فصلنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک جامدات

www.jsme.iaukhsh.ac.ir

فصلنامه علمی پژوهشی مهندسی مکانیک جامدات

تحلیل ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای از مواد مدرج تابعی بر روی بستر ویسکوالاستیک تحت بارهای محوری و جانبی

احمد مامندی[۱،*]

* نویسنده مسئول: am_2001h@yahoo.com

چکیده

در این مقاله، تحلیل رفتار ارتعاشی غیرخطی پوسته استوانه‌ای ساخته شده از ماده مدرج تابعی با شرایط مرزی دو سر ساده تحت بارهای محوری فشاری و جانبی بر روی بستر ویسکوالاستیک مورد مطالعه قرار گرفته است. معادلات حاکم بر ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای بر اساس نظریه اصلاح شده پوسته دانل (Donnell) استخراج شده‌اند. سپس در تحلیل از روش گالرکین و فرض والمیر (Volmir) بهره گرفته شده است. برای حل عددی معادلات دیفرانسیل حاکم از روش رانگ-کوتای مرتبه چهارم با استفاده از نرم افزار MATLAB برای تعیین پاسخ دینامیکی پوسته شامل فرکانس‌های طبیعی خطی و غیرخطی، رابطه فرکانس-دامنه و جابجایی غیرخطی شعاعی پوسته استفاده شده است. اثر تغییر پارامترهای مختلف هندسی و فیزیکی مانند پیش بار محوری فشاری، بار جانبی، خواص ماده و ضرایب بستر ویسکوالاستیک در رفتار دینامیکی پوسته استوانه‌ای مورد بررسی و تحقیق قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی

ارتعاشات غیرخطی، پوسته استوانه‌ای FGM، نظریه دانل، بستر ویسکوالاستیک، بار محوری فشاری

تاریخ ارسال:	۱۳۹۴/۰۶/۱۷
تاریخ بازنگری:	۱۳۹۴/۰۸/۱۲
تاریخ پذیرش:	۱۳۹۴/۰۹/۰۲

۱- استادیار، گروه مهندسی مکانیک، واحد پرند، دانشگاه آزاد اسلامی، پرند، ایران.

Spring 2016/ vol. 9/ No. 1

Journal of
Solid Mechanics
in Engineering

Journal of

Solid Mechanics in Engineering

http://jsme.iaukhsh.ac.ir

Nonlinear Vibration Analysis of a Cylindrical FGM Shell on a Viscoelastic Foundation under the Action of Lateral and Compressive Axial Loads

Ahmad Mamandi[1,*]

* Corresponding Author: am_2001h@yahoo.com

Abstract:

In this paper, the nonlinear vibration analysis of a thin cylindrical shell made of Functionally Graded Material (FGM) resting on a nonlinear viscoelastic foundation under compressive axial and lateral loads is studied. Nonlinear governing coupled partial differential equations of motions (PDEs) for cylindrical shell are derived using improved Donnell shell theory. The equations of motions (EOMs) then are solved using the Galerkin method, Volmir's assumption and the forth-order Runge-Kutta method to obtain dynamic response of the shell including nonlinear frequencies, frequency-amplitude curves and nonlinear radial deflection for the shell of revolution. Afterward, the effect of changing the value of different parameters on the nonlinear dynamic response of the FGM cylindrical shell considering compressive axial and lateral loads, geometric characteristics of the shell, FGM material distribution along direction of the thickness of the shell and coefficients of the viscoelastic foundation are all investigated.

Key words:

Nonlinear vibration, Cylindrical FGM shell, Viscoelastic foundation, Compressive axial load

1- Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, Parand Branch, Islamic Azad University, Parand, Iran

۱- مقدمه

کاربرد و ساخت مواد مدرج تابعی (FGM[1]) برای نخستین بار توسط دانشمندان علم مواد در کشور ژاپن معرفی شد. در سال‌های اخیر کاربرد این مواد در سازه‌های مهندسی که در دماهای بالا مورد استفاده قرار می‌گیرند توسعه داده شده است. این مواد که ترکیبی از سرامیک و فلز هستند برتری زیادی از نظر مقاومت در برابر حرارت، بارهای مکانیکی و خوردگی نسبت به دیگر مواد مانند مواد مرسوم مهندسی و کامپوزیت‌ها ایجاد کرده و در نتیجه، استفاده از آنها در سازه‌های مهندسی مانند پوسته‌های استوانه‌ای مورد توجه بسیار قرار گرفته است. پوسته‌های استوانه‌ای ساخته شده از مواد FG در صنایع هوافضایی و نظامی مانند بعضی قطعات توربین‌های گازی، موشک‌ها، راکت‌ها و دیگر ماشین‌های مکانیکی کاربرد دارند.

مطالعات مهندسی و دانشگاهی بر روی ارتعاش پوسته استوانه‌ای بسیار گسترده می‌باشد. این مطالعات به صورت عمده بر روی پوسته‌های همسانگرد و کامپوزیتی می‌باشند ([۱-۴] را ببینید). در [۵]، توسط سودل رابطه‌ای برای فرکانس طبیعی پوسته‌های استوانه‌ای دوار با بهره‌گیری از روش قیاس با تیر برای شرایط مرزی مختلف ارائه شده است. نتایج به‌دست آمده از تحلیل تطابق خوبی با نتایج داده‌های آزمایشگاهی در شرایط مرزی مختلف دارد. لوی و همکارانش [۶] ارتعاش پوسته استوانه‌ای تقویت شده با رینگ‌هایی که در طول پوسته قرار گرفته‌اند را بررسی نموده‌اند. معادلات حاکم با استفاده از تابع انرژی بر اساس روش ریتز به‌دست آمده‌اند. تاثیر موقعیت رینگ‌های تقویتی و شرایط مرزی بر مشخصات فرکانسی سیستم بررسی شده و نتایج با منابع دیگر صحت سنجی شده‌اند. در [۷]، تحلیل ارتعاشات آزاد غیرخطی پوسته استوانه‌ای همسانگرد با پیش بار بر روی بستر وینکلر و پسترناک توسط بختیاری نژاد و همکارانش مورد بررسی قرار گرفته است. معادلات حاکم بر اساس نظریه ساندرز-کویتر به‌دست آمده است. از تئوری اغتشاشات برای به‌دست آوردن رابطه میان دامنه ارتعاش و فرکانس غیرخطی بهره گرفته شده است. تحلیل ارتعاشات دامنه بزرگ پوسته استوانه‌ای همسانگرد بر روی بستر پسترناک با استفاده از معادله انرژی اصلاح شده توسط پالیوال [۸] انجام شده است. نتایج به‌دست آمده بیانگر آن است که تغییرات بزرگ در مقادیر پارامترهای تابع بدون بعد شده، تاثیر قابل توجهی بر رابطه دامنه- فرکانس ارتعاشات ندارد.

در طی دو دهه گذشته تحقیقات گسترده‌ای نیز بر روی ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای FGM صورت گرفته است. اثر شرایط مرزی مختلف و کسر حجمی بر روی فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای FG به‌طوریکه خواص ماده FG با قانون توزیع توانی مشخص شده باشد توسط پرادهان و همکارانش [۹] انجام شده است. نتایج تحلیل نشان دهنده آن است که فرکانس طبیعی پوسته به شرایط مرزی و کسر حجمی مواد در ساختار FG وابسته است. روابط کرنش- تغییرمکان بر اساس نظریه پوسته لاو و همچنین معادلات حاکم با استفاده از روش ریلی محاسبه شده است. در [۱۰]، تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته استوانه ای FG توسط لوی و همکارانش بررسی شده است. در [۱۱]، تحلیل کمانش و ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای FGM با شرایط مرزی دو سر گیردار بر پایه خواص حرارتی ماده توسط راویکیریان و همکارانش ارائه شده است. در [۱۲]، حدادپور و همکارانش ارتعاش آزاد پوسته استوانه‌ای FGM با شرایط مرزی دو سر ساده با درنظر گرفتن اثرات حرارت را بررسی نموده‌اند. رفتار پساکمانشی پوسته استوانه‌ای از مواد FG تحت بار محوری فشاری که توسط بستر پسترناک و محیط

---
[1] Functionally Graded Material

گرمایی احاطه شده توسط شن [۱۳] مورد بررسی قرار گرفته است. برای استخراج معادلات حاکم از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه بالا (HSDT) و روابط کرنش-تغییرمکان فون‌کارمن بهره گرفته شده است. برای تحلیل رفتار پساکمانشی پوسته از روش تکینگی اغتشاشات استفاده شده است. نتایج به‌دست آمده نشان‌دهنده آن است که قید تک جهتی تاثیر بسیار مهمی بر پاسخ کمانشی پوسته زمانی که سفتی بستر بزرگ باشد دارد. پاسخی تحلیلی برای تعیین رفتار کمانشی پوسته استوانه‌ای FG تحت اعمال همزمان بار محوری و شعاعی فشاری که بر روی بستر پسترناک دو پارامتری قرار دارد توسط باقری‌زاده و همکارانش [۱۴] ارائه شده است. از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه بالا و روابط غیرخطی کرنش-تغییرمکان برای استخراج معادلات حاکم بهره گرفته شده است. اثر تغییر پارامترهای مختلف مانند هندسه پوسته، ضرایب بستر و توان نسبت‌های حجمی ماده FG در رفتار کمانشی پوسته بررسی شده است. نتایج به‌دست آمده نشان دهنده تاثیر بسیار مهم وجود بستر بر بار بحرانی کمانشی پوسته می‌باشد. ارتعاشات غیرخطی دامنه بزرگ یک پنل استوانه‌ای از مواد FG بر روی بستر الاستیک در محیط گرمایی توسط شن و همکارانش [۱۵] مورد تحقیق قرار گرفته است. دو مدل میکرومکانیک به نام‌های وویگت و موری-تاناکا به همراه نظریه تغییر شکل برشی مرتبه بالا برای استخراج معادلات حاکم استفاده شده است. فرض شده رفتار ماده FG تابع دما باشد. از روش اغتشاشات دو مرحله‌ای برای استخراج فرکانس‌های غیرخطی استفاده شده است. اثر تغییر پارامترهای مختلف هندسی، شرایط مرزی، دما، بستر و اندیس نسبت حجمی در ترکیب مواد FG در نتایج پاسخ مطالعه شده است. نتایج به‌دست آمده نشان دهنده آن است که هر دو مدل وویگت و موری-تاناکا دارای دقت یکسانی در تعیین پاسخ غیرخطی می‌باشند. در [۱۶، ۱۷]، توسط بیچ و همکارانش تحلیل ارتعاشات غیرخطی و کمانش دینامیکی پوسته FGM با استفاده از روش گالرکین انجام شده است. معادلات ارتعاشات غیرخطی پوسته بر اساس نظریه اصلاح شده پوسته دانل استخراج شده است. اثر اعمال همزمان بار محوری فشاری و بارجانبی درنتایج تحلیل در نظر گرفته شده‌اند. با بررسی مقالات و تحقیقات منتشر شده، مشخص می‌گردد که تاکنون تحقیق مستقلی که در برگیرنده تحلیل ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای FGM تحت تاثیر همزمان بار محوری فشاری و بار جانبی که بر روی بستر ویسکوالاستیک قرار گرفته باشد انجام نشده است.

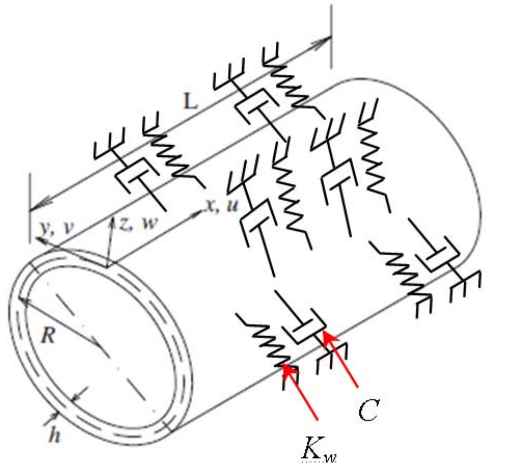
در این مقاله، معادلات حاکم بر ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای ساخته شده از FGM تحت بار محوری فشاری و بار جانبی بر روی بستر ویسکوالاستیک بر مبنای نظریه اصلاح شده دانل برای پوسته استوانه‌ای نازک استخراج شده‌اند. سپس با استفاده از روش حل گالرکین همراه با درنظر گرفتن فرض والمیر و بهره‌گیری از روش حل رانگ-کوتای مرتبه چهارم، پاسخ دینامیکی غیرخطی پوسته برای تعیین فرکانس‌های طبیعی سیستم و جابجایی غیرخطی شعاعی پوسته به‌دست آمده است. اثر تغییر پارامترهای مختلف هندسی پوسته مانند ضخامت، شعاع و طول آن، خواص FGM، ضرایب بستر ویسکوالاستیک و نیروی محوری فشاری در رفتار دینامیکی پوسته بررسی شده‌اند.

۲- معادلات حاکم بر ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای FGM بر روی بستر ویسکوالاستیک

در شکل (۱)، یک پوسته استوانه‌ای ساخته شده از ماده مدرج تابعی با شرایط تکیه‌گاهی دو سر ساده[۲] که بر روی بستر ویسکوالاستیک قرار گرفته، نشان داده شده است. در

[2] Simply support-Simply support

شکل (۱)، R شعاع متوسط پوسته، L طول پوسته و h ضخامت آن می‌باشد. همچنین در شکل (۱)، مختصات استوانه‌ای (x, θ, z) به‌کار گرفته شده است که در آن x و θ به ترتیب درجهت‌های طولی و محیطی پوسته و مختصه z $(-h/2\leq z \leq h/2)$ در راستای عمود بر سطح پوسته (راستای شعاعی) رو به سمت بیرون از آن در نظر گرفته شده است. در شکل (۱)، جابجایی‌های پوسته در جهت‌های طولی، محیطی و شعاعی به‌ترتیب با u، v و w نشان داده شده‌اند. در این شکل، C ضریب میرایی (دمپینگ) و K_W ضریب فنر (سفتی) بستر ویسکوالاستیک می‌باشند.



شکل (۱) پیکربندی یک پوسته استوانه‌ای ساخته شده از FGM برروی بستر ویسکوالاستیک و دستگاه مختصات متصل به آن.

فرض می‌گردد که جنس پوسته FGM ترکیبی از سرامیک و فلز باشد به‌طوریکه توزیع خواص ماده پوسته در ضخامت آن به صورت پیوسته از سطح داخلی فلزی به سطح خارجی سرامیک بر اساس رابطه زیر تغییر می‌کند [۱۷]

$$V_c(z)=(\frac{2z+h}{2h})^k,\quad V_m(z)=1-V_c(z),\qquad (۱)$$
$$-h/2\leq z\leq h/2,\quad 0\leq k\leq\infty$$

در رابطه (۱)، اندیس‌های m و c به خواص برای فلز و سرامیک اشاره می‌کنند و V_m و V_c به‌ترتیب نشان‌دهنده کسر حجمی فلز و سرامیک در ماده مدرج تابعی می‌باشند. توان k نیز به عنوان یک شاخص، توزیع توانی مواد در ضخامت پوسته را نشان می‌دهد. در این پژوهش، خواص FGM شامل مدول الاستیسیته E، ضریب پوآسون ν و جرم حجمی ρ به صورتی ساده با قانون توانی بیان می‌شوند [۱۷]. همچنین فرض می‌گردد که رابطه زیر برای توصیف خواص FGM حاکم است

$$P=P_cV_c(z)+P_mV_m(z)\qquad (۲)$$

که در آن، P نشان‌دهنده یک خاصیت از FGM می‌باشد. با توجه به رابطه بیان شده در بالا می‌توان نوشت که

$$E=E_m+(E_c-E_m)(\frac{2z+h}{2h})^k,$$
$$\nu=\nu_m+(\nu_c-\nu_m)(\frac{2z+h}{2h})^k,\qquad (۳)$$
$$\rho=\rho_m+(\rho_c-\rho_m)(\frac{2z+h}{2h})^k$$

بر اساس نظریه اصلاح شده دانل برای پوسته‌های استوانه‌ای نازک، روابط غیرخطی کرنش–جابجایی به‌صورت زیر بیان می‌گردند.

$$\varepsilon_x=\varepsilon_x^0-z\chi_x,\ \ \varepsilon_y=\varepsilon_y^0-z\chi_y,\qquad (۴)$$
$$\gamma_x=\gamma_{xy}^0-2z\chi_{xy}$$

که در آن

$$\varepsilon_x^o=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial x})^2,\ \varepsilon_y^o=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{w}{R}+\frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y})^2,$$
$$\gamma_{xy}^o=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y},$$
$$\chi_x=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\chi_y=\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\qquad (۵)$$
$$\chi_{xy}=\frac{1}{2R}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$$

که در روابط (۴) و (۵)، $y=R\theta$ و ε_x، ε_y و γ_{xy} به‌ترتیب کرنش‌های نرمال و برشی در ضخامت پوسته، ε_x^o و ε_y^o و γ_{xy}^o کرنش‌های نرمال و برشی در سطح میانی پوسته و χ_x، χ_y و χ_{xy} انحناها و پیچش سطح میانی پوسته استوانه‌ای

می‌باشند. قانون هوک برای پوسته استوانه‌ای به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\sigma_x=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y),\ \sigma_y=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y+\nu\varepsilon_x),\quad \sigma_{xy}=\frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} \tag{۶}$$

نیروهای داخلی N_x، N_y و N_{xy} و برآیند گشتاورهای M_x، M_y و M_{xy} در پوسته برحسب مولفه‌های تنش σ_x، σ_y و σ_{xy} در ضخامت پوسته عبارتند از

$$N_x=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_x dz,N_y=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_y dz,N_{xy}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_{xy} dz,\quad M_x=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_x zdz,M_y=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_y zdz,M_{xy}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_{xy} zdz, \tag{۷}$$

با قرار دادن معادلات (۳) الی (۶) در روابط(۷) ماتریس زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{bmatrix}N_x\\N_y\\N_{xy}\\M_x\\M_y\\M_{xy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&0&B_{11}&B_{12}&0\\A_{12}&A_{22}&0&B_{12}&B_{22}&0\\0&0&A_{66}&0&0&B_{66}\\B_{11}&B_{12}&0&D_{11}&D_{12}&0\\B_{12}&B_{22}&0&D_{12}&D_{22}&0\\0&0&B_{66}&0&0&D_{66}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\varepsilon_x^o\\\varepsilon_y^o\\\gamma_{xy}^o\\-\chi_x\\-\chi_y\\-2\chi_{xy}\end{bmatrix} \tag{۸}$$

که در آن

$$\begin{aligned}&A_{11}=A_{22}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{E}{1-\nu^2}dz,\ A_{12}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{E\nu}{1-\nu^2}dz,\\&A_{66}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{E}{2(1+\nu)}dz\\&B_{11}=B_{22}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{Ez}{1-\nu^2}dz,\ B_{12}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{Ez\nu}{1-\nu^2}dz,\\&B_{66}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{Ez}{2(1+\nu)}dz\\&D_{11}=D_{22}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{Ez^2}{1-\nu^2}dz,\ D_{12}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{Ez^2\nu}{1-\nu^2}dz,\\&D_{66}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{Ez^2}{2(1+\nu)}dz\end{aligned} \tag{۹}$$

معادلات غیرخطی حرکت برای پوسته استوانه‌ای توخالی بر پایه نظریه اصلاح شده پوسته دانل عبارتند از [۱۷]

$$\begin{aligned}&\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=\rho_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\\&\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial N_y}{\partial y}-\frac{1}{R}(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial M_y}{\partial y})=\rho_1\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},\\&\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial xdy}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}+\frac{N_x}{R}\\&+\frac{\partial}{\partial x}(N_x\frac{\partial w}{\partial x}+N_{xy}\frac{\partial w}{\partial y})+\\&\frac{\partial}{\partial y}(N_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}+N_y\frac{\partial w}{\partial y})-ph\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+q\\&=\rho_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+2\varepsilon\rho_1\frac{\partial w}{\partial t}+C\frac{\partial w}{\partial t}+K_w w.\end{aligned} \tag{۱۰}$$

که در آن، $\rho_1=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\rho dz$، p بار فشاری محوری اعمالی در دو انتهای پوسته، q فشار خارجی با توزیع یکنواخت بر روی سطح پوسته و ε ضریب دمپینگ سازه‌ای پوسته می‌باشند. با قرار دادن معادله (۸) و (۹) در رابطه (۱۰) معادلات حرکت پوسته بر اساس مولفه‌های جابجایی به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$
\begin{aligned}
&L_{11}(u)+L_{12}(v)+L_{13}(w)+P_1(w)=\rho_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\\
&L_{21}(u)+L_{22}(v)+L_{23}(w)+P_2(w)=\rho_1\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},\\
&L_{31}(u)+L_{32}(v)+L_{33}(w)+P_3(w)+Q_3(u,w)+\\
&R_3(v,w)-ph\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+q=\\
&\rho_1\frac{\partial^2 w}{\partial t}+2\varepsilon\rho_1\frac{\partial w}{\partial t}+K_w w+C\frac{\partial w}{\partial t}.
\end{aligned}
\tag{۱۱}
$$

که در آن $L_{ij}(\ )$ $(i,\ j = 1,\ 2,\ 3)$ عملگرهای خطی و همچنین $P_i(\ )$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$، $Q_3(\ )$ و $R_3(\ )$ عملگرهای غیرخطی می‌باشند و جهت اجتناب از طولانی شدن فرمولاسیون در متن، روابط مربوط به آنها در این مقاله در پیوست-الف ارائه شده‌اند.

۳- تحلیل دینامیکی غیرخطی پوسته استوانه‌ای

با استفاده از شرایط مرزی تکیه گاه ساده در ابتدا و انتهای پوسته استوانه‌ای یعنی در $x= 0,\ L$:

$w = 0,\ v = 0,\ M_x = 0$، روابط زیر شرایط مرزی مسئله را ارضا می‌نمایند

$$
\begin{aligned}
&u(x,y,t)=U(t)\cos\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{ny}{R},\\
&v(x,y,t)=V(t)\sin\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{ny}{R},\\
&w(x,y,t)=W(t)\sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{ny}{R}.
\end{aligned}
\tag{۱۲}
$$

که در آن، U، V و W نمایانگر دامنه‌های ارتعاش و m و n به‌ترتیب نشان‌هنده تعداد نیم‌موج‌ها در جهت محوری و تعداد موج‌ها در جهت محیطی هستند. با قرار دادن روابط (۱۲) در رابطه (۱۱) و به‌کارگیری روش گالرکین معادلات زیر به‌دست می‌آیند:

$$
\begin{aligned}
&l_{11}U+l_{12}V+l_{13}W+n_1W^2=\rho_1\frac{d^2U}{dt^2},\\
&l_{21}U+l_{22}V+l_{23}W+n_2W^2=\rho_1\frac{d^2V}{dt^2},\\
&l_{31}U+l_{32}V+l_{33}W+n_3W^2+n_4W^3+n_5UW\\
&+n_6VW+\frac{16q}{\pi^2 mn}=\rho_1\frac{d^2W}{dt}+2\varepsilon\rho_1\frac{dW}{dt}\\
&+K_wW+C\frac{dW}{dt}.
\end{aligned}
\tag{۱۳}
$$

به‌طوریکه

$$
\begin{aligned}
&l_{11}=-A_{11}\frac{\pi^2m^2}{L^2}-A_{66}\frac{n^2}{R^2},\\
&l_{12}=l_{21}=\left(-A_{12}-A_{66}+\frac{B_{12}+B_{66}}{R}\right)\frac{\pi mn}{LR},\\
&l_{13}=l_{31}=-A_{12}\frac{\pi m}{LR}+B_{11}\frac{\pi^3m^3}{L^3}+\left(B_{12}+2B_{66}\right)\frac{\pi mn^2}{LR^2},\\
&l_{22}=\left(-A_{66}+\frac{2B_{66}}{R}-\frac{D_{66}}{R^2}\right)\frac{\pi^2m^2}{L^2}+\left(-A_{11}+\frac{2B_{11}}{R}-\frac{D_{11}}{R^2}\right)\frac{n^2}{R^2},\\
&l_{23}=l_{32}=\left(-\frac{A_{11}}{R}-\frac{B_{11}}{R^2}\right)\frac{n}{R}+\left(B_{11}-\frac{D_{11}}{R}\right)\frac{n^3}{R^3}\\
&+\left(B_{12}+2B_{66}-\frac{D_{12}+2D_{66}}{R}\right)\frac{\pi^2m^2n}{L^2R},\\
&l_{33}=2B_{12}\frac{\pi^2m^2}{L^2R}+2B_{11}\frac{n^2}{R^3}-D_{11}\frac{\pi^4m^4}{L^4}\\
&-D_{11}\frac{n^4}{R^4}-2\left(D_{12}+2D_{66}\right)\frac{\pi^2m^2n^2}{L^2R^2}-\frac{A_{11}}{R^2}+\frac{ph\pi^2m^2}{L^2},\\
&n_1=-32A_{11}\frac{\pi m^2}{9L^3n}+16\left(A_{12}-A_{66}\right)\frac{n}{9\pi LR^2},\\
&n_2=\left(-A_{66}+A_{12}+\frac{B_{66}-B_{12}}{R}\right)\frac{16m}{9L^2R}\\
&+\left(-A_{11}+\frac{B_{11}}{R}\right)\frac{32n^2}{9\pi^2R^3m},\\
&n_3=16A_{12}\frac{m}{3L^2Rn}+16A_{11}\frac{n}{3\pi^2R^3m}+32\left(B_{66}-B_{12}\right)\frac{mn}{3L^2R^2},\\
&n_4=-9A_{11}\frac{\pi^4m^4}{32L^4}-\left(A_{12}+2A_{66}\right)\frac{\pi^2m^2n^2}{16L^2R^2}-9A_{11}\frac{n^4}{32R^4},\\
&n_5=32A_{11}\frac{\pi m^2}{9L^3n}+32\left(A_{12}-A_{66}\right)\frac{n}{9\pi LR^2},\\
&n_6=\left(A_{12}-A_{66}+\frac{B_{66}-B_{12}}{R}\right)\frac{32m}{9L^2R}+\left(A_{11}-\frac{B_{11}}{R}\right)\frac{32n^2}{9\pi^2R^3m}.
\end{aligned}
\tag{۱۴}
$$

با به‌کارگیری فرض والمیر [۱۷، ۱۸]

$$
u,v\ll w,\ \rho_1\left(\frac{d^2U}{dt^2}\right)\to 0,\ \left(\rho_1\frac{d^2V}{dt^2}\right)\to 0
$$

روابط (۱۳) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شوند

$$\begin{aligned} & l_{11}U + l_{12}V + l_{13}W + n_1W^2 = 0, \\ & l_{21}U + l_{22}V + l_{23}W + n_2W^2 = 0, \\ & l_{31}U + l_{32}V + l_{33}W + n_3W^2 + n_4W^3 + n_5UW \\ & + n_6VW + \frac{16q}{\pi^2 mn} = \rho_1 \frac{d^2W}{dt^2} + 2\varepsilon\rho_1 \frac{dW}{dt} \\ & + K_wW + C\frac{dW}{dt} \end{aligned} \tag{۱۵}$$

با حل دو معادله اول رابطه (۱۵) برحسب U و V و سپس جایگذاری نتایج به‌دست آمده در معادله سوم از روابط (۱۵)، رابطه زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} & \rho_1 \frac{d^2W}{dt^2} + 2\varepsilon\rho_1 \frac{dW}{dt} + a_1W - a_2W^2 + a_3W^3 \\ & + K_wW + C\frac{dW}{dt} = \frac{16q}{\pi^2 mn} \end{aligned} \tag{۱۶}$$

که در آن

$$\begin{aligned} & a_1 = -l_{33} - \frac{l_{31}(l_{12}l_{23} - l_{22}l_{13}) + l_{32}(l_{21}l_{13} - l_{11}l_{23})}{l_{11}l_{22} - l_{12}^2}, \\ & a_2 = n_3 + \frac{l_{31}(l_{12}n_2 - l_{22}n_1) + l_{32}(l_{12}n_1 - l_{11}n_2)}{l_{11}l_{22} - l_{12}^2} \\ & \quad \underline{+n_5(l_{12}l_{23} - l_{22}l_{13}) + n_6(l_{21}l_{13} - l_{11}l_{23})}, \\ & a_3 = -n_4 - \frac{n_5(l_{12}n_2 - l_{22}n_1) + n_6(l_{21}n_1 - l_{11}n_2)}{l_{11}l_{22} - l_{12}^2}. \end{aligned} \tag{۱۷}$$

۳-۱- فرکانس‌های طبیعی

با در نظر گرفتن تنها ترم‌های خطی در روابط (۱۳) و قرار دادن $q = 0$، و سپس با حل معادله دترمینانی مشخصه

$$\det\begin{vmatrix} l_{11} + \rho_1\omega^2 & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} + \rho_1\omega^2 & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} + \rho_1\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{۱۸}$$

فرکانس‌های طبیعی پوسته در راستاهای طولی، محیطی و شعاعی از حل دقیق برای رابطه (۱۳) (رابطه از مرتبه کامل[3]) به‌دست می‌آید. از سوی دیگر، از حل دقیق برای رابطه (۱۶)، فرکانس‌های طبیعی تقریبی پوسته (با اعمال فرض والمیر) از رابطه حل دقیق $\omega_{mn} = \sqrt{\frac{a_1}{\rho_1}}$ به‌دست می‌آیند [۱۷].

۳-۲- منحنی فرکانس- دامنه

با درنظر گرفتن بار جانبی با توزیع یکنواخت به شکل $q = Q\sin\Omega t$ و بار محوری فشاری p و برای بستر با فرض ضریب دمپینگ $C = 0$ و ضریب سختی $K_w = 0$ و جایگذاری این مقادیر در معادله (۱۶)، رابطه زیر به‌دست می‌آید [۱۷]

$$\begin{aligned} & \rho_1 \frac{d^2W}{dt^2} + 2\varepsilon\rho_1 \frac{dW}{dt} + a_1W - a_2W^2 + a_3W^3 \\ & - \frac{16q}{\pi^2 mn}\sin\Omega t = 0 \end{aligned} \tag{۱۹}$$

و سپس با بی‌بعد کردن ترم‌های رابطه به‌دست آمده در بالا

$$\begin{aligned} & \frac{d^2W}{dt^2} + 2\varepsilon\frac{dW}{dt} + \omega_{mn}^2(W - HW^2 + KW^3) \\ & - F\sin\Omega t = 0 \\ & \omega_{mn} = \sqrt{a_1/\rho_1},\ H = a_2/a_1, \\ & K = a_3/a_1,\ F = 16Q/\rho_1\pi^2 mn \end{aligned} \tag{۲۰}$$

برای به‌دست آوردن رابطه فرکانس- دامنه برای ارتعاشات غیرخطی با جایگزینی $W = A\sin\Omega t$ در معادله (۲۰) معادله زیر به‌دست می‌آید [۱۷]

$$\begin{aligned} X \equiv\ & A(\omega_{mn}^2 - \Omega^2)\sin\Omega t + 2\varepsilon A\Omega\cos\Omega t \\ & - \omega_{mn}^2 HA^2\sin^2\Omega t + K\omega_{mn}^2 A^3\sin^3\Omega t \\ & - F\sin\Omega t = 0 \end{aligned} \tag{۲۱}$$

با انتگرال‌گیری در یک چهارم دوره تناوب ارتعاش پوسته به صورت: $\int_0^{\pi/2\Omega} X\sin\Omega t dt = 0$ به‌دست می‌آید که

$$\Omega^2 - \frac{4\varepsilon}{\pi}\Omega = \omega_{mn}^2\left(1 - \frac{8}{3\pi}HA + \frac{3K}{4}A^2\right) - \frac{F}{A} \tag{۲۲}$$

[3] Full order

با جایگذاری $\alpha^2 = \dfrac{\Omega^2}{\omega_{mn}^2}$ در رابطه قبل به‌دست می‌آید

$$\alpha^2 - \frac{4\varepsilon}{\pi\omega_{mn}}\alpha = 1 - \frac{8}{3\pi}HA + \frac{3K}{4}A^2 - \frac{F}{A\omega_{mn}^2} \quad (۲۳)$$

و برای ارتعاشات غیرخطی پوسته بدون دمپینگ سازه‌ای

$$\Omega^2 = \omega_{mn}^2(1 - \frac{8}{3\pi}HA + \frac{3K}{4}A^2) - \frac{F}{A} \quad (۲۴)$$

و یا به شکل زیر بازنویسی می‌گردد [۱۷]

$$\alpha^2 = 1 - \frac{8}{3\pi}HA + \frac{3K}{4}A^2 - \frac{F}{A\omega_{mn}^2} \quad (۲۵)$$

در حالتی که $F = 0$ باشد، یعنی حالتی که در آن تحریکی بر روی پوسته نباشد، رابطه فرکانس- دامنه برای ارتعاشات غیرخطی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید [۱۷]

$$\omega_{NL}^2 = \omega_{mn}^2(1 - \frac{8}{3\pi}HA + \frac{3K}{4}A^2) \quad (۲۶)$$

۳-۳- پاسخ دینامیکی غیرخطی پوسته استوانه‌ای

با درنظر گرفتن بار جانبی با توزیع یکنواخت به شکل $q(t) = Q\sin\Omega t$، پیش‌بار محوری فشاری p و با فرض $K_w \neq 0, C \neq 0$ و جایگذاری در معادله (۱۳) معادلات زیر به‌دست می‌آیند

$$\begin{aligned}
&l_{11}U + l_{12}V + l_{13}W + n_1W^2 = \rho_1\frac{d^2U}{dt^2},\\
&l_{21}U + l_{22}V + l_{23}W + n_2W^2 = \rho_1\frac{d^2V}{dt^2},\\
&l_{31}U + l_{32}V + l_{33}W + n_3W^2 + n_4W^3 + n_5UW\\
&+n_6VW = \rho_1\frac{d^2W}{dt^2} + 2\varepsilon\rho_1\frac{dW}{dt} - \frac{16Q\sin\Omega t}{\pi^2 mn}\\
&+K_wW + C\frac{dW}{dt}.
\end{aligned} \quad (۲۷)$$

با لحاظ کردن فرض والمیر، معادله حرکت در رابطه (۱۶) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\begin{aligned}
&\rho_1\frac{d^2W}{dt^2} + K_WW + C\frac{dW}{dt} + 2\rho_1\varepsilon\frac{dW}{dt}\\
&+a_1W - a_2W^2 + a_3W^3 = \frac{16Q\sin\Omega t}{\pi^2 mn}.
\end{aligned} \quad (۲۸)$$

۴- نتایج عددی و بحث در آنها

در این بخش، با استفاده از روابط به‌دست آمده، نتایج مربوط به فرکانس‌های غیرخطی پوسته استوانه‌ای FGM بر روی بستر ویسکوالاستیک با شرایط مرزی دو انتهای ساده تحت بار محوری فشاری و جانبی به‌دست آمده است. خواص در نظر گرفته شده برای ماده مدرج تابعی بر پایه فولاد-نیکل که در راستای ضخامت پوسته استوانه‌ای با توجه به توزیع تسبت مواد بر اساس قانون توانی تغییر می‌کند (با توجه به روابط (۱) الی (۳))، در تحلیل‌های پیش رو به صورت ذیل می‌باشند [۱۷]

Stainless steel:

$E_m = 207.7888\times10^9\ N/m^2, \rho_m = 8166\,kg/m^3,$
$\nu_m = 0.3178$

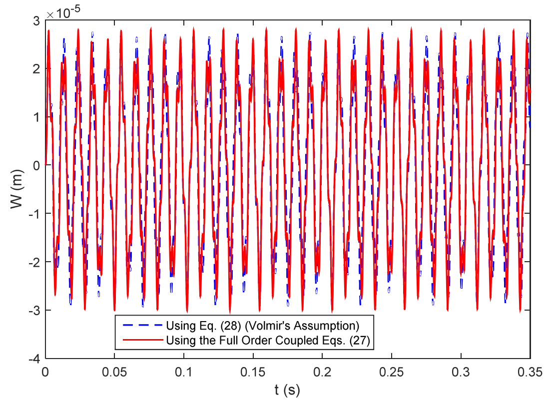
Nickel:

$E_c = 205.0980\times10^9\ N/m^2, \rho_c = 8900\,kg/m^3,$
$\nu_c = 0.31$

کلیه خواص FGM در دمای ۳۰۰ درجه کلوین در نظر گرفته شده‌اند. همچنین پارامترهای بستر ویسکوالاستیک پوسته استوانه‌ای عبارتند از $C = 0.2$ N.s/m^2 و K_w=10^6 N/m^2.

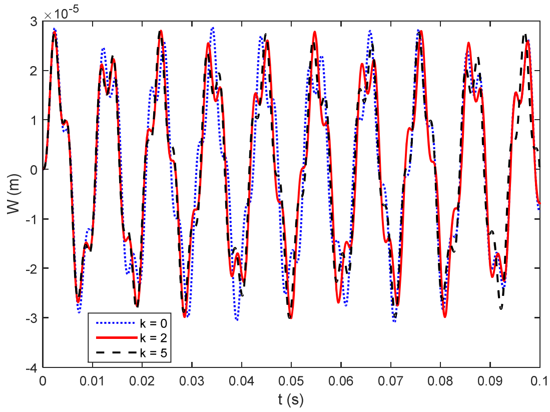
در شکل (۲)، مقایسه‌ای بین نتایج به‌دست آمده برای پاسخ جابجایی شعاعی دینامیکی پوسته w(m) برحسب زمان t(s) با استفاده از دو معادله (۲۷) و (۲۸) نشان داده شده است. مقادیر در نظر گرفته شده برای محاسبه پاسخ دینامیکی غیرخطی پوسته FGM بر روی بستر ویسکوالاستیک عبارتند از: $h = 0.001$ m، $R/h = 500$، L/R $= 2$، $\varepsilon = 0.1$، $k = 2$، $p = 0$، $(m, n) = (1, 3)$ و $q =$

$1500sin600t$. همانطور که از شکل (۲) مشاهده می‌شود نتایج محاسبه شده در دو نمودار با استفاده از رابطه مرتبه کامل (۲۷) و رابطه (۲۸) با بهره‌گیری از فرض والمیر، با تقریب بسیار خوبی با یکدیگر تطابق دارند. ولی لازم به ذکر است که در حالت کلی، نتایج منحنی ارائه شده بر اساس معادله (۲۷) (یعنی معادلات کوپل غیرخطی Full Order) دارای جواب تحلیلی دقیق‌تری از حل تحلیلی معادله (۲۸) (یعنی معادله تقریبی غیرخطی والمیر) می‌باشد.



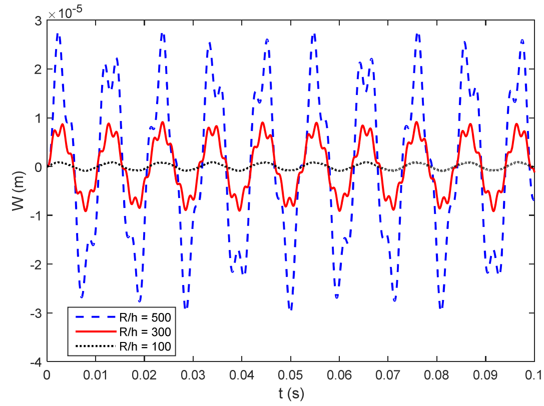
شکل (۲) مقایسه پاسخ دینامیکی غیرخطی جابجایی شعاعی پوسته بر اساس فرض والمر (۲۸) و معادله (۲۷).

شکل (۳)، با همان مقادیر در نظر گرفته شده پارامترهای شکل (۲)، به ازای مقادیر مختلف اندیس قانون توزیع توانی k (برای سه مقدار $k = 0, 2, 5$)، جابجایی شعاعی غیرخطی دینامیکی پوسته $w(\mathrm{m})$ را برحسب زمان $t(\mathrm{s})$ نشان می‌دهد. از این شکل مشاهده می‌گردد که با افزایش کمیت k، دامنه جابجایی غیرخطی دینامیکی پوسته افزایش پیدا می‌کند.



شکل (۳) تاثیر اندیس قانون توانی k بر پاسخ دینامیکی غیرخطی پوسته استوانه‌ای FGM بر روی بستر ویسکوالاستیک.

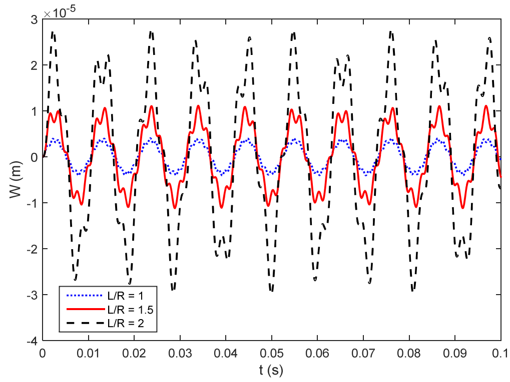
شکل (۴) جابجایی غیرخطی دینامیکی پوسته $w(\mathrm{m})$ برحسب زمان $t(\mathrm{s})$ به ازای نسبت R/hهای مختلف براساس نتایج حل معادلات غیرخطی کوپل مرتبه کامل (۲۷) را نشان می‌دهد. همانگونه که از این شکل مشاهده می‌گردد با افزایش R/h، جابجایی غیرخطی شعاعی پوسته برحسب زمان به شدت افزایش پیدا می‌کند.



شکل (۴) تاثیر نسبت R/h بر پاسخ دینامیکی غیرخطی پوسته استوانه‌ای FGM بر روی بستر ویسکوالاستیک.

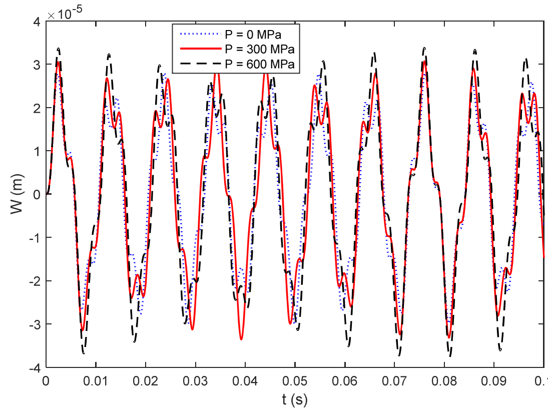
در شکل (۵) تاثیر نسبت L/R بر روی جابجایی غیرخطی پوسته برحسب زمان $t(\mathrm{s})$ (به ازای نسبت L/Rهای مختلف) براساس نتایج حل معادلات مرتبه کامل غیرخطی کوپل (۲۷) نشان داده شده است. از این شکل مشاهده می‌گردد

که با افزایش نسبت L/R دامنه جابجایی غیرخطی پوسته که بر روی بستر ویسکوالاستیک قرار دارد افزایش می‌یابد.



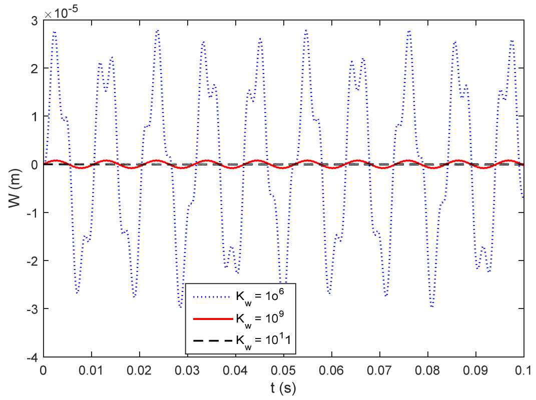
شکل (۵) تاثیر نسبت L/R بر پاسخ دینامیکی غیرخطی پوسته استوانه‌ای FGM بر روی بستر ویسکوالاستیک.

شکل (۶) تاثیرنیروی پیش بار فشاری محوری p که در دوانتهای پوسته FGM اعمال می‌گرد در پاسخ دینامیکی غیرخطی پوسته استوانه‌ای FGM که بر روی بستر ویسکوالاستیک قرار دارد را نشان می‌دهد. در این شکل مشاهده می‌گردد که با افزایش نیروی محوری فشاری p، دامنه جابجایی غیرخطی پوسته نسبت به زمان افزایش می‌یابد.



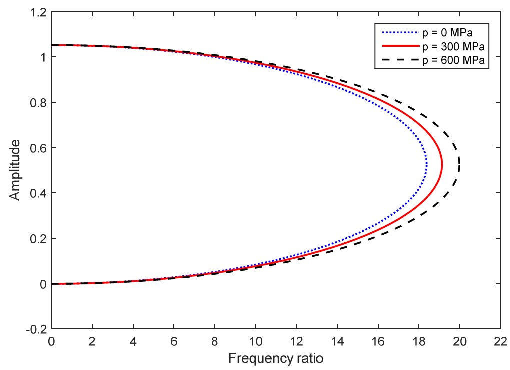
شکل (۶) تاثیر نیروی محوری فشاری p در پاسخ دینامیکی جابجایی شعاعی غیرخطی پوسته استوانه‌ای FGM بر روی بستر ویسکوالاستیک.

شکل (۷) تاثیر ضریب سختی الاستیک K_W در بستر ویسکوالاستیک بر روی جابجایی دینامیکی شعاعی غیرخطی پوسته استوانه‌ای FGM برحسب زمان را نشان می‌دهد. نکته قابل توجه در شکل (۷) این است که با افزایش ضریب سختی الاستیک بستر و ثابت ماندن ضریب دمپینگ بستر، جابجایی دینامیکی شعاعی غیرخطی پوسته به شدت کاهش می‌یابد.



شکل۷. تاثیر ضریب سختی الاستیک بستر K_W بر پاسخ دینامیکی غیرخطی پوسته استوانه‌ای FGM.

شکل (۸) نشان‌دهنده تاثیر نیروی پیش‌بار محوری فشاری p (برای سه مقدار $p = 0$ MPa, 300 MPa, 600 MPa,) در شرایط ارتعاشات آزاد پوسته و بدون بستر ویسکوالاستیک و دمپینگ سازه‌ای با استفاده از حل معادله غیرخطی مرتبه کامل کوپل (۲۷) می‌باشد. در این شکل، دامنه ارتعاش شعاعی پوسته بر حسب نسبت فرکانس α ترسیم شده است. همانطور که در این شکل مشاهده می‌گردد، فرکانس غیرخطی پوسته کاملاً به دامنه ارتعاشات پوسته وابسته است. از سوی دیگر، با کاهش نیروی پیش‌بار محوری فشاری p در یک دامنه ارتعاش مشخص، کمترین فرکانس ارتعاش پوسته کاهش پیدا می‌کند.



شکل (۸) تاثیر نیروی پیش بار محوری فشاری p بر منحنی فرکانس–دامنه پوسته استوانه‌ای FGM در حالت بدون بستر ویسکوالاستیک و دمپینگ سازه‌ای.

۵- نتیجه گیری

معادلات دیفرانسیل پاره‌ای غیرخطی کوپل حاکم بر ارتعاشات پوسته استوانه‌ای FGM بر روی بستر ویسکوالاستیک تحت بار جانبی و بار محوری فشاری در دو انتهای آن براساس نظریه پوسته دانل استخراج شد. سپس با استفاده از روش گالرکین، فرض والمیر (Volmir) و در ادامه برای حل عددی معادلات دیفرانسیل حاکم، از روش رانگ–کوتای مرتبه چهارم برای تعیین پاسخ دینامیکی پوسته بهره گرفته شد. نتایج تحلیل شامل استخراج فرکانس‌های طبیعی و غیرخطی پوسته، رابطه فرکانس–دامنه و جابجایی دینامیکی غیرخطی شعاعی پوسته استوانه‌ای می‌باشند. نتایج به‌دست آمده عبارتند از:

۱- برای سیستم مورد مطالعه مشاهده گردید که با افزایش مقدار اندیس قانون توانی k، دامنه جابجایی غیرخطی دینامیکی پوسته استوانه‌ای افزایش پیدا می‌کند.

۲- مشاهده گردید که با افزایش R/h، جابجایی غیرخطی شعاعی پوسته برحسب زمان به شدت افزایش پیدا می‌کند. همچنین، با افزایش نسبت L/R، دامنه جابجایی غیرخطی پوسته که بر روی بستر ویسکوالاستیک قرار دارد افزایش می‌یابد. از سوی دیگر، با افزایش مقادیر نیروی محوری فشاری p اعمالی در دو انتهای پوسته، دامنه جابجایی غیرخطی دینامیکی پوسته استوانه‌ای نسبت به زمان افزایش پیدا می‌کند.

۳- مشاهده گردید که با افزایش ضریب سختی الاستیک بستر و ثابت ماندن ضریب دمپینگ بستر، جابجایی دینامیکی شعاعی غیرخطی پوسته استوانه‌ای به شدت کاهش پیدا می‌کند.

۴- مشاهده گردید که فرکانس غیرخطی پوسته استوانه‌ای کاملاً به دامنه ارتعاشات پوسته وابسته است. از سوی دیگر، با کاهش نیروی پیش‌بار محوری فشاری p در یک دامنه ارتعاش مشخص، کمترین فرکانس ارتعاش پوسته استوانه‌ای کاهش پیدا می‌کند.

۶- تشکر و قدردانی

در انجام این تحقیق از معاونت پژوهشی واحد پرند دانشگاه آزاد اسلامی در حمایت از طرح پژوهشی سپاسگزاری می‌گردد. همچنین، از آقای شهریار معرفت خدایی برای کمک ایشان تشکر می‌گردد.

پیوست:

عملگرهای خطی $L_{ij}(\ )\ (i, j = 1, 2, 3)$ و عملگرهای غیرخطی $P_i(\ )\ (i = 1, 2, 3)$، $Q_3(\ )$ و $R_3(\ )$ که در رابطه (۱۱) تعریف شده‌اند عبارتند از:

$$
\begin{aligned}
&L_{11}(u)=A_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+A_{66}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\\
&L_{12}(v)=\left(A_{12}+A_{66}-\frac{B_{12}+B_{66}}{R}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y},\\
&L_{13}(w)=-\frac{A_{12}}{R}\frac{\partial w}{\partial x}-B_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}-\left(B_{12}+2B_{66}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2},\\
&P_1(w)=A_{11}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+(A_{12}+A_{66})\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+A_{66}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\\
&L_{21}(u)=\left(A_{12}+A_{66}-\frac{B_{12}+B_{66}}{R}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\\
&L_{22}(v)=\left(A_{66}-\frac{2B_{66}}{R}+\frac{D_{66}}{R^2}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\left(A_{11}-\frac{2B_{11}}{R}+\frac{D_{11}}{R^2}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},\\
&L_{23}(w)=-\left(\frac{A_{11}}{R}-\frac{B_{11}}{R^2}\right)\frac{\partial w}{\partial y}-\left(B_{11}-\frac{D_{11}}{R}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\\
&-\left(B_{12}+2B_{66}-\frac{D_{12}+2D_{66}}{R}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y},\\
&P_2(w)=\left(A_{66}-\frac{B_{66}}{R}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial y}+\left(A_{11}-\frac{B_{11}}{R}\right)\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\\
&+\left(A_{12}+A_{66}-\frac{B_{12}+B_{66}}{R}\right)\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y},\\
&L_{31}(u)=\frac{A_{12}}{R}\frac{\partial u}{\partial x}+B_{11}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\left(B_{11}+2B_{66}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2},\\
&L_{32}(v)=\left(\frac{A_{11}}{R}-\frac{B_{11}}{R^2}\right)\frac{\partial v}{\partial y}+\left(B_{11}-\frac{D_{11}}{R}\right)\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}\\
&+\left(B_{12}+2B_{66}-\frac{D_{12}+2D_{66}}{R}\right)\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y},\\
&L_{33}(w)=-\frac{A_{11}}{R^2}w-\frac{2B_{12}}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{2B_{11}}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\\
&-D_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^4}\right)-2\left(D_{11}+2D_{66}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2\partial y^2},\\
&P_3(w)=2\left(A_{11}+2A_{66}\right)\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\\
&-\frac{w}{R}\left(A_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+A_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+2\left(B_{66}-B_{12}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\\
&+2\left(B_{12}-B_{66}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{A_{12}}{2R}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-\frac{A_{11}}{2R}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\\
&+\frac{3A_{11}}{2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]\\
&+\left(\frac{A_{12}}{2}+A_{66}\right)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right],\\
&Q_3(u,w)=A_{11}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial x}\right)+A_{12}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\\
&+A_{66}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial w}{\partial x}+\left(A_{12}+A_{66}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}+2A_{66}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y},\\
&R_3(v,w)=\left(A_{12}-\frac{B_{12}}{R}\right)\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2\left(A_{66}-\frac{B_{66}}{R}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\\
&+\left(A_{11}-\frac{B_{11}}{R}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\frac{\partial w}{\partial y}\right).
\end{aligned}
\tag{آ}
$$

فهرست علائم:

طول پوسته استوانه‌ای	L
شعاع متوسط پوسته استوانه‌ای	R
ضخامت پوسته استوانه‌ای	h
جرم حجمی ماده پوسته استوانه‌ای	ρ
مدول الاستیسیته ماده پوسته استوانه‌ای	E
ضریب پوآسون ماده پوسته استوانه‌ای	v
ضریب سختی بستر ویسکوالاستیک	K_w
ضریب دمپینگ بستر ویسکوالاستیک	C
اندیس برای سرامیک	c
اندیس برای فلز	m
کسر حجمی سرامیک در پوسته	V_c
کسر حجمی فلز در پوسته	V_m
نیروی محوری فشاری	p
شاخص توزیع توانی مواد در ضخامت پوسته	k
مختصه زمانی	t
مختصه مکانی در راستای طولی پوسته	x
مختصه مکانی در راستای محیطی پوسته	y
مختصه مکانی در راستای شعاعی پوسته	z
تغییر مکان وابسته به زمان در راستای طولی پوسته استوانه‌ای	$u(x,t)$
تغییر مکان وابسته به زمان در راستای محیطی پوسته استوانه‌ای	$v(x,t)$
تغییر مکان وابسته به زمان در راستای	$w(x,t)$

شعاعی پوسته استوانه‌ای	
نیروهای داخلی لبه‌ای پوسته	N_x, N_y, N_z
گشتاورهای خمشی لبه‌ای پوسته	M_x, M_y, M_z
تنش‌های نرمال و برشی در پوسته	$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$
کرنش‌های نرمال و برشی در پوسته	$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$
انحناها و پیچش سطح میانی پوسته استوانه‌ای	$\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}$
مشخصه لایه میانی پوسته استوانه‌ای	$\circ$
ضریب دمپینگ سازه‌ای پوسته استوانه‌ای	ε
بخش زمانی دامنه‌های ارتعاش پوسته به‌ترتیب در سه راستای طولی، محیطی و شعاعی	U, V, W
تعداد نیم موج‌ها در جهت محوری پوسته	m
تعداد نیم موج‌ها در جهت محیطی پوسته	n
فرکانس طبیعی مد mnام ارتعاشات خطی پوسته استوانه‌ای در راستاهای طولی، محیطی و شعاعی	ω_{mn}
فرکانس طبیعی مد mnام ارتعاشات غیرخطی پوسته	ω_{NL}
عملگرهای خطی	$L_{ij}(\,)$ $(i, j = 1, 2, 3)$
عملگرهای غیرخطی	$P_i(\,)$ $(i = 1, 2, 3)$, $Q_3(\,), R_3(\,)$

مراجع:

[1] Soldatos K.P., Hajigeoriou V.P., Three-dimensional solution of the free vibration problem of homogeneous isotropic cylindrical shells and panels, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 137, 1990, pp. 369-384.

[2] Soldatos K.P., A comparison of some shell theories used for the dynamic analysis of cross-ply laminated circular cylindrical panels, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 97, 1984, pp. 305-319.

[3] Lam K.Y., Loy C.T., Effects of boundary conditions on frequencies characteristics for a multi-layered cylindrical shell, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 188, 1995, pp. 363-384.

[4] Loy C.T., Lam K.Y., Shu C., Analysis of cylindrical shells using generalized differential quadrature, *Shock and Vibration*, Vol. 4, 1997, pp. 193-198.

[5] Soedel W., A new frequency formula for closed circular cylindrical shells for large variety of boundary conditions, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 70, No. 3, 1980, pp. 309-317.

[6] Loy C.T., Lam K.Y., Vibration of cylindrical shells with ring support, *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 39, 1997, pp. 455-471.

[7] Bakhtiari-Nejad F., Mousavi Bideleh S.M., Nonlinear free vibration analysis of pre-stressed circular cylindrical shells on the Winkler-Pasternak foundation, *Thin-Walled Structures*, Vol. 53, 2012, pp. 26–39.

[8] Paliwal D.N., Large amplitude free vibrations of cylindrical shell on Pasternak foundations, *International Journal of Pressure Vessels & Piping*, Vol. 54, 1993, p.p. 387-398.

[9] Pradhan S.C., Loy C.T., Lam K.Y., Reddy J.N., Vibration characteristics of functionally graded cylindrical shells under various boundary conditions, *Applied Acoustics*, Vol. 61, 2000, pp. 111-129.

[10] Loy C.T., Lam K.T., Reddy J.N., Vibration of functionally graded cylindrical shells, *International Journal of Mechanical Sciences* Vol. 41, 1999, pp. 309-324.

[11] Ravikiran Kadoli, Ganesan N., Buckling and free vibration analysis of functionally graded cylindrical shells subjected to a temperature-specified boundary condition, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 289, 2006, pp. 450-480.

[12] Haddadpour H., Mahmoudkhani S., Navazi H.M., Free vibration analysis of functionally graded cylindrical shells including thermal

effects, *Thin-Walled Structures,* Vol. 45, 2007, pp. 591-599.

[13] Shen. S.-H., Postbuckling of shear deformable FGM cylindrical shells surrounded by an elastic medium, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 51, No. 5, 2009, pp. 372-383.

[14] Bagherizadeh E., Kiani Y., Eslami M.R., Mechanical buckling of functionally graded material cylindrical shells surrounded by Pasternak elastic foundation, *Composite Structures*, Vol. 93, No. 11, 2011, pp. 3063-3071.

[15] Shen. S.-H., Wang H., Nonlinear vibration of shear deformable FGM cylindrical panels resting on elastic foundations in thermal environments, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 60, 2014, pp. 167-177.

[16] Bich D.H., Long V.D., Non-linear dynamical analysis of imperfect functionally graded material shallow shells, *Vietnam Journal of Mechanics*, VAST, Vol. 32, No. 1, 2010, pp. 1-14.

[17] Bich D.H., Xuan N.N., Nonlinear vibration of functionally graded circular cylindrical shells based on improved Donnell equations, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 331, 2012, pp. 5488-5501.

[18] Volmir A.S., Nonlinear Dynamics of Plates and Shells, Science Edition, 1972.