

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال یازدهم، شماره پنجاه و ششم، مهر و آبان ۱۴۰۴

شماره شاپا: ۵۸۸۸-۲۵۸۸



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

روش موجک هار برای حل مدل‌های رشد تومورهای سرطانی

سمیه بلوچ اربابی^۱، مهدیه تهامی^{۲*}

(^۱ و ^۲) گروه ریاضی، دانشکده علوم، واحد کرمان، دانشگاه آزاد اسلامی، کرمان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۳/۰۲/۰۴ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۳/۰۶/۱۹

چکیده

در این مقاله، دو مدل مختلف ریاضی برای رشد تومورهای سرطانی در نظر گرفته می‌شوند. در مدل اول نرخ خالص زوال سلول‌های سرطانی تنها وابسته به زمان است ولی مدل دوم به گونه‌ای است که نرخ زوال سلول‌های سرطانی فقط وابسته به تمرکز سلول‌ها می‌باشد. در این مقاله، حل عددی هر دو مدل با کمک روش موجک هار ارائه می‌شود. همچنین نشان داده می‌شود روش موجک هار یک روش همگرا با همگرایی مرتبه ۲ می‌باشد. در این تحقیق، با نرم‌افزار میپل و محاسبات سمبلیک، نشان داده می‌شود که روش موجک هار را می‌توان برای طیف وسیعی از مدل‌های اپیدمی به کار گرفت. همچنین شکل‌های ۱ و ۲ نشان‌دهنده آن هستند که نتایج عددی ارائه شده در بازه‌هایی از زمان به واقعیت نزدیک‌تر هستند. این نتیجه بسیار مهم با نتایج شی و همکاران [۱۹]، کاملاً مطابقت داشته و نشان‌دهنده کارایی روش موجک هار می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: موجک هار، مدل رشد تومور، حل عددی، نرخ زوال.

۱- مقدمه

یکی از خواسته‌های مهم محققان سرطان، ایجاد و گسترش مدل‌های ریاضی رشد تومورها می‌باشد. یافتن این مدل‌ها نه تنها برای محققان پزشکی بلکه برای ریاضیدانان نیز از اهمیت بالایی برخوردار است. در مراجع [5-1]، می‌توان مثال‌های متنوعی از این دسته از مدل‌ها را دید. در [5]، برگس و همکاران، ارتباط میان نرخ رشد و ضریب انتشار در مدل ریاضی سه بعدی گلیوماس را بررسی کرده‌اند. آنها یک مدل مبتنی بر انتشار را معرفی کردند که شامل یک تومور کروی با نرخ گسترش (p) و نرخ زوال (k) می‌باشد.

این مدل به صورت معادله زیر توصیف می‌شود [2].

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = D \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) + Pu(x, t) - ku(x, t), \quad (1)$$

که در آن $u(x, t)$ ، غلظت سلول‌های سرطانی در مکان x و زمان t را نشان داده و D ضریب انتشار می‌باشد. حالت یک بعدی این مدل با متغیر نرخ زوال $k(x, t)$ ، به صورت زیر می‌باشد

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - k(x, t)u(x, t) - \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 0, \quad (2)$$

که در آن $k(x, t)$ ، نقش زمانی درمان را در حذف سلول‌های سرطانی نشان می‌دهد. باید دقت کنیم که $k(x, t)$ می‌تواند تابعی هم بر حسب مکان و هم بر حسب زمان باشد و نیازی نیست که لزوماً ثابت و یا فقط بر حسب زمان باشد. علی و همکاران [3] این مدل را در مختصات کروی مطالعه کردند و فرض کردند که هر دو ضریب انتشار و نرخ زوال، تابعی از غلظت سلول‌های توموری هستند. همچنین، بخاری و همکاران، این مدل و نظارت بر آن را برای موارد مختلفی مورد بررسی قرار دادند، از مدل ساده‌ای برای تقارن شعاعی تا مدل بدون تقارن شعاعی که در آن نرخ زوال سلول‌های سرطانی وابسته به غلظت سلول‌ها است [4].

در این مقاله، دو مدل متفاوت نرخ زوال در نظر گرفته می‌شود. در مدل اول، نرخ خالص زوال سلول‌های سرطانی فقط وابسته به زمان بوده و به صورت زیر است

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + t^2 u(x, t) = 0 \\ u(x, 0) = e^{kx} \end{cases} \quad (3)$$

در مدل دوم، نرخ خالص زوال سلول‌های سرطانی وابسته به غلظت سلول‌ها بوده و به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + u^2(x, t) = 0 \\ u(x, 0) = x^p \end{cases} \quad (4)$$

در این مقاله با کمک نرم‌افزار میپل ۲۰۱۹ جواب‌های عددی دو مدل فوق با روش موجک هار محاسبه می‌شوند. در قسمت ۲، مروری بر موجک هار داشته و انتگرال موجک‌ها و تقریب توابع با کمک آنها را بیان می‌کنیم. در قسمت ۳، روش موجک هار برای حل مدل‌های رشد تومورهای سرطانی ارائه می‌شود. همگرایی روش موجک هار در قسمت ۴ بیان شده و در پایان، نتایج را در قسمت ۵ بیان می‌کنیم.

۲- موجک هار

یکی از ساده‌ترین نوع موجک، موجک هار می‌باشد. این موجک را می‌توان به عنوان حالت خاص موجک دوبشی از مرتبه اول در نظر گرفت. توابع هار اولین بار در سال ۱۹۰۹ توسط ریاضیدان مجارستانی، آلفرد هار، معرفی شدند. در سال‌های اخیر، موجک هار به عنوان یک ابزار ریاضی قدرتمند در حل معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی در زمینه‌های مختلف از جمله مهندسی، فیزیک، شیمی، مهندسی مکانیک، فیزیک پلیمر، مکانیک، مکانیک سیالات، نور و لیزر و مکانیک کوانتوم، کاربرد گسترده‌ای پیدا کرده است [6-18]. هاریهاران روش موجک هار را برای حل معادله کلاین-گوردون و معادله سینوسی گوردون [6]، معادله کان-

آلن [7] و معادله فیشر [8] معرفی کرد. عزیز و همکاران موجک هار را جهت حل معادلات انتگرالی نوع اول و دوم فردهلم، ولترا و فردهلم-ولترا غیرخطی دویعدی به کار گرفتند [9]. اسلام و همکاران، حل عددی معادلات انتگرالی غیرخطی و معادلات انتگرال-مشتقی مرتبه اول و مراتب بالاتر را ارائه دادند [10]. عزیز و اسلام، جواب‌هایی برای معادلات انتگرالی غیرخطی فردهلم و ولترا را با استفاده از موجک هار بیان کردند [11]. برای مطالعه بیشتر می‌توان به مراجع [12-18] مراجعه نمود.

برای $x \in [0,1]$ خانواده موجک هار $\{h_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم که در آن $h_i(x) = \psi_{j,k}(x) = \psi(2^j x - k)$

تابع ψ موجک مادر هار است [9]. بنابراین

$$h_1(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5)$$

و

$$h_i(x) = \begin{cases} 1 & x \in [\varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ -1 & x \in [\varepsilon_2, \varepsilon_3) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

به طوری که $\varepsilon_1 = \frac{k}{m}$ ، $\varepsilon_2 = \frac{k+0.5}{m}$ ، $\varepsilon_3 = \frac{k+1}{m}$ و $m = 2^j$ برای $j = 1, 2, \dots, J$. عدد صحیح J را سطح موجک و $k = 0, 1, \dots, m-1$ را پارامتر انتقال می‌نامیم [12]. شاخص i نیز از رابطه $i = k + m + 1$ ، به دست می‌آید. هر تابع انتگرال پذیر $u(x) \in L^2([0,1])$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i h_i(x) \quad (6)$$

که در آن ضرایب a_i به صورت زیر محاسبه می‌شوند

$$a_i = 2^j \int_0^1 u(x) h_i(x) dx \quad (7)$$

عدد صحیح J را ماکزیمم سطح وضوح نامیده و قرار می‌دهیم $M = 2^J$. بنابراین هر تابع انتگرال‌پذیر مربعی $u(x)$ تعریف شده روی $[0,1]$ ، می‌تواند با یک مجموع متناهی از موجک‌های هار به صورت زیر تقریب زده شود

$$u(x) = \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x) \quad (8)$$

حال برای هر $i > 1$ ، نمادهای زیر را تعریف می‌کنیم

$$P_{i,1}(x) = \int_0^x h_i(x) dx, \quad (9)$$

$$P_{i,n+1}(x) = \int_0^x P_{i,n} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (10)$$

با کمک معادلات (۵)، (۹) و (۱۰) داریم

$$P_{i,1}(x) = \begin{cases} x - \varepsilon_1 & x \in [\varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ \varepsilon_3 - x & x \in [\varepsilon_2, \varepsilon_3) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (11)$$

و

$$P_{i,n}(x) = \begin{cases} 0 & x < \varepsilon_1 \\ \frac{(x - \varepsilon_1)^n}{n!} & x \in [\varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ \frac{(x - \varepsilon_1)^n}{n!} - 2 \frac{(x - \varepsilon_2)^n}{n!} & x \in [\varepsilon_2, \varepsilon_3) \\ \frac{(x - \varepsilon_1)^n}{n!} - 2 \frac{(x - \varepsilon_2)^n}{n!} + \frac{(x - \varepsilon_3)^n}{n!} & x > \varepsilon_3 \end{cases}$$

برای تقریب موجک هار یک تابع $u(x)$ با متغیر $x \in [0,1]$ بازه $[0,1]$ را با کمک نقاط هم محلی

$$x_m = \frac{m-0.5}{2M}, \quad m = 1, 2, \dots, 2M \quad (13)$$

به بازه‌هایی با طول $2M$ تقسیم می‌کنیم. با جایگزین کردن این نقاط هم محلی در (۸)، سیستم خطی از معادلات جبری به صورت زیر حاصل می‌شود

$$u(x_m) = \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x_m), \quad m = 1, 2, \dots, 2M \quad (14)$$

که در آن باید ضرایب موجکی a_i محاسبه شوند.

۳- کاربردهای عددی

در این قسمت جواب‌های عددی مدل‌های تومورهای سرطانی در مرجع [19] به کمک موجک هار ارائه می‌شوند.

۳-۱ کاربرد روش موجک هار در مدل اول

این مدل زمانی اتفاق می‌افتد که نرخ خالص از بین رفتن سلول‌های سرطانی فقط وابسته به زمان است. معادله

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + t^2 u(x, t) = 0 \quad (15)$$

با شرایط اولیه و مرزی

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x) = e^x, & \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) = e^x \\ u(0, t) = \varphi(t) = e^{t-\frac{t^3}{3}}, & \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \psi(t) = e^{t-\frac{t^3}{3}} \end{cases} \quad (16)$$

را در نظر بگیرید. فرض کنید

$$u''(x, t) = \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x) \quad (17)$$

که در آن نقطه و پریم به ترتیب نشان‌دهنده مشتق‌گیری نسبت به t و x است. بردار سطری a_i ، $i = 1, 2, \dots, 2M$ ضرایب هار هستند که باید محاسبه شوند. با انتگرال‌گیری از معادله (۱۷) نسبت به t از t_s تا t ، خواهیم داشت

$$u''(x, t) = (t - t_s) \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x) + u''(x, t_s) \quad (18)$$

که در آن t_s زمان اولیه می‌باشد. حال با انتگرال‌گیری از (۱۸) نسبت به x از 0 تا x ، خواهیم داشت

$$u'(x, t) = (t - t_s) \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,1}(x) + u'(x, t_s) - u'(0, t_s) + u'(0, t) \quad (19)$$

مجدداً با انتگرال‌گیری از (۱۹) نسبت به x خواهیم داشت

$$u(x, t) = (t - t_s) \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x) + u(x, t_s) + x(u'(0, t) - u'(0, t_s) + u(0, t) - u(0, t_s)). \quad (20)$$

حال با مشتق‌گیری از (۲۰) نسبت به t ، رابطه زیر حاصل می‌شود

$$u'(x, t) = \sum_{i=1}^{2M} a_i P'_{i,2}(x) + x u'(0, t) + u(0, t) \quad (21)$$

با فرض آنکه در معادله (۱۵)، $x \rightarrow x_l$ و $t \rightarrow t_{s+1}$ و با قراردادن شرایط (۱۶) در معادلات (۱۸)–(۲۱) و با کمک نماد $\Delta t = t_{s+1} - t_s$ داریم

$$u''(x_l, t_{s+1}) = \Delta t \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x_l) + f''(x_l) \quad (22)$$

$$u'(x_l, t_{s+1}) = \Delta t \sum_{i=1}^{2M} a_i P'_{i,1}(x_l) + f'(x_l) + \psi(t_{s+1}) - \psi(t_s) \quad (23)$$

$$u(x_l, t_{s+1}) = \Delta t \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x_l) + f(x_l) + x_l(\psi(t_{s+1}) - \psi(t_s)) + \varphi(t_{s+1}) - \varphi(t_s) \quad (24)$$

$$u'(x_l, t_{s+1}) = \sum_{i=1}^{2M} a_i(x_l) + x_l \psi'(t_{s+1}) + \psi(t_{s+1}). \quad (25)$$

حال با فرض $x \rightarrow x_l$ و $t \rightarrow t_{s+1}$ ، در معادله (۱۵)، داریم.

$$u(x_l, t_{s+1}) - u''(x_l, t_{s+1}) + t^2 u(x_l, t_{s+1}) = 0. \quad (26)$$

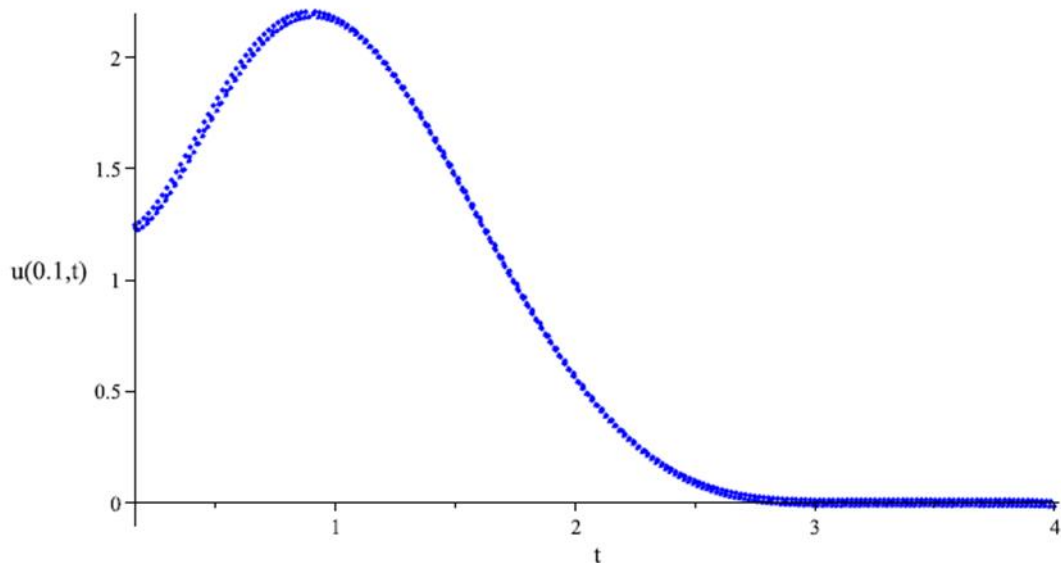
با قرار دادن معادلات (۲۲)–(۲۵) در معادله (۲۶) و با جایگذاری نقاط هم محلی $x_m = \frac{m-0.5}{2M}$ ، $m = 1, 2, \dots, 2M$ خواهیم داشت

$$\sum_{i=1}^{2M} a_i (P_{i,2}(x_l) - \Delta t h_i(x_l) + t^2 \Delta t P_{i,2}(x_l)) + x_l \psi'(t_{s+1}) + \psi(t_{s+1}) - f''(x_l) + t^2 (f(x_l) + x_l(\psi(t_{s+1}) - \psi(t_s)) + \varphi(t_{s+1}) - \varphi(t_s)) = 0 \quad (27)$$

دستگاه بالا یک دستگاه جبری بوده که با حل آن ضرایب موجکی حاصل می‌شوند. با قرار دادن ضرایب موجکی $a_s(i)$ در معادله (۲۰)، جواب عددی مدل اول به دست می‌آید.

x	$t = 0.1$	$t = 0.5$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
0.01	1.222008	1.6063408	1.9784076	0.5215016	0.0025165
0.1	1.2324970	1.7642246	2.1728690	0.5727619	0.0027539
0.2	1.3536309	1.9376245	2.3865014	0.6291407	0.0029948
0.3	1.4866612	2.1280624	2.6213178	0.6913192	0.0031946
0.4	1.6327463	2.3372079	2.8796091	0.7601614	0.0032738
0.5	1.8500398	2.6483601	3.2650568	0.8642118	0.0029683
0.6	2.0317163	2.9085891	3.5888355	0.9532259	0.0005891
0.7	2.2311429	3.1943524	3.9461667	1.0535450	0.0004010
0.8	2.4500152	3.5081444	4.3409666	1.1672804	0.0002200
0.9	2.6901776	3.8527016	4.7776546	1.2969975	0.0001750
1	2.9536326	4.2310260	5.2612156	1.4458097	0.0001382

جدول ۱- حل عددی مدل اول



شکل ۱- نمودار حل عددی مدل اول

در شکل (۱) با توجه به نقش درمانی تابع $k(x, t)$ در معادله (۲) که نشان‌دهنده نرخ زوال در مدل رشد تومور می‌باشد با گذشت زمان و طی شدن دوره درمان مشاهده می‌شود که تعداد سلول‌های سرطانی به صفر می‌رسد. در جدول (۱) نیز با بررسی هر سطر از جدول می‌توان نتیجه گرفت که با گذشت زمان برای مقادیر مختلف x تعداد سلول‌های سرطانی کمتر می‌شود و به صفر نزدیک می‌شوند.

۳-۲ کاربرد روش موجک هار در مدل دوم

در این قسمت، مدلی که در آن نرخ خالص از بین رفتن سلول‌های سرطانی فقط وابسته به تمرکز سلول‌ها می‌باشد را در نظر می‌گیریم. معادله

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + u^2(x, t) = 0 \quad (28)$$

با شرایط اولیه و مرزی

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x) = x^2 \\ u(0, t) = \varphi(t) = -2t \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) = -2 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \psi(t) = 0 \end{cases} \quad (29)$$

حال فرض کنید

$$u''(x, t) = \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x) \quad (30)$$

که در آن نقطه و پریم به ترتیب نشان‌دهنده مشتق نسبت به x و t است. بردار سطری a_i ، $i = 1, 2, \dots, 2M$ ضرایب مجهول هار هستند.

حال با انتگرال‌گیری از معادله (۳۰) نسبت به t از t_s تا t ، خواهیم داشت

$$u''(x, t) = (t - t_s) \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x) + u''(x, t_s) \quad (31)$$

که در آن t_s زمان اولیه و $\Delta t = t - t_s$ بازه اولیه می‌باشد. حال با انتگرال‌گیری از (۳۱) نسبت به x از 0 تا x ، خواهیم داشت

$$u'(x, t) = (t - t_s) \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,1}(x) + u'(x, t_s) - u'(0, t_s) + u'(0, t) \quad (32)$$

و مجدداً با انتگرال‌گیری از معادله (۳۲) نسبت به x ، به دست می‌آوریم

$$u(x, t) = (t - t_s) \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x) + u(x, t_s) + x(u'(0, t) - u'(0, t_s)) + u(0, t) - u(0, t_s). \quad (33)$$

مشتق‌گیری از معادله (۳۳) نسبت به t ، منجر به معادله زیر خواهد شد

$$\dot{u}(x, t) = \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x) + x\dot{u}'(0, t) + \dot{u}(0, t). \quad (34)$$

با فرض آنکه $x \rightarrow x_l$ و $t \rightarrow t_{s+1}$ و جایگذاری شرایط اولیه (۲۹) در معادلات (۳۱)-(۳۴) و با استفاده از نماد $\Delta t = t_{s+1} - t_s$ داریم

$$u''(x_l, t_{s+1}) = \Delta t \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x_l) + u''(x_l, t_s) \quad (35)$$

$$u'(x_l, t_{s+1}) = \Delta t \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,1}(x_l) + u'(x_l, t_s) + \psi(t_{s+1}) - \psi(t_s) \quad (36)$$

$$u(x_l, t_{s+1}) = \Delta t \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x_l) + u(x_l, t_s) + x_l(\psi(t_{s+1}) - \psi(t_s)) + \varphi(t_{s+1}) - \varphi(t_s) \quad (37)$$

$$\dot{u}(x_l, t_{s+1}) = \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x_l) + x_l \dot{\psi}(t_{s+1}) + \dot{\psi}(t_{s+1}). \quad (38)$$

حال با کمک روش شبه خطی‌سازی، معادله غیرخطی (۳۸) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\dot{u}(x_l, t_{s+1}) - u''(x_l, t_{s+1}) + \frac{2}{x} u'(x_l, t_{s+1}) + 2u(x_l, t_s)u(x_l, t_{s+1}) - u^2(x_l, t_s) = 0 \quad (39)$$

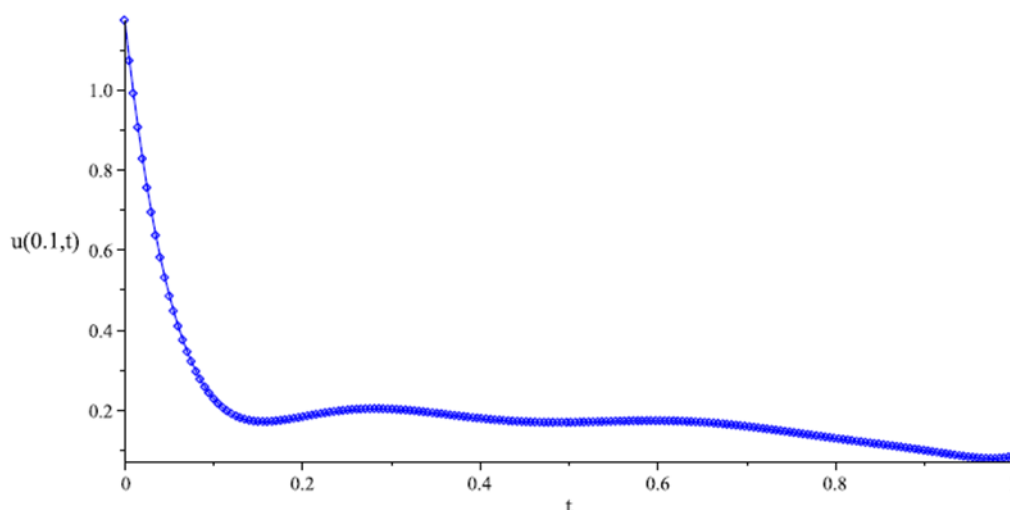
با جایگذاری معادلات (۳۵)-(۳۷) در معادله (۳۹) و با جایگذاری نقاط هم محلی (۱۳)، یک دستگاه خطی از معادلات جبری به صورت زیر حاصل می‌شود که جواب‌های آن، ضرایب موجکی a_i می‌باشند

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2M} a_i \left(P_{i,2}(x_l) - \Delta t h_i(x_l) + \frac{2}{x} \Delta t P_{i,1}(x_l) + 2x^2 \Delta t P_{i,2}(x_l) \right) + x_l \dot{\psi}(t_{s+1}) + \dot{\psi}(t_{s+1}) \\ - u''(x_l, t_s) + \frac{2}{x} (u'(x_l, t_s) + \psi(t_{s+1}) - \psi(t_s)) + 2x^2 (u(x_l, t_s) + x_l(\psi(t_{s+1}) - \psi(t_s)) + \varphi(t_{s+1}) - \varphi(t_s)) = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

سرانجام با قرار دادن مقادیر a_i در معادله (۳۳)، جواب عددی حالت دوم حاصل می‌شود.

x	$t = 0.01$	$t = 0.05$	$t = 0.1$	$t = 0.5$
0.01	0.9997550	0.0997558	0.1997558	0.1197558
0.1	0.9880999	0.4880514	0.2285633	0.1880433
0.2	0.9595607	0.5882172	0.2589038	0.1124418
0.3	0.9156825	0.6806292	0.2012626	0.1122442
0.4	0.8589456	0.5144340	0.3971210	0.1132376
0.5	0.6452661	0.5623752	0.2388401	0.1976937
0.6	0.5502817	0.2644930	0.1875591	0.1597766
0.7	0.4729094	0.3821800	0.2698020	0.1607776
0.8	0.6138270	0.5146951	0.3940768	0.1743772
0.9	0.7751857	0.6610897	0.5284988	0.1308114
1	0.9633319	0.8201032	0.6706309	0.2224861

جدول ۲- حل عددی مدل دوم



شکل ۲- حل عددی مدل دوم

در شکل (۲) مشاهده می‌شود که تعداد سلول‌های سرطانی با طی دوره درمان به صفر می‌رسد. در جدول (۲) نیز با بررسی هر سطر از جدول می‌توان نتیجه گرفت که برای مقادیر $0.1 \leq x \leq 1$ ، با گذشت زمان تعداد سلول‌های سرطانی به صفر نزدیک می‌شوند.

۴- همگرایی روش

روش به کار گرفته شده در این مقاله برای حل مدل‌های رشد تومورهای سرطانی، همگرا بوده و مرتبه همگرایی آن ۲ می‌باشد که در زیر به بررسی این مطلب می‌پردازیم [12].

قضیه ۴-۱: فرض کنیم تابع $u(x, t)$ روی $[0, 1) \times [0, 1)$ و نسبت به متغیر اول در شرط لیپ-شیتس صدق کند، یعنی عدد مثبت L به گونه‌ای موجود باشد که برای هر $(x_1, t), (x_2, t) \in [0, 1) \times [0, 1)$ داشته باشیم $|u(x_1, t) - u(x_2, t)| \leq L|x_1 - x_2|$. آنگاه روش هار یک روش همگرا از مرتبه ۲ است. یعنی

$$\|e_M(x, t)\|_2 \leq \frac{L}{\sqrt{3}} \frac{1}{M^2}$$

که در آن $e_M(x, t) = u(x, t) - u_M(x, t)$ و $u_M(x, t)$ تقریب u با استفاده از موجک هار می‌باشد.

اثبات: فرض کنید t ثابت بوده و $u_M(x, t) = \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x)$ تقریبی برای u باشد. آنگاه

$$e_M(x, t) = u(x, t) - u_M(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_s(i) h_i(x) - \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x) = \sum_{i=2M+1}^{\infty} a_i h_i(x)$$

که در آن

$$a_i = 2^i \int_0^1 u(x, t) h_i(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, 2M$$

حال با توجه به متعامد بودن خانواده هار روی بازه $[0, 1]$ ، داریم

$$\begin{aligned} \|e_M(x, t)\|_2^2 &= \int_0^1 \left(\sum_{i=2M+1}^{\infty} a_i h_i(x) \right)^2 dx = \int_0^1 \left(\sum_{i=2M+1}^{\infty} a_i h_i(x) \right) \left(\sum_{k=2M+1}^{\infty} a_k h_k(x) \right) dx \\ &= \sum_{i=2M+1}^{\infty} \sum_{k=2M+1}^{\infty} a_i a_k \left(\int_0^1 h_i(x) h_k(x) dx \right) = \frac{1}{M} \sum_{i=2M+1}^{\infty} (a_i)^2 \end{aligned}$$

همچنین داریم

$$\langle u(x, t), h_i(x) \rangle = \int_0^1 u(x, t) h_i(x) dx = \int_{\frac{k}{m}}^{\frac{k+0.5}{m}} u(x, t) dx - \int_{\frac{k+0.5}{m}}^{\frac{k+1}{m}} u(x, t) dx.$$

با استفاده از قضیه مقدار میانگین ثابت‌های $x_1 \in [\frac{k}{m}, \frac{k+0.5}{m}]$ و $x_2 \in [\frac{k+0.5}{m}, \frac{k+1}{m}]$ به گونه‌ای موجودند که

$$\begin{aligned} \int_0^1 u(x, t) dx &= \left(\frac{k+0.5}{m} - \frac{k}{m} \right) u(x_1, t), \\ \int_0^1 u(x, t) dx &= \left(\frac{k+1}{m} - \frac{k+0.5}{m} \right) u(x_2, t). \end{aligned}$$

لذا

$$\langle u(x, t), h_i(x) \rangle = \frac{1}{2M} (u(x_1, t) - u(x_2, t)).$$

حال با شرط لیپ-شیتس داریم

$$|a_i| = \frac{1}{2M} |u(x_1, t) - u(x_2, t)| \leq \frac{1}{2M} L |x_1 - x_2| = \frac{1}{2m} \frac{L}{m}.$$

که در آن $M = 2^j$. لذا $(a_i)^2 \leq \frac{L^2}{M^2} \frac{1}{2^{j+2}}$.

با قرار دادن داریم

$$\begin{aligned} \|e_M(x, t)\|_2^2 &= \sum_{i=2M+1}^{\infty} (a_i)^2 \frac{1}{M} \leq \sum_{i=2M+1}^{\infty} \frac{L^2}{M^2} \frac{1}{2^{3j+2}} = \frac{L^2}{M^2} \sum_{j=J+1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{2^j-1} \frac{1}{2^{3j+2}} \right) \\ &= \frac{L^2}{M^2} \sum_{j=J+1}^{\infty} \frac{1}{2^{2j+2}} = \frac{L^2}{M^2} \frac{1}{3M^2} = \frac{L^2}{3M^4} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\|e_M(x, t)\|_2 \leq \frac{L}{\sqrt{3M^2}}.$$

چون $\lim_{M \rightarrow \infty} e_M(x, t) = 0$ ، لذا این روش همگرا از مرتبه ۲ می‌باشد.

۵- نتیجه

در این تحقیق، حل عددی دو مدل متفاوت تومورهای سرطانی محاسبه گردیدند. حل عددی مدل اول به ازای مقادیر مختلف t ، در جدول ۱ و حل عددی مدل دوم به ازای مقادیر مختلف t ، در جدول ۲ ارائه گردیده‌اند. شکل ۱ نشان‌دهنده جواب $u(x, t)$ مدل اول به ازای $x = 0.1$ و $0 \leq t \leq 4$ می‌باشد. با توجه به این شکل، نرخ خالص زوال رو به افزایش است. همچنین جواب‌های به دست آمده با جواب‌های ارائه شده در [19] کاملاً همخوانی دارند. در جدول ۱، جواب‌های حاصل از روش موجک هار به ازای مقادیر مختلف t ارائه شده که با جواب‌های تقریبی محاسبه شده در [19] همخوانی دارند. جواب‌های تقریبی مدل دوم به ازای مقادیر مختلف t در جدول ۲ آورده شده است. شکل ۲ نیز نشان‌دهنده جواب $u(x, t)$ مدل دوم به ازای $0 \leq t \leq 1$ رسم شده است. در پایان می‌توان گفت که روش موجک هار یکی از روش‌های قدرتمند جهت حل مدل‌های متنوع اپیدمی می‌باشد.

فهرست منابع

- [1] J.A. Adam, A mathematical model of tumor growth by diffusion, *Math. Comput. Modelling*, 11 (1988) 456-455
- [2] J.A. Adam, A simplified mathematical model of tumor growth. *Math. Biosci.*, 81 (1986) 229-244
- [3] S.M. Ali, A.H. Bokhari, M. Yousuf and F.D. Zaman, A spherically symmetric model for the tumor growth, *J. Appl. Math.*, 726837 (2014)
- [4] A.H. Bokhari, A.H. Kara and F.D. Zaman. On the solutions and conservation laws of the model for tumor growth in the brain, *J. Math. Anal. Appl.*, 350(2009) 256-261
- [5] P.K. Burgess, P.M. Kulesa, J.D. Murray and E.C. Alroid. The interaction of growth rates and diffusion coefficients in a three dimensional mathematical model of gliomas. *J. Neuropath Exp. Neur.*, 56 (1997) 704-713
- [6] G. Hariharan, Haar wavelet method for solving the Klein-Gordon and the sine-Gordon equations, *Int. J. Nonlinear Sci.*, 1 (2011) 180-189
- [7] G. Hariharan, Haar wavelet method for solving Cahn-Allen equation, *Appl. Math. Sci.*, 3 (2009) 2523-2533
- [8] G. Hariharan, K. Kannan, K.R. Sharma, Haar wavelet method for solving Fishers equation, *Appl. Math. Comput.*, 211 (2009) 284-292
- [9] I. Aziz, S.U. Islam, F. Khan, A new method based on Haar wavelet for the numerical solution of two-dimensional nonlinear integral equations, *J. Comput. Appl. Math.* 272 (2014) 70-80
- [10] S.U. Islam, I. Aziz, A.S. Al-Fhaid, An improved method based on Haar wavelets for numerical solution of nonlinear integral and integro-differential equations of first and higher orders, *J. Comput. Appl. Math.*, 260 (2014) 449-469
- [11] I. Aziz, S.U. Islam, New algorithms for the numerical solution of nonlinear Fredholm and Volterra integral equations using Haar wavelets, *J. Comput. Appl. Math.* 239 (2013) 333-345.
- [12] S. Arbabi, A. Nazari, M.T. Darvishi, A two-dimensional Haar wavelets method for solving systems of PDEs, *Appl. Math. Comput.*, 292 (2017) 33-46
- [13] E. Babolian, S. Bazm, P. Lima, Numerical solution of nonlinear two-dimensional integral equations using rationalized Haar functions, *Comm. Nonlin. Sci. Numer. Simmul.* 16 (2011) 1164-1175
- [14] A. Patra and S.S. Ray, Numerical simulation based on Haar wavelet operational method to solve neutron point kinetics equation involving sinusoidal and pulse reactivity. *Annals of Nuclear Energy*, 73 (2014) 408-412
- [15] A. Patra and S.S. Ray, Two-dimensional Haar wavelet collocation method for the solution of stationary neutron transport equation in a homogeneous isotropic medium. *Annals of Nuclear Energy*, 70 (2014) 30-35

- [16] S.S. Ray and A.K. Gupta, Comparative analysis of variational iteration method and Haar wavelet method for the numerical solutions of Burgers-Huxley and Huxley equations. *J. Math. Chemistry*, 52 (2014) 1066-1080
- [17] M. H. Reihani, Z. Abadi, Rationalized Haar functions method for solving Fredholm and Volterra integral equations, *J. Comp. Appl. Math.*, 200 (2013) 12-20
- [18] Z. Shi, Y. Cao, Q.J. Chen, Solving 2D and 3D Poisson equations and biharmonic equations by the Haar wavelet method, *Appl. Math. Model.*, 36 (2012) 5143-5161
- [19] O.S. Iyiola and F.D. Zaman. A fractional diffusion equation model for cancer tumor. *Aip Advances*, 4 (2014) 107-121