبکه یکنواخت انجام شد.



شکل ۱- شکل شماتیک شبکه‌بندی به روش تفاضل محدود

نتایج عددی

حل عددی برای سرعت‌های u و v برای لزجت های سینماتیکی متفاوت و زمان‌های متفاوت در نقاط شبکه‌بندی به دست آمد که نتایج آن در جدول ۱ آورده شده است.

همان‌طور که در جدول ۱ مشاهده می‌شود مقادیر سرعت‌های طولی و عمقی با شبکه‌بندی‌های متفاوت به دست آمده و نتایج، همخوانی خوبی را با روش پیچیده المان محدود نشان می‌دهد. با افزایش تعداد نقاط شبکه، نتایج به روش المان محدود نزدیک‌تر می‌شود و خطای کم‌تری دارد.

جدول ۱- مقادیر سرعت‌های طولی و عمقی u و v به‌عنوان نمونه برای لزجت معادل ۱ و زمان t=۰/۰۱ و مقایسه با روش المان محدود(P. Arminjon and C. Beauchamp, 1979).

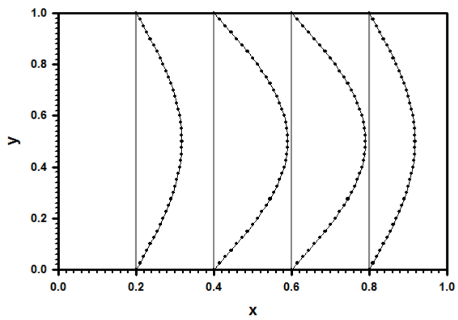
		روش المان محدود	روش حاضر			
نقاط شبکه بندی	سرعت‌ها	$\Delta x = \Delta y = 1/80$ $\Delta t = 1/3000$	$\Delta x = \Delta y = 1/20$ $\Delta t = 1/1000$	$\Delta x = \Delta y = 1/40$ $\Delta t = 1/1000$	$\Delta x = \Delta y = 1/40$ $\Delta t = 1/2000$	خطای مطلق
$x = 0.1$	u	۰/۰۷۲۵۱۳۹	۰/۰۷۲۹۹۴۳	۰/۰۷۲۹۴۶۴	۰/۰۷۲۷۴۰۵	-۰/۰۰۰۲۲۶۶
$y = 0.1$	v	۰/۴۳۱۳۲۰	۰/۴۴۲۰۳۵۲	۰/۴۴۰۷۰۰۴	۰/۴۳۶۲۵۱۴	-۰/۰۰۴۹۳۱۴
$x = 0.2$	u	۰/۲۸۸۳۳۴	۰/۲۷۸۴۹۴۷	۰/۲۷۸۴۲۸۳	۰/۲۷۸۰۲۰۱	۰/۰۱۰۳۱۳۹
$y = 0.8$	v	-۰/۱۲۱۳۱۷	-۰/۱۳۸۶۰۳	-۰/۱۳۶۶۷۳	-۰/۱۳۰۹۵۹	۰/۰۰۹۶۴۲
$x = 0.4$	u	۰/۷۲۱۷۱۶	۰/۷۲۴۲۵۲۳	۰/۷۲۳۹۸۶۶	۰/۷۲۲۸۹۵۲	-۰/۰۰۱۱۷۹۲
$y = 0.4$	v	۱/۶۵۲۷۰	۱/۶۶۶۲۵۳	۱/۶۶۳۹۷۶	۱/۶۵۸۷۱۵۳	-۰/۰۰۶۰۱۵۳

[1] Central finite difference

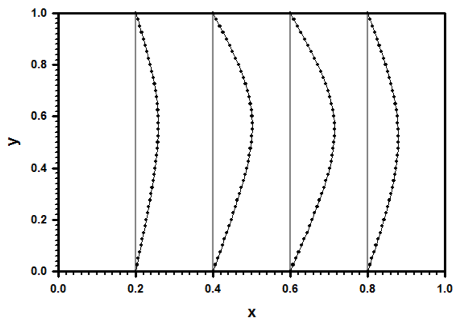
[2] Newton-Raphson method

$x = 0.7$ $y = 0.1$	u v	۰/۲۰۱۰۴۸ ۰/۰۶۷۱۱۲۳	۰/۲۰۵۲۴۰۱ ۰/۰۵۹۵۰۸۵	۰/۲۰۵۱۵۹۳ ۰/۰۶۰۴۵۴۲	۰/۲۰۴۹۸۴۶۲ ۰/۰۶۳۴۰۶۹	-۰/۰۰۳۹۳۶۶ ۰/۰۰۳۷۰۳۵۴
$x = 0.9$ $y = 0.9$	u v	۰/۰۷۹۴۶۳۹ ۰/۰۱۳۴۴۰۹	۰/۰۷۹۶۰۰۵ ۰/۰۱۵۹۶۳۳	۰/۰۷۹۵۸۲۳ ۰/۰۱۵۷۶۱۰	۰/۰۷۹۵۲۵۸ ۰/۰۱۴۶۵۴۶	-۰/۰۰۰۰۶۱۹ -۰/۰۰۱۲۱۳۷

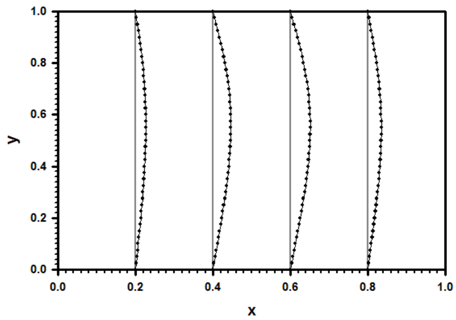
شکل۲ نشان‌دهنده‌ی توزیع سرعت طولی u در جهت عمقی برای طول‌های مشخص برای ضریب لزجت ۰/۲۵ می‌باشد. در این حالت در شکل ۲-الف برای شرایط اولیه در موقعیت‌های x=۰/۸ و x=۰/۲ و همچنین x=۰/۶ و x=۰/۴ سرعت‌های یکسانی مشاهده می‌شود. سرعت طولی ماکزیمم در طول ۰/۴ نسبت به طول ۰/۲ به میزان حدود ۶۱/۸ درصد افزایش‌یافته است. در شکل ۲-ب برای زمان t=۰/۱ و موقعیت طولی ۰/۴ مقدار سرعت طولی ماکزیمم به حدود ۸۷ درصد نسبت به زمان اولیه کاهش پیدا می‌کند. در شکل ۲-ج برای زمان t=۰/۲۵ سرعت طولی ماکزیمم در x=۰/۶ نسبت به x=۰/۲ حدود ۹۲/۲ درصد افزایش می‌یابد اما این مقدار در x=۰/۸ نسبت به x=۰/۶ حدود ۴۷/۵ درصد کاهش می‌یابد. در این حالت مکان هندسی سرعت طولی ماکزیمم برای همه طول‌ها یکسان است و در عمق y=۰/۵۵ رخ می‌دهد. در شکل ۲-د برای زمان t=۰/۵ سرعت طولی ماکزیمم در x=۰/۶ نسبت به x=۰/۲ حدود ۷۳/۷ درصد افزایش می‌یابد اما این مقدار در x=۰/۸ نسبت به x=۰/۶ حدود ۵۶/۵ درصد کاهش می‌یابد. در این حالت مانند حالت قبل مکان هندسی سرعت طولی ماکزیمم برای همه طول‌ها یکسان است و در عمق y=۰/۵۲۵ رخ می‌دهد. همان‌طور که مشخص است به‌طور کلی با افزایش زمان از مقدار سرعت طولی در جهت عمقی کاسته می‌شود. به‌عنوان مثال با ۵ برابر شدن زمان (از ۰/۱ به ۰/۵) مقدار سرعت طولی ماکزیمم در جهت عمق در موقعیت طولی ۰/۴ به حدود ۸۸ درصد کاهش یافته است.



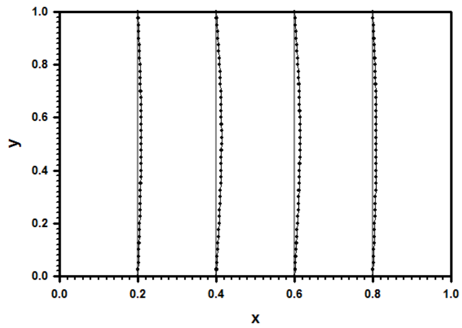
(الف)



(ب)



(ج)

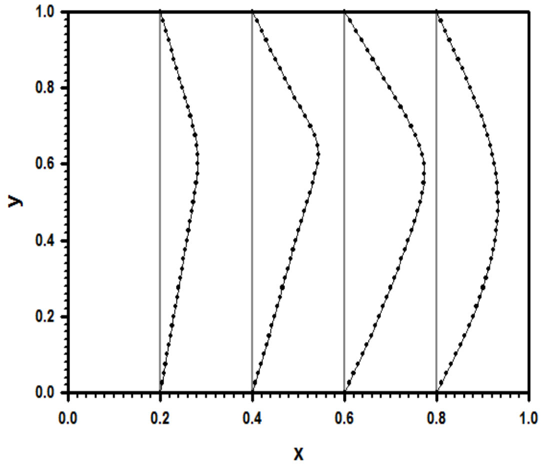


(د)

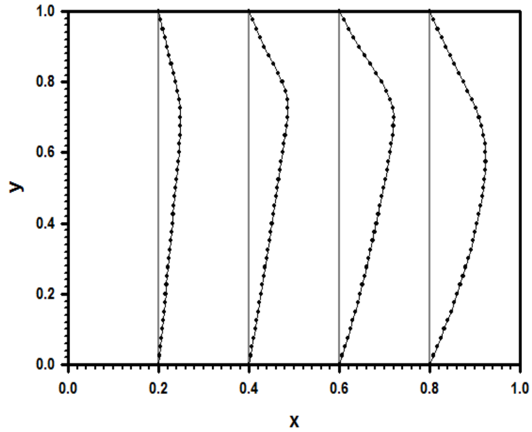
شکل ۲- نمونه‌ای از توزیع سرعت طولی u در جهت عمقی (υ =۰/۲۵) و زمان‌های متفاوت: الف) t=۰، ب) t=۰/۱، ج) t=۰/۲۵ و د) t=۰/۵. ۵

شکل ۳ نشان‌دهنده‌ی توزیع سرعت طولی u در جهت عمقی برای طول‌های مشخص برای ضریب لزجت ۰/۰۵ می‌باشد. در شکل ۳-الف برای زمان t=۰/۱ سرعت طولی ماکزیمم در x=۰/۶ نسبت به x=۰/۲ حدود ۱۱۲/۹ درصد افزایش می‌یابد اما این مقدار در x=۰/۸ نسبت به x=۰/۶ حدود ۳۰/۶ درصد کاهش می‌یابد. در این حالت

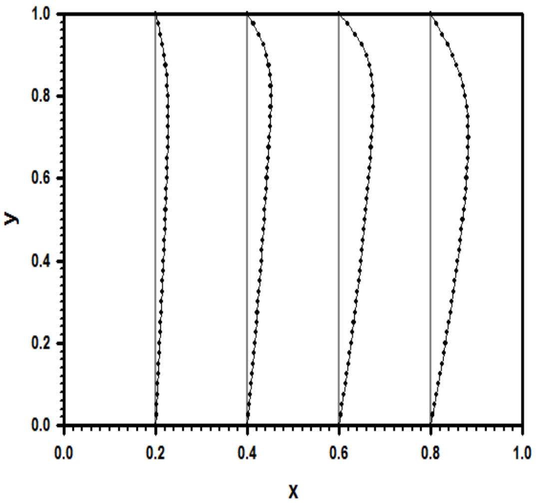
مکان هندسی سرعت طولی ماکزیمم متغیر است به‌طوری که برای موقعیت‌های طولی ۰/۲ و ۰/۴ به ترتیب در عمق ۰/۶ و ۰/۶۲۵ و برای طول‌های ۰/۶ و ۰/۸ در عمق ۰/۵۷۵ و ۰/۵ رخ می‌دهد. در شکل ۳-ب برای t=۰/۲۵ با افزایش طول سرعت ماکزیمم طولی افزایش پیدا می‌کند. به‌طوری که در x=۰/۸ نسبت به x=۰/۲ حدود ۱۵۶/۵ درصد افزایش پیدا کرده است. در شکل ۳-ج برای زمان t=۰/۵ سرعت طولی ماکزیمم در x=۰/۸ نسبت به x=۰/۲ حدود ۲۰۰/۶ درصد افزایش می‌یابد. مکان هندسی سرعت طولی ماکزیمم از عمق ۰/۷۵ در x=۰/۲ به عمق ۰/۷ در x=۰/۸ تغییر یافته است.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۳- نمونه‌ای از توزیع سرعت طولی u در جهت عمقی (υ =۰/۰۵) و زمان‌های متفاوت: الف) t=۰/۱، ب) t=۰/۲۵ و ج) t=۰/۵. ۵

با افزایش زمان از مقدار سرعت ماکزیمم طولی کاسته می شود و در عمق های بیشتری رخ می‌دهد. به طوریکه در x=۰/۴ و t=۰/۵ مقدار سرعت ماکزیمم طولی نسبت به t=۰/۱ حدود ۱۷۷/۶ درصد کاهش یافته است. مکان هندسی سرعت طولی ماکزیمم در زمان t=۰/۱ و موقعیت طولی ۰/۲ از عمق ۰/۶ به عمق ۰/۷۵ در زمان t=۰/۵ تغییر می‌یابد.

با مقایسه شکل‌های ۲ و ۳ می‌توان نتیجه گرفت که با کاهش لزجت، سرعت طولی در جهت عمقی افزایش می‌یابد. به‌طوری که برای زمان ۰/۲۵ و موقعیت طولی ۰/۸ مقدار سرعت طولی ماکزیمم در جهت عمقی برای لزجت ۰/۰۵ نسبت به لزجت ۰/۲۵ حدود ۷۲ درصد افزایش پیدا کرده است. نکته دیگر این‌که مکان هندسی سرعت طولی ماکزیمم در جهت عمق با کاهش لزجت به کف بستر نزدیک‌تر خواهد شد. به‌عنوان مثال برای زمان t=۰/۵ مکان هندسی سرعت ماکزیمم در لزجت معادل ۰/۰۵ نسبت به لزجت ۰/۲۵ حدود ۵۲/۴ درصد به کف بستر نزدیک می‌شود.

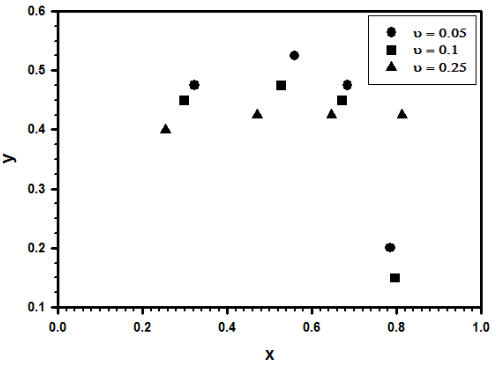
شکل ۴-الف نشان‌دهنده‌ی مقادیر و مکان هندسی سرعت ماکزیمم عمقی v برای زمان t=۰/۱ و لزجت های متفاوت در جهت عمقی می‌باشد. برای لزجت معادل ۰/۰۵ مقدار سرعت ماکزیمم عمقی در x=۰/۴ نسبت به x=۰/۲ حدود ۲۹/۷ درصد افزایش یافته اما در موقعیت‌های طولی ۰/۶ و ۰/۸ با کاهش این مقدار نسبت به طول‌های قبلی وجود دارد، به‌طوری که در x=۰/۶ نسبت به x=۰/۴ حدود

۸۷/۷ درصد کاهش مشاهده می‌شود. برای لزجت معادل ۰/۱ مقدار سرعت ماکزیمم عمقی در x=۰/۴ نسبت به x=۰/۲ حدود ۲۹/۴ درصد افزایش یافته اما در موقعیت‌های طولی ۰/۶ و ۰/۸ با کاهش این مقدار نسبت به طول‌های قبلی روبرو هستیم به‌طوری که در x=۰/۶ نسبت به x=۰/۴ حدود ۷۸/۳ درصد کاهش مشاهده می‌شود. با افزایش لزجت از مقدار سرعت عمقی کاسته می‌شود و در عمق‌های کمتری رخ می‌دهد. به‌عنوان مثال در لزجت معادل ۰/۱ و موقعیت طولی ۰/۶ مقدار سرعت عمقی ماکزیمم نسبت به لزجت معادل ۰/۰۵ حدود ۱۸/۹ درصد کاهش می‌یابد و در لزجت ۰/۲۵ و موقعیت طولی ۰/۶ مقدار سرعت عمقی ماکزیمم نسبت به لزجت ۰/۱ حدود ۵۲/۹ درصد کاهش می‌یابد. مکان هندسی سرعت عمقی ماکزیمم در لزجت ۰/۰۵ و موقعیت طولی ۰/۴ از عمق ۰/۵۲۵ به عمق ۰/۴۷۵ در لزجت معادل ۰/۱ تغییر می‌یابد.

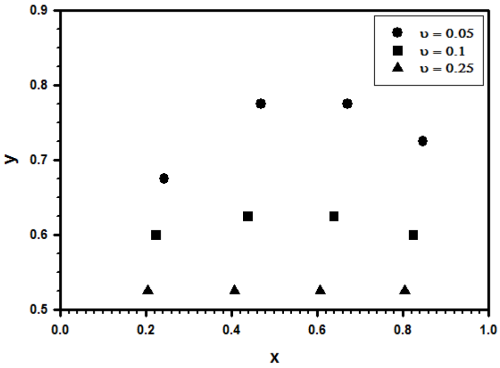
شکل ۴-ب نشان‌دهنده‌ی مقادیر و مکان هندسی سرعت ماکزیمم عمقی برای زمان t=۰/۵ و لزجت های متفاوت در جهت عمقی می‌باشد. برای لزجت معادل ۰/۰۵ مقدار سرعت ماکزیمم عمقی در x=۰/۶ نسبت به x=۰/۲ حدود ۶۸/۴ درصد افزایش یافته اما در موقعیت‌های طولی ۰/۸ با کاهش این مقدار نسبت به طول‌های قبلی مشاهده می‌شود به‌طوری که در x=۰/۸ نسبت به x=۰/۴ حدود ۴۹/۲ درصد کاهش می‌یابد. برای لزجت معادل ۰/۱ مقدار سرعت ماکزیمم عمقی در x=۰/۶ نسبت به x=۰/۲ حدود ۶۴/۸ درصد افزایش یافته اما در x=۰/۸ نسبت به x=۰/۶ حدود ۵۹/۲ درصد کاهش می‌یابد. با افزایش لزجت از مقدار سرعت ماکزیمم عمقی کاسته می‌شود و در عمق‌های کمتری رخ می‌دهد. به‌عنوان مثال در لزجت معادل ۰/۱ و موقعیت طولی ۰/۸ مقدار سرعت عمقی ماکزیمم نسبت به لزجت معادل ۰/۰۵ حدود ۹۲/۵ درصد کاهش می‌یابد و در لزجت ۰/۲۵ و موقعیت طولی ۰/۸ مقدار سرعت عمقی ماکزیمم نسبت به لزجت ۰/۱ حدود ۴۳۵/۲ درصد کاهش می‌یابد. مکان هندسی سرعت عمقی ماکزیمم در لزجت ۰/۰۵ و موقعیت طولی ۰/۴ از عمق ۰/۷۷۵ به عمق ۰/۶۲۵ در لزجت معادل ۰/۱ تغییر می‌یابد.

با مقایسه شکل ۴-الف و ۴-ب می‌توان دریافت که با افزایش زمان از مقدار سرعت ماکزیمم عمقی کاسته می‌شود و در عمق‌های بیشتری رخ می‌دهد. به‌طوری که در لزجت معادل ۰/۲۵ و x=۰/۴ و t=۰/۵ مقدار سرعت ماکزیمم عمقی نسبت به t=۰/۱ حدود ۸۹۴/۸ درصد کاهش یافته است. مکان هندسی سرعت عمقی ماکزیمم در زمان t=۰/۱، لزجت ۰/۱ و موقعیت طولی ۰/۴ از عمق ۰/۴۷۵ به عمق ۰/۶۲۵ در زمان t=۰/۵ تغییر می‌یابد.

همانطور که در شکل ۵-الف که مقادیر و مکان هندسی سرعت ماکزیمم طولی u را برای زمان t=۰/۱ و لزجت های متفاوت در جهت طولی نشان می‌دهد، مشاهده می‌شود برای لزجت معادل ۰/۰۵ مقدار سرعت ماکزیمم طولی در y=۰/۶ نسبت به y=۰/۲ حدود ۱۰۰/۷ درصد افزایش یافته است، اما در عمق y=۰/۸ این مقدار نسبت به عمق‌های ۰/۴ و ۰/۶ کاهش و نسبت به عمق ۰/۲ افزایش یافته به‌طوری که نسبت به y=۰/۶ حدود ۷۶/۶ درصد کاهش و نسبت به y=۰/۲ حدود ۱۳/۷ درصد افزایش یافته است. برای لزجت معادل ۰/۱ مقدار سرعت ماکزیمم طولی در y=۰/۶ نسبت به y=۰/۲ حدود ۱۰۵/۸ درصد افزایش یافته است، اما در عمق y=۰/۸ این مقدار نسبت به عمق y=۰/۶ حدود ۳۱ درصد کاهش می‌یابد. با افزایش لزجت از مقدار سرعت ماکزیمم طولی در جهت طول کاسته می‌شود و در طول‌های کمتری رخ می‌دهد. به‌عنوان مثال در لزجت معادل ۰/۱ و عمق ۰/۴ مقدار سرعت طولی ماکزیمم نسبت به لزجت معادل ۰/۰۵ حدود ۱۱/۱ درصد کاهش می‌یابد و در لزجت ۰/۲۵ و عمق ۰/۴ مقدار سرعت طولی ماکزیمم نسبت به لزجت ۰/۱ حدود ۳۰/۶ درصد کاهش می‌یابد. مکان هندسی سرعت طولی ماکزیمم در لزجت ۰/۰۵ و عمق ۰/۲ از طول ۰/۷۲۵ به طول ۰/۶ در لزجت معادل ۰/۲۵ تغییر می‌یابد.



(الف)

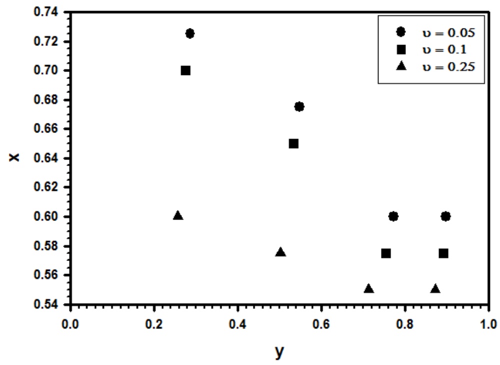


(ب)

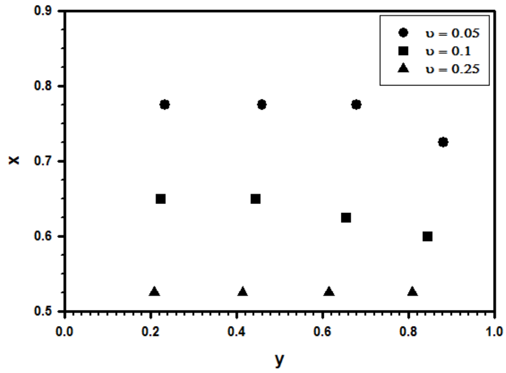
شکل ۴- نمونه‌ای از توزیع سرعت ماکزیمم عمقی v در جهت عمقی و برای زمان‌های الف) t=۰/۱ و ب) t=۰/۵.

با توجه به شکل ۵-ب که مقادیر و مکان هندسی سرعت ماکزیمم طولی را برای زمان t=۰/۵ و لزجت های متفاوت در جهت طولی نشان می‌دهد، برای لزجت معادل ۰/۰۵ مقدار سرعت ماکزیمم طولی در جهت طول افزایش می‌یابد به‌طوری که در y=۰/۸ نسبت به y=۰/۲ حدود ۱۴۸/۹ درصد افزایش یافته است. برای لزجت معادل ۰/۱ مقدار سرعت ماکزیمم طولی در y=۰/۶ نسبت به y=۰/۲ حدود ۱۵۲/۸ درصد افزایش می‌یابد اما در y=۰/۸ نسبت به y=۰/۶ حدود ۲۷۳/۵ درصد کاهش می‌یابد... با افزایش لزجت از مقدار سرعت ماکزیمم طولی در جهت طول کاسته می‌شود و در طول‌های کمتری رخ می‌دهد. به‌عنوان مثال در لزجت معادل ۰/۱ و عمق ۰/۶ مقدار سرعت طولی ماکزیمم نسبت به لزجت معادل ۰/۰۵ حدود ۴۷/۳ درصد کاهش می‌یابد و در لزجت ۰/۲۵ و عمق ۰/۶ مقدار سرعت طولی ماکزیمم نسبت به لزجت ۰/۱ حدود ۲۷۳/۵ درصد کاهش می‌یابد. مکان هندسی سرعت طولی ماکزیمم در لزجت ۰/۰۵ و عمق ۰/۲ از طول ۰/۷۷۵ به طول ۰/۵۲۵ در لزجت معادل ۰/۲۵ تغییر می‌یابد.

با توجه به شکل‌های ۵-الف و ۵-ب می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش زمان از مقدار سرعت ماکزیمم طولی کاسته می‌شود و در طول‌های بیشتری پدید می‌آید. به‌عنوان مثال در لزجت معادل ۰/۲۵ و y=۰/۴ و t=۰/۵ مقدار سرعت ماکزیمم عمقی نسبت به t=۰/۱ حدود ۲۱/۳ درصد کاهش یافته است. مکان هندسی سرعت طولی ماکزیمم در زمان t=۰/۱، لزجت ۰/۰۵ و عمق ۰/۲ از طول ۰/۷۲۵ به طول ۰/۷۷۵ در زمان t=۰/۵ تغییر می‌یابد.



(الف)

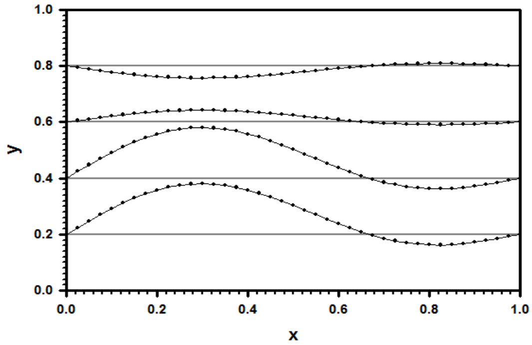


(ب)

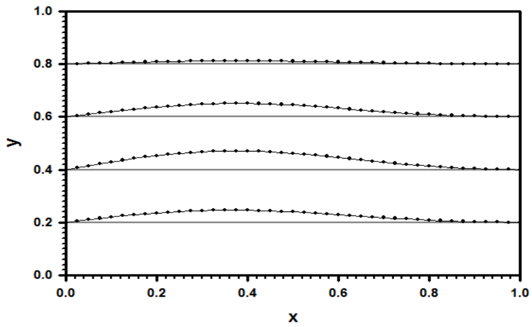
شکل ۵- نمونه‌ای از توزیع سرعت ماکزیمم طولی u در جهت طولی و برای زمان‌های الف) t=۰/۱ و ب) t=۰/۵.

شکل ۶ نشان‌دهنده‌ی توزیع سرعت عمقی v در جهت طولی برای اعماق مشخص و ضریب لزجت ۰/۲۵ می‌باشد. در شکل ۶-الف برای شرایط اولیه سرعت عمقی منفی (جریان رو به بالا) در جهت طولی مشاهده می‌شود که نشان‌دهنده‌ی معلق بودن ذرات در این شرایط می‌باشد. مشخص است که تا زمان معادل ۰/۵ سرعت عمقی منفی مشاهده نمی‌شود و این بدان معنی است که لزجت زیاد مانع معلق بودن ذرات خواهد بود. در شکل ۶-ب برای زمان t=۰/۱ سرعت عمقی ماکزیمم در y=۰/۶ نسبت به y=۰/۲ حدود ۱۱/۳ درصد افزایش می‌یابد ولی در y=۰/۸ نسبت به y=۰/۶ حدود ۳۰۴/۶ درصد کاهش می‌یابد. در این حالت مکان هندسی سرعت عمقی ماکزیمم برای همه عمق‌ها یکسان و برابر با طول ۰/۳۷۵ می‌باشد. در شکل ۶-ج برای زمان t=۰/۲۵ سرعت عمقی ماکزیمم در y=۰/۴ نسبت به y=۰/۲ حدود ۱۴/۶ درصد افزایش می‌یابد، اما در y=۰/۶ و y=۰/۸ نسبت به y=۰/۴ به ترتیب حدود ۲/۲ و ۷۴/۷ درصد کاهش می‌یابد. در این حالت مکان هندسی سرعت عمقی ماکزیمم در تمام عمق‌ها یکسان و برابر با طول ۰/۴۵ می‌باشد. در شکل ۶-د برای زمان t=۰/۵ سرعت عمقی ماکزیمم در y=۰/۶ نسبت به y=۰/۲ حدود ۷۱/۲ درصد

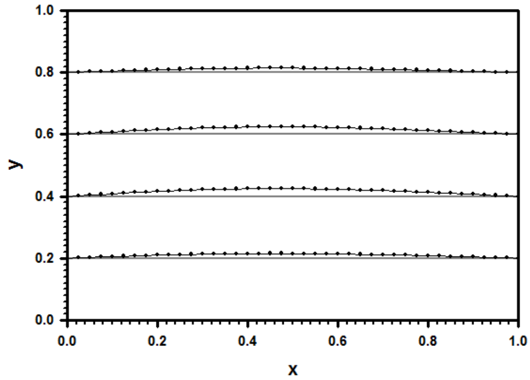
افزایش می‌یابد ولی در y=۰/۸ نسبت به y=۰/۶ حدود ۵۷/۶ درصد کاهش می‌یابد. در این حالت مکان هندسی سرعت عمقی ماکزیمم برای همه عمق‌ها یکسان و برابر با طول ۰/۵ می‌باشد.



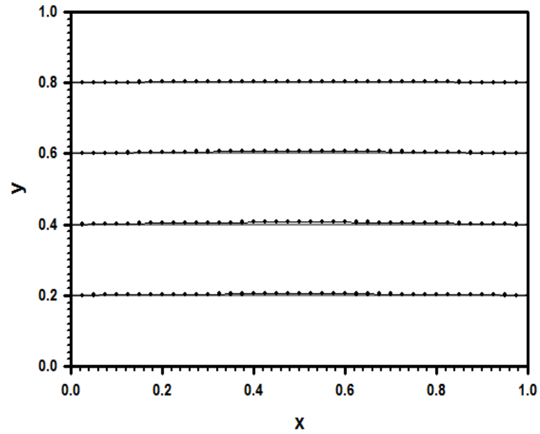
(الف)



(ب)



(ج)



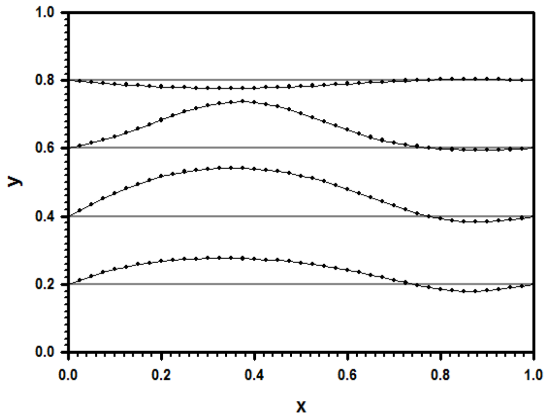
(د)

شکل ۶- نمونه‌ای از توزیع سرعت عمقی v در جهت طولی (υ =۰/۲۵) و زمان‌های متفاوت: الف) t=۰، ب) t=۰/۱، ج) t=۰/۲۵ و د) t=۰/۵. 15

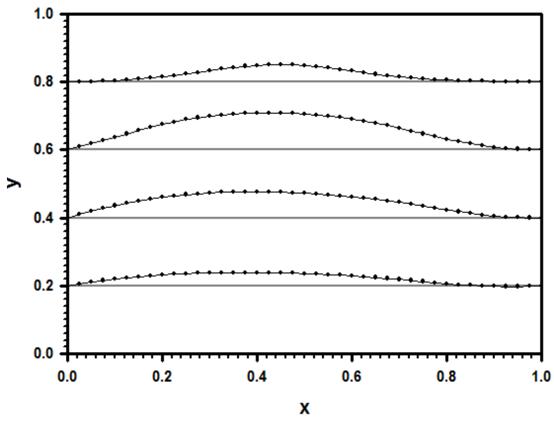
شکل ۷ نشان‌دهنده‌ی توزیع سرعت عمقی v در جهت طولی برای اعماق مشخص و ضریب لزجت ۰/۰۵ می‌باشند. در شکل ۷-الف برای زمان t=۰/۱ سرعت عمقی ماکزیمم در y=۰/۴ نسبت به y=۰/۲ حدود ۸۶/۲ درصد افزایش می‌یابد، اما در y=۰/۶ و y=۰/۸ نسبت به y=۰/۴ به ترتیب حدود ۳/۳ و ۵۱۷/۶۲ درصد کاهش می‌یابد. لازم به ذکر است در عمق y=۰/۸ سرعت ماکزیمم عمقی منفی می‌باشد. در شکل ۷-ب برای زمان t=۰/۲۵ سرعت عمقی ماکزیمم در y=۰/۶ نسبت به y=۰/۲ حدود ۱۸۲/۸ درصد افزایش می‌یابد ولی در y=۰/۸ نسبت به y=۰/۶ حدود ۱۱۱/۵ درصد کاهش می‌یابد. در شکل ۷-ج برای زمان t=۰/۵ با افزایش عمق سرعت ماکزیمم عمقی افزایش می‌یابد به‌طوری که در y=۰/۸ نسبت به y=۰/۶ حدود ۲۵۶/۲ افزایش مشاهده می‌شود.

با افزایش زمان از مقدار سرعت ماکزیمم عمقی کاسته می‌شود و در طول‌های بیشتری رخ می‌دهد. به‌طوری که در y=۰/۴ و t=۰/۵ مقدار سرعت ماکزیمم عمقی نسبت به t=۰/۱ حدود ۲۴۲/۵ درصد کاهش یافته است. مکان هندسی سرعت عمقی ماکزیمم در زمان t=۰/۱ و موقعیت طولی ۰/۲ از عمق ۰/۳۲۵ به عمق ۰/۴۲۵ در زمان t=۰/۱ تغییر می‌یابد.

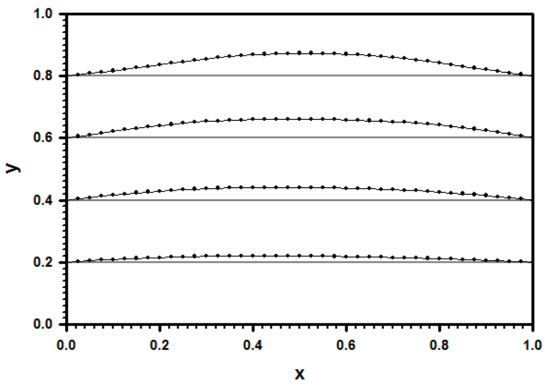
با توجه به شکل‌های ۶ و ۷ می‌توان دریافت که با کاهش لزجت مکان هندسی سرعت عمقی ماکزیمم در جهت طول به ابتدای مقطع متمایل می‌شود. به‌عنوان مثال در زمان t=۰/۵، عمق ۰/۲ و لزجت معادل ۰/۰۵ مکان هندسی سرعت عمقی ماکزیمم ۱۷/۶ درصد نسبت به لزجت معادل ۰/۲۵ به ابتدای مقطع طولی نزدیک‌تر می‌شود.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۷- نمونه‌ای از توزیع سرعت عمقی v در جهت طولی (υ =۰/۰۵) و زمان‌های متفاوت: الف) t=۰/۱، ب) t=۰/۲۵ و ج) t=۰/۵.

نتیجه‌گیری

روش تفاضل محدود کاملاً ضمنی برای حل معادله برگر دو بعدی به کار گرفته شد که توانست خطوط جریان، توزیع سرعت‌های طولی و عمقی و مکان هندسی سرعت‌های ماکزیمم را در جهات طولی و عمقی تعیین کند. با مقایسه این روش با روش پیچیده المان محدود، نتایج با خطای نسبتا کم مشابهت دارد. به‌طور کلی می‌توان دریافت که با افزایش لزجت و زمان سرعت‌های سقوط در دو جهت طولی و عمقی کاهش پیدا می‌کنند. به‌عنوان مثال با ۵ برابر شدن لزجت (از لزجت معادل ۰/۰۵ به ۰/۲۵) برای زمان معادل ۰/۲۵ و وسط طول و عمق (x=y=۰/۵) سرعت‌های طولی و عمقی به ترتیب حدود ۵۶/۲ و ۹۶/۵ درصد کاهش می‌یابند. با ۵ برابر شدن زمان (از زمان معادل ۰/۱ به ۰/۵) برای لزجت ۰/۱ و وسط طول و عمق سرعت‌های طولی و عمقی به ترتیب حدود ۲۱۵/۱ و ۱۸۷/۳ درصد کاهش می‌یابند. با کاهش لزجت، مکان هندسی سرعت‌های ماکزیمم طولی و عمقی در جهت عمقی به کف بستر نزدیک می‌شود و در جهت طولی مکان هندسی سرعت ماکزیمم طولی به سمت انتهای مقطع و برای سرعت ماکزیمم عمقی به سمت ابتدای مقطع متمایل می‌شود. با افزایش زمان، مکان هندسی سرعت‌های ماکزیمم طولی و عمقی در جهت عمقی به کف بستر نزدیک می‌شود و در جهت طولی مکان هندسی سرعت ماکزیمم طولی و عمقی به سمت انتهای مقطع متمایل می‌شود. در بعضی مکان‌ها خصوصاً لایه‌های نزدیک بستر، سرعت عمقی منفی (جریان رو به بالا) مشاهده شد که نشان‌دهنده‌ی معلق بودن ذرات می‌باشد.

منابع

1) Abdou M.A. and Soliman A.A. (2005) Variational iteration method for solving Burger's and coupled Burger's equations. J. comp. Appl. Math. 181, 245-251.

2) Albeverio,S. Korshunova A. and Rozanova O. (1979) A probabilistic model associated with the pressureless gas dynamics. Bull. Sci. math. 137 351 -365.

3) Arora G. and Singh B.K. (2013) Numerical solution of Burgers’ equation with modified cubic B-spline differential quadrature method. Applied Mathematics and Computation 224, 166-177.

4) Arminjon P. and Beauchamp, C. (1979) Numerical Solution of Burgers’ equations in two space dimensions. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 19, 351-365.

5) Bateman, H. (1915) Some recent researches on the motion of fluids. Monthly Weather Rev. 43, 163-170.

6) Burger, J.M. (1948) A Mathematical Model Illustrating the Theory of Turbulence. Adv. in Appl. Mech. I, Academic Press, 171 -199.

7) Burgers, J.M. (1939) Mathematical examples illustrating relations occurring in the theory of turbulent fluid motion. Trans. R. Neth. Acad. Sci. 17, 1-53.

8) Diaz J.E., Ramirez J. and Villa J. (2011) The numerical solution of a generalized Burgers–Huxley equation through a conditionally bounded and symmetry-preserving method. Computers & Mathematics with Applications 61, 3330-3342.

9) Haq, S. Islam S. and Uddin M. (2009) A mesh-free method for the numerical solution of the KdV–Burgers equation. Applied Mathematical Modelling 33, 3442-3449.

10) Khater, A.H. Temsah R.S. and Hassan M.M. (2008) A Chebyshev spectral collocation method for solving Burgers’-type equations. Journal of Computational and Applied Mathematics 222, 333-350.
11) Kofman L. and Rage A.C. (1992) Modeling structures of knots in jet flows with the Burgers equation. Astrophys. J. 390, 359–364.
12) Rady A.S., Osman E.S. and Khalfallah M. (2010) Multi-soliton solution, rational solution of the Boussinesq–Burgers equations. commun. nonlinear sci. numer. simulat. 15, 1172-1176.
13) Rizun, V.I. and Engel’Brekht, Iu. K. (1975) Application of the Burgers’equation with a variable coefficient to the study of nonplanar wave transients. PMM Vol39, Ng3, 551-554.
14) Shu C. and Richards B.E. (1992) Application of generalized differential quadrature to solve two-dimensional incompressible Navier-Stoks equation. Numerical Methods in Fluids 15, 791 -798.
15) Shukla H.S., Tamsir M., Srivastava K. and Kumar J. (2016) Numerical solution of two dimensional coupled viscous Burger equation using modified cubic B-spline differential quadrature method. AIP Advances 4, 117-134.
16) Tasmir M. and Sirvastava V.K. (2011) A semi-implicit finite-difference approach for two-dimensional coupled Burgers’ equations. In. J. Sci. & Eng. Res. 2, 46-49.
17) Vaghefi M., rahideh H., M.R. Golbahar Haghighi and A.K. khaksar (2012) Distributed Approximating Functional Approach to Burgers’ Equation using Element Differential Quadrature Method. J.Appl. Sci. Environ. Manage. 16, 143-149.
18) Watanabe,S. Ishiwata,S. Kawamura K. and Oh H.G. (1997) Higher order solution of nonlinear waves. II. Shock wave described by Burgers equation. J. Phys. Soc. Jpn. 66 984–987.
19) Wazwaz A.M. (2014) A study on a (2+ 1)-diensional and a (3+ 1)-dimensional generalized Burgers equation. Applied Mathematics Letters 31, 41-45.
20) Wei G.W., Zhang D.S., Kouri D.J. and Hoffman D.K. (1998) Distributed approximating Functional approach to Burgers’ equation in one and two space dimentions. Computer Physics Communications 111, 93 - 109.
21) Zaki, S.I. (2000) A quintic B-spline finite elements scheme for the KdVB equation. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 188, 121-134.
22) Zhanlav, T. Chuluunbaatar O. and Ulziibayar V. (2015) Higher-order accurate numerical solution of unsteady Burgers’ equation. Applied Mathematics and Computation 250, 701-707.
23) Zheng,Q. Zhao X. and Liu Y. (2017) A novel finite difference scheme for Burgers' equation on unbounded domains. Applied Numerical Mathematics 111, 1-16.