

تغییر مکان استاتیکی تیرهای پیزوالکتریک چندلایه دو سر لولا تحت بارگذاری‌های مختلف

افشین منوچهری فر^{۱*}، علیرضا جلیلی^۲

* نویسنده مسئول: Manouchehri@iaukhsh.ac.ir

چکیده

در این مقاله ابتدا معادلات ساختاری پیزوالکتریک‌ها بیان شده و با بکارگیری این معادلات، انرژی داخلی تیر چند لایه پیزوالکتریک محاسبه شده است. سپس با ترکیب اصل حداقل انرژی پتانسیل و روش رایلی-ریتز، رابطه‌ای برای جابه‌جایی تیر پیزوالکتریک دو سر لولا، تحت ممان متمرکز، نیروی متمرکز، بار گسترده و ولتاژ خارجی، به طوریکه شرایط مرزی را ارضا کند حدس زده شده است و ضرایب مجهول با حداقل کردن انرژی پتانسیل به دست آمده است. در ادامه روابط به دست آمده برای تیرهای بای مورف و یونی مورف دو سر لولا ساده شده و بار الکتریکی و همچنین ولتاژ ایجاد شده در آنها در حالت حسگری به دست آمده است. جهت اطمینان از صحت و دقت روابط تحلیلی به دست آمده، نتایج تحلیلی با نتایج نرم افزار ANSYS 10 در قالب مثال‌های عددی مقایسه شده است.

واژه‌های کلیدی: پیزو الکتریک، تیر چندلایه، معادلات ساختاری، بای مورف، یونی مورف.

۱- استادیار دانشکده مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی شهر

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی شهر

۱- مقدمه

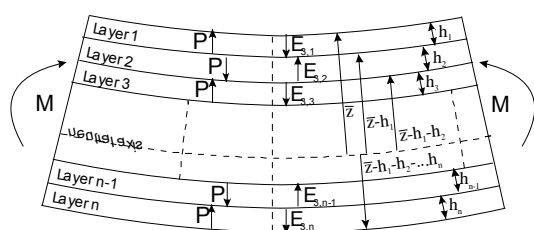
و اصل همیلتون^۴ به بررسی استاتیکی و دینامیکی تیر بای مورف سری و موازی با شرایط مرزی دو سر لولا و تحت بار گسترده و ولتاژ اعمالی پرداخته اند. بالز و همکاران [۷] با استفاده از معادلات حاکم بر پیزوالکتریک ها و اصل مینیمم انرژی پتانسیل^۵، تغییر مکان تیر پیزوالکتریک یک سر گیردار را تحت انواع بارگذاری به شکل بسته به دست آورده اند.

در مجموع در تحقیقات قبلی تنها به تیرهای دولایه پیزوالکتریک و نوع خاصی از بارگذاری روی آنها پرداخته شده است. همچنین معیاری برای سنجش دقت و صحت روابط به دست آمده ارائه نشده است.

در این مقاله با به کارگیری معادلات ساختاری پیزوالکتریک ها، انرژی هر لایه محاسبه شده و انرژی کل از مجموع انرژی تمامی لایه ها به دست می آید. سپس با ترکیب اصل مینیمم انرژی پتانسیل و روش رایلی-ریتز^۶، رابطه ای برای جابه جایی تیر چند لایه پیزوالکتریک دو سر لولا، بطوریکه شرایط مرزی را ارضا کند، حدس زده شده و ضرایب مجهول با مینیمم کردن انرژی پتانسیل به دست می آید. معادلات به دست آمده برای تیرهای دو لایه پیزوالکتریک ساده شده و بار الکتریکی و ولتاژ ایجاد شده در آنها در حالت حسگری محاسبه می شود. روابط تحلیلی به دست آمده در قالب چند مثال با نتایج نرم افزار ANSYS مقایسه می شود.

۲- فرضیات

در شکل (۱) هندسه تیر چند لایه نشان داده شده است.



شکل (۱). نمایش هندسه تیر چند لایه

پیزوالکتریک ها^۱ موادی هستند که وقتی نیروی خارجی بر آنها وارد می شود، اتم ها و مولکولهای کریستالی آنها قطبی شده و یک میدان دو قطبی را به وجود می آورند که می توان آن را به ولتاژ الکتریکی تبدیل نمود. به طور معکوس اعمال ولتاژ الکتریکی خارجی به آنها باعث تغییر ابعاد هندسی می شود. اثر پیزوالکتریک در سال ۱۸۸۰ بوسیله پیر و ژاک کوری کشف شد. در سال ۱۸۸۱ خاصیت معکوس پیزوالکتریک توسط گابریل لیپمن کشف شد [۱].

پرکاربردترین تیرهای پیزوالکتریک، تیرهای یونی مورف^۲ و بای مورف^۳ و تیرسه لایه پیزوالکتریک هستند. تیر یونی مورف از یک لایه پیزوالکتریک و یک لایه الاستیک تشکیل شده است. تیر بای مورف از دو لایه پیزوالکتریک تشکیل شده که جهت پلاریزه لایه ها می تواند یکسان (بای مورف موازی) و یا مخالف هم (بای مورف سری) باشد [۲]. تیر سه لایه از یک لایه پیزوالکتریک در مرکز و دو لایه پیزوالکتریک در طرفین تشکیل شده است. پارک و مون [۳] به بررسی استاتیکی تیر پیزوالکتریک بای مورف و یونی مورف با شرایط مرزی یک سر گیردار و دو سر لولا تحت بار متمرکز و ولتاژ خارجی پرداخته اند و پارامترهای به دست آمده مانند تغییر مکان و بار الکتریکی برای انتهای تیر محاسبه شده است. اسمیت و جوی [۴] با استفاده از روش انرژی به بررسی استاتیکی تیر پیزوالکتریک یونی مورف پرداخته اند. در این مرجع با محاسبه مقدار انرژی سیستم، پارامترهایی چون خیز، شیب و بار الکتریکی برای انتهای تیر محاسبه شده است. یاکوم و آبرامویچ [۵] رفتار یک تیر پیزوالکتریک را به صورت آزمایشگاهی مورد بررسی قرار داده اند. در این مرجع همچنین به بررسی پدیده هیستریزیس در پیزوالکتریک ها پرداخته شده است. پوگت و فرناندس [۶] با استفاده از معادلات حاکم بر پیزوالکتریک ها

4 - Hamilton's principle

5 - Minimum total potential energy

6 - Rayleigh-Ritz method

1- Piezoelectrics

2- Unimorph

3 - Bimorph

فرضیات زیر در نظر گرفته می شود:

- ۱- رفتار تیر در خمش از تیر اوایلر برنولی پیروی می کند.
- ۲- هر لایه می تواند پیزوالکتریک یا الاستیک باشد.
- ۳- در سطح مشترک دولایه لغزشی وجود ندارد.
- ۴- شعاع انحنا تیر خیلی بیشتر از ضخامت آن است.

۳- حل تحلیلی

معادلات حاکم بر پیزوالکتریک ها به صورت زیر است:

$$S_i = s_{ij}T_j + d_{ki}E_k \quad (1)$$

$$D_k = d_{kj}T_j + \varepsilon_{kl}E_l$$

در رابطه فوق $i, j, k, l = 1, 2, 3$ و S کرنش، T تنش، E میدان الکتریکی، D جابه جایی الکتریکی، d ثابت پیزوالکتریک، s معکوس ماتریس سختی و ε ثابت دی الکتریک است. چون تیر دارای هندسه یک بعدی است، معادلات فوق را می توان به صورت زیر کاهش داد:

$$S_1 = s_{11}T_1 + d_{13}E_3 \quad (2)$$

$$D_3 = d_{31}T_1 + \varepsilon_{33}^T E_3$$

در مرجع [۷] برای یک تیر با n لایه محل تار خشی از رابطه ۳ به دست آورده شده است. در این رابطه h_i ضخامت لایه i ام و w_i عرض لایه i ام است.

$$\bar{Z} = - \frac{\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{s_{11i}} h_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{s_{11i}} h_i \sum_{j=1}^i h_j}{2 \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{s_{11i}} h_i} \quad (3)$$

اگر شعاع انحنا تیر خیلی بیشتر از ضخامت تیر باشد، رابطه زیر بین کرنش و شعاع انحنا برقرار می باشد. در این رابطه K^* انحنا (عکس شعاع انحنا) است.

$$S_1(z) = -zK^* \quad (4)$$

کمترین و بیشترین فاصله لایه i ام از تار خشی، یعنی $h_{i,u}$ و $h_{i,o}$ به صورت زیر به دست می آید:

$$h_{i,u} = \bar{Z} - \sum_{j=1}^i h_j \quad (5)$$

$$h_{i,o} = \bar{Z} - \sum_{j=1}^{i-1} h_j$$

با جایگذاری رابطه (۴) در رابطه (۲) برای لایه i ام:

$$T_{1,i} = \frac{1}{s_{11,i}} (-zK^* - d_{31,i}E_{3,i}) \quad (6)$$

بنابراین ممان ایجاد شده در تیر با n لایه به صورت زیر است:

$$M = \sum_{i=1}^n w_i \int_{h_{i,u}}^{h_{i,o}} T_{1,i} z dz \quad (7)$$

با جایگذاری معادله (۶) در معادله (۷) و انتگرالگیری از آن:

$$M = -CK^* - M_{piezo} \quad (8)$$

که در رابطه (۸)

$$M_{Piezo} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{s_{11,i}} d_{31,i} E_{3,i} (h_{i,o}^2 - h_{i,u}^2) \quad (9)$$

$$C = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{s_{11,i}} (h_{i,o}^3 - h_{i,u}^3) \quad (10)$$

با استفاده از رابطه (۸) شعاع انحنا تیر را می توان به صورت زیر محاسبه نمود:

$$K^* = - \frac{M + M_{Piezo}}{C} \quad (11)$$

چگالی انرژی داخلی برای یک لایه به صورت زیر است [۴].

$$W_i = \frac{1}{2} E_{3,i} D_{3,i} + \frac{1}{2} T_{1,i} S_{1,i} \quad (12)$$

با جایگذاری رابطه (۲) در (۱۲) و انتگرال گیری حجمی، انرژی داخلی کل W_{total} تیر چند لایه به صورت زیر به دست می آید:

$$W_{total} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^\ell \varepsilon_{33,i}^T w_i h_i E_{3,i}^2 dx - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^\ell \frac{w_i h_i}{s_{11,i}} d_{31,i}^2 E_{3,i}^2 dx \quad (13)$$

$$+ \int_0^\ell \left[\frac{M^2}{2C} + \frac{M M_{piezo}}{C} + \frac{M_{piezo}^2}{2C} \right] dx$$

اکنون انرژی پتانسیل کل سیستم با استفاده از عبارت زیر محاسبه می شود.

$$\Pi = W_{tot} - W_a \quad (14)$$

در عبارت فوق W_a کار نیروهای خارجی است. با جایگذاری رابطه (۱۳) در رابطه (۱۴):

تحریک می‌شوند، داریم:

$$M_{piezo} = m_p V \quad (21)$$

در رابطه فوق m_p یک ضریب ثابت است که بستگی به چگونگی اعمال ولتاژ به لایه‌ها دارد. با این تعریف معادله (۲۰) به صورت زیر در می‌آید:

$$\xi(x) = \frac{L(x-L)}{6C} \left(\frac{x}{L} + \left(\frac{x}{L}\right)^2 \right) M + \frac{m_p}{2C} x(x-L)V \quad (22)$$

(ب) تیر پیزوالکتریک تحت نیروی متمرکز

وقتی تیر پیزوالکتریک دو سر لولا، تحت نیروی متمرکز در وسط تیر قرار گیرد، کار نیروی متمرکز به صورت $W_a = F \cdot \xi|_{x=L/2}$ است. بنابراین با جایگذاری W_a در رابطه (۱۵) و استفاده از روابط (۱۶) و (۱۷) خواهیم داشت:

$$\int_0^L \frac{\partial}{\partial a_i} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) \left[C \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) - M_{piezo} \right] dx - F \left(\frac{\partial \xi}{\partial a_i} \right)_{x=L/2} = 0 \quad (23)$$

با استفاده از رابطه فوق و در نظر گرفتن تابع تغییر مکان تیر به صورت زیر است:

$$\xi(x) = a_1 x(x-L) + a_2 x^2(x-L) + a_3 x^3(x-L)$$

ضرایب مجهول به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$a_1 = -\frac{FL}{16C} + \frac{M_{piezo}}{2C}, \quad a_2 = -\frac{5F}{64C}, \quad a_3 = \frac{5F}{64CL} \quad (24)$$

بنابراین با جایگذاری ضرایب مجهول در معادله تغییر مکان، خیز تیر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\xi(x) = -\frac{L^3(x-L)}{16C} \left(\frac{x}{L} + \frac{5}{4} \left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{5}{4} \left(\frac{x}{L}\right)^3 \right) F + \frac{m_p}{2C} x(x-L)V \quad (25)$$

(ج) تیر پیزوالکتریک تحت بار گسترده

در این قسمت فرض می‌شود تیر تحت بار گسترده P قرار دارد.

بنابراین کار نیروی خارجی از رابطه $W_a = Pw \int_0^L \xi(x) dx$ به دست می‌آید. با جایگذاری W_a در رابطه (۱۵) و استفاده از

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^L \varepsilon_{33,i}^T w_i h_i E_{3,i}^y dx \\ & - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^L \frac{w_i h_i}{s_{11,i}} d_{31,i}^y E_{3,i}^y dx \\ & + \int_0^L \left[\frac{M^2}{2C} + \frac{M M_{piezo}}{C} + \frac{M_{piezo}^2}{2C} \right] dx - W_a \end{aligned} \quad (15)$$

با استفاده از روش رایلی-ریتز، جابه‌جایی تیر دو سر لولا را به صورت زیر فرض می‌شود:

$$\xi(x) = \sum_{j=1}^k a_j x^j (x-L) \quad (16)$$

هدف پیدا کردن ضرایب مجهول a_j است، به نحوی که $\xi(x)$ به دست آمده از رابطه (۱۶) را حداقل کند. بنابراین:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (17)$$

(الف) تیر پیزوالکتریک تحت ممان متمرکز

اگر تیر پیزوالکتریک دو سر لولا، تحت ممان متمرکز در انتهای تیر قرار گیرد، کار نیروی خارجی از رابطه $W_a = M \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x=L}$ در رابطه (۱۵) و استفاده از روابط (۱۶) و (۱۷) خواهیم داشت:

$$\int_0^L \frac{\partial}{\partial a_i} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) \left[C \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) - M_{piezo} \right] dx - M \frac{\partial}{\partial a_i} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x=L} = 0 \quad (18)$$

با استفاده از عبارت فوق و در نظر گرفتن تابع تغییر مکان تیر به صورت $\xi(x) = a_1 x(x-L) + a_2 x^2(x-L)$ ضرایب مجهول به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$a_1 = \frac{1}{6} \left(\frac{M}{C} + \frac{3M_{piezo}}{C} \right), \quad a_2 = \frac{M}{6LC} \quad (19)$$

با جایگذاری ۱۹ در معادله تغییر مکان، خیز تیر در اثر ممان متمرکز به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\xi(x) = \frac{L(x-L)}{6C} \left(\frac{x}{L} + \left(\frac{x}{L}\right)^2 \right) M + \frac{M_{piezo}}{2C} x(x-L) \quad (20)$$

با استفاده از رابطه (۹) و توجه به اینکه تمامی لایه‌ها با یک ولتاژ

روابط (۱۶) و (۱۷) خواهیم داشت:

$$\int_0^L \frac{\partial}{\partial a_i} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) \left[C \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) - M_{Piezo} \right] dx - Pw \int_0^L \frac{\partial \xi}{\partial a_i} dx = 0 \quad (26)$$

با استفاده از رابطه (۲۶) و در نظر گرفتن تابع تغییر مکان تیر به صورت زیر است:

$$\xi(x) = a_1 x(x-L) + a_2 x^2(x-L) + a_3 x^3(x-L)$$

ضرایب مجهول به صورت زیر به دست می آیند:

$$a_1 = -\frac{wL^2}{24C} P + \frac{M_{piezo}}{2C} \quad (27)$$

$$a_2 = -\frac{wL}{24C} P, \quad a_3 = \frac{w}{24C} P$$

بنابراین با جایگذاری ضرایب مجهول، تغییر مکان تحت بار گسترده از رابطه زیر به دست می آید:

$$\xi(x) = -\frac{wL^3(x-L)}{24C} \left(\frac{x}{L} + \left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{x}{L}\right)^3 \right) P \quad (28)$$

$$+ \frac{m_p}{2C} x(x-L)V$$

۴- تغییر مکان تیر بای مورف دو سر لولا

تیر پیزوالکتریک بای مورف سری، تیری است که از دو لایه پیزوالکتریک با جهت پلاریزه متفاوت تشکیل شده است. ضخامت هر لایه h فرض می شود. بنابراین با استفاده از روابط

$$(9) \text{ و } (10) \text{ و جایگذاری } E_p = -\frac{V}{2h} \text{ داریم:}$$

$$C = \frac{2}{3} \frac{w}{s_{11}} h^3, \quad M_{piezo} = -\frac{wd_{31}h}{2s_{11}} V \quad (29)$$

با جایگذاری رابطه (۲۹) در روابط (۲۰)، (۲۵) و (۲۸) تغییر مکان تیر بای مورف دوسر لولا تحت انواع بار گذاری به صورت زیر به دست می آید.

۱- تغییر مکان تحت ممان متمرکز:

$$\xi(x) = \frac{s_{11}L(x-L)}{4wh^3} \left(\frac{x}{L} + \left(\frac{x}{L}\right)^2 \right) M \quad (30)$$

۲- تغییر مکان تحت نیروی متمرکز:

$$\xi(x) = -\frac{3s_{11}L^3(x-L)}{32wh^3} \left(\frac{x}{L} + \frac{5}{4} \left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{5}{4} \left(\frac{x}{L}\right)^3 \right) F \quad (31)$$

۳- تغییر مکان تحت بار گسترده:

$$\xi(x) = -\frac{s_{11}L^3(x-L)}{16h^3} \left(\frac{x}{L} + \left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{x}{L}\right)^3 \right) P \quad (32)$$

۴- تغییر مکان تحت ولتاژ اعمالی:

$$\xi(x) = \frac{3d_{31}}{8h^2} x(x-L)V \quad (33)$$

۵- بار الکتریکی ایجاد شده در تیر بای مورف

برای به دست آوردن بار الکتریکی بایستی از D_3 ، انتگرال گرفت تا بار الکتریکی به دست آید [8] بنابراین:

$$q = w \int D_3 dx = w \int (d_{31}T_1 + \epsilon_{33}^T E_p) dx \quad (34)$$

با استفاده از روابط (۶) و (۸) و (۲۹) و جایگذاری در رابطه فوق:

$$q = \frac{wl\epsilon_{33}}{4h} \left(2 + \frac{d_{31}}{s_{11}\epsilon_{33}^T} \right) V \quad (35)$$

با توجه با رابطه $q = C_p V$ و معادله (۳۵) ظرفیت تیر بای مورف به صورت زیر محاسبه می گردد.

$$C_p = \frac{wl\epsilon_{33}}{4h} \left(2 + \frac{d_{31}}{s_{11}\epsilon_{33}^T} \right) \quad (36)$$

حال می توان ممان ایجاد شده در تیر در اثر بار مکانیکی خارجی را محاسبه و با جایگذاری در رابطه $T_1 = \frac{M \cdot \xi}{I}$ و استفاده از رابطه (۳۴) بار الکتریکی را برای نقاط مختلف تیر بای مورف محاسبه نمود. نتایج به صورت زیر می باشد:

۱- بار الکتریکی تولید شده تحت بار متمرکز در وسط:

$$q = \frac{3d_{31}F}{8h^2} x^2, \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \quad (37)$$

۲- بار الکتریکی تولید شده تحت بار گسترده:

$$q = \frac{3d_{31}w}{4h^2} \left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) P \quad (38)$$

ولتاژ ایجاد شده در نقاط مختلف را می توان از رابطه زیر محاسبه نمود:

$$V = \frac{q}{C_p} \quad (39)$$

۶- تحلیل تیر یونی مورف

در محاسبات تحلیلی از برنامه نوشته شده برای تیر n لایه پیزوالکتریک دو سر لولا تحت انواع بارگذاری، توسط نرم افزار MATLAB استفاده شده است.

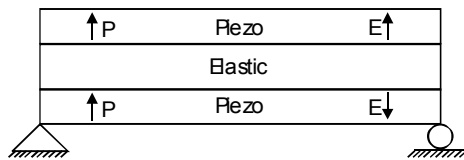
مثال عددی ۱- یک تیر پیزوالکتریک سه لایه و دو سر لولا مطابق شکل ۲ به طول تیر $0.15m$ و عرض $0.01m$ تحت ولتاژ $250V$ در هر لایه قرار دارد. ضخامت لایه الاستیک $0.01m$ و ضخامت لایه های پیزوالکتریک $0.005m$ می باشد. مدول الاستیسیته لایه الاستیک برابر $200GPa$ و لایه های پیزوالکتریک از جنس PZT-5A در نظر گرفته شده که خواص آن در زیر آمده است [۸]. هدف تعیین تغییر مکان تیر با استفاده از رابطه (۳۳) و مقایسه آن با حل عددی نرم افزار ANSYS می باشد.

ماتریس سختی ماده پیزوالکتریک به صورت زیر است:

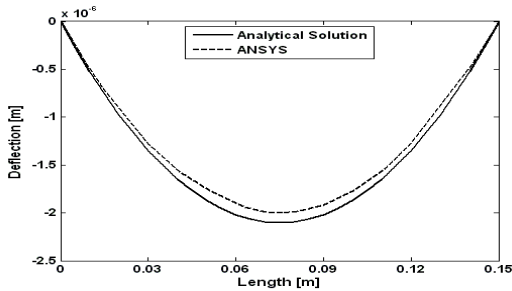
$$C = \begin{bmatrix} 121 & 75/9 & 75/4 & 0 & 0 & 0 \\ 75/9 & 1121 & 75/4 & 0 & 0 & 0 \\ 75/4 & 75/4 & 111 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 21 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22/6 \end{bmatrix} GPa$$

ثابت پیزوالکتریک به صورت زیر است:

$$e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 12/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12/3 & 0 & 0 \\ -5/4 & -5/4 & 15/8 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{C}{m}$$



شکل (۲) نمایش تیر سه لایه پیزوالکتریک دو سر لولا



شکل (۳) مقایسه حل تئوری و نرم افزار ANSYS برای تغییر مکان تیر سه لایه و دو سر لولا تحت ولتاژ $250V$

خیز تیر یونی مورف را می توان از روابط (۲۲) و (۲۵) و (۲۸) به دست آورد. در این روابط باید به جای C, M_{piezo} با استفاده از روابط (۹) و (۱۰)، مقادیر زیر را قرار داد:

$$M_{piezo} = \frac{d_{31} w}{2} \frac{h_m (h_p + h_m)}{(h_m s_p + h_p s_m)} V \quad (40)$$

$$C = \frac{w.A}{12 s_m s_p (h_m s_p + h_p s_m)}$$

که در این رابطه

$$A = (h_p^3 s_m^2 + 6 h_p^2 h_m s_m s_p + 6 h_m^2 h_p s_m s_p + 6 h_m^3 s_p^2 + h_m^3 s_p^2)$$

در رابطه فوق زیر نویس m مربوط به ماده الاستیک و زیر نویس p مربوط به خواص ماده پیزوالکتریک می باشد.

ظرفیت تیر یونی مورف و بار الکتریکی ایجاد شده در آن را می توان به طریق مشابه تیر بای مورف محاسبه نمود، که نتیجه به صورت زیر است:

$$C_p = \frac{l w}{h_p} \left(\epsilon_{33}^T - \frac{d_{31}^2 h_m (s_m h_p^2 + s_p h_m^2)}{A} \right) \quad (41)$$

بار الکتریکی ایجاد شده در تیر یونی مورف در اثر نیروی متمرکز F در وسط و همچنین تحت بار گسترده P به ترتیب از روابط (۴۲) و (۴۳) به صورت زیر به دست می آید.

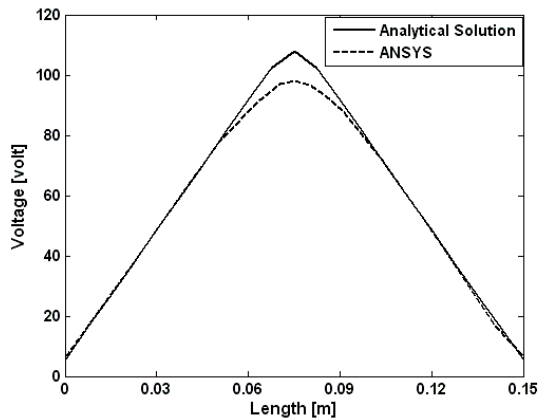
$$q = \left[\left(\frac{3 d_{31} S_m}{2 A} (2 h_p h_m s_p + h_m^2 s_p + h_p^2 s_m) \right) x^2 \right] F \quad (42)$$

$$q = \left(\frac{6 d_{31} w S_m}{A} (2 h_p h_m s_p + h_m^2 s_p + h_p^2 s_m) \right) \times \left(\frac{L x^2}{4} - \frac{x^3}{6} \right) P \quad (43)$$

برای محاسبه ولتاژ ایجاد شده نیز کافیت با توجه به رابطه (۳۹) بار الکتریکی بر ظرفیت تیر یونی مورف تقسیم شود.

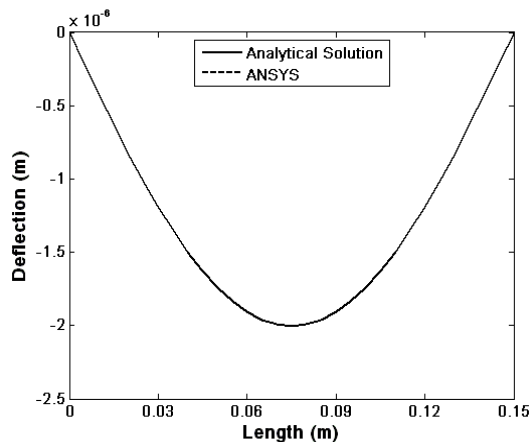
۷- مثال عددی

در این قسمت جهت اطمینان از صحت روابط تحلیلی به دست آمده در قسمتهای قبل در قالب مثال هایی، تغییر مکان تیر سه لایه پیزوالکتریک، تغییر مکان تیر بای مورف و یونی مورف و همچنین ولتاژ ایجاد شده در آنها بررسی شده و نتایج به دست آمده با نرم افزار ANSYS مقایسه خواهد شد. لازم به ذکر است،



شکل (۵) مقایسه ولتاژ ایجاد شده در تیر بای مورف تحت نیروی متمرکز بین حل تحلیلی و نرم افزار ANSYS

مثال عددی ۳- یک تیر یونی مورف دو سر لولا تحت بار گسترده 10 KN/m^2 قرار دارد. طول تیر 0.15 m و ضخامت لایه الاستیک 0.1 m و ضخامت لایه پیزوالکتریک 0.005 m و پهنای تیر 0.01 m است. همچنین مدول الاستیک لایه الاستیک برابر 200 GPa و لایه پیزوالکتریک از جنس PZT-5A می باشد. هدف محاسبه خیز تیر و ولتاژ ایجاد شده در تیر است.

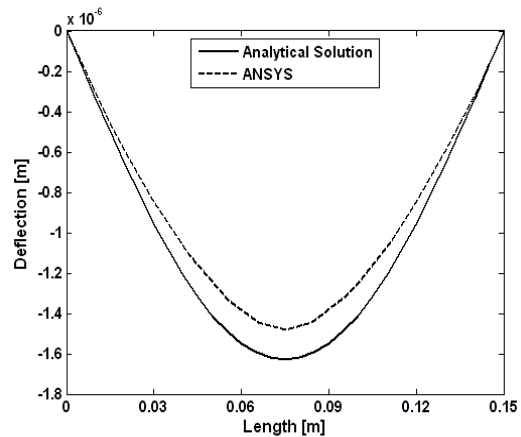


شکل (۶) خیز تیر یونی مورف تحت بار گسترده به روش تحلیلی

در شکل (۶) خیز تیر فوق نشان داده شده است. حداکثر اختلاف بین حل تئوری و نرم افزار ANSYS برابر ۷٪ است. در شکل (۷) نیز ولتاژ ایجاد شده در تیر در حالت حسگری نمایش داده شده است. حداکثر ولتاژ ایجاد شده در تیر برابر 49.5 volt است. با توجه به شکل (۷) حداکثر اختلاف بین ولتاژ تئوری و ANSYS برابر ۲٪ است.

در شکل (۳) مقایسه بین حل تحلیلی و نرم افزار ANSYS صورت گرفته است. حداکثر اختلاف در این مورد ۴٪ می باشد که مربوط به نقطه مرکز تیر است.

مثال عددی ۲- یک تیر پیزوالکتریک بای مورف سری، دو سر لولا از جنس PZT-5A تحت نیروی متمرکز 1 N در مرکز تیر قرار دارد. طول تیر 0.15 m و ضخامت هر لایه 0.1 m و پهنای تیر 0.01 m است. هدف محاسبه خیز تیر با استفاده از رابطه (۳۱) و ولتاژ ایجاد شده در آن با استفاده از رابطه (۳۹) مقایسه آن با حل عددی نرم افزار ANSYS می باشد.



شکل (۴) مقایسه نتایج تحلیلی و نرم افزار المان محدود برای تغییر مکان تیر بای مورف تحت نیرو

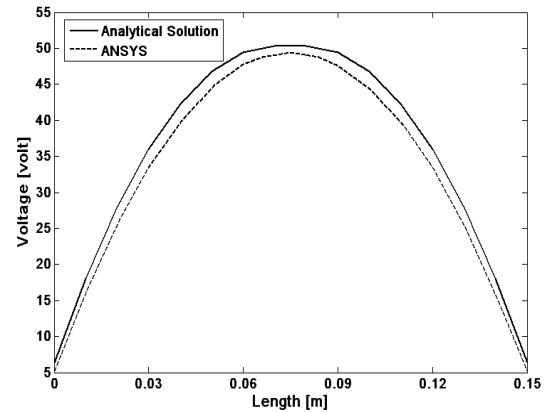
در شکل (۴) مقایسه بین حل تحلیلی و المان محدود صورت گرفته است. حداکثر اختلاف در این مورد برابر ۹٪ است. با جایگذاری روابط (۳۶) و (۳۷) در رابطه (۳۹) ولتاژ تولید شده در تیر بای مورف را می توان محاسبه نمود. در شکل (۵) مقایسه بین حل تحلیلی صورت گرفته و حل عددی برای ولتاژ ایجاد شده در تیر بای مورف تحت نیروی متمرکز نشان داده شده است.

۹- فهرست علائم

C	ماتریس سختی N/m^2
D	جابه جایی الکتریکی C/m^2
d	ثابت پیزوالکتریک C/N
E	میدان الکتریکی N/C
e	ثابت پیزوالکتریک
h	ضخامت m
K°	انحناء
l	طول m
M	ممان $N.m$
q	بار الکتریکی
S	کرنش
T	تنش N/m^2
V	ولتاژ
W	کار
w	عرض m
\bar{Z}	تار خشی
ε	ثابت دی الکتریک F/m
π	انرژی پتانسیل
	زیر نویس:
i, j, k	شمارنده
m	ماده الاستیک
p	ماده پیزوالکتریک

۱۰- مراجع

- [1] Reza Moheimani S.O., Fleming A.J., Piezoelectric transducers for vibration control and damping. - (Advances in industrial control), Springer-Verlag London Limited, UK, 2006.
- [2] Gordan T.L., Ounaies Z., Piezoelectric Ceramics Characterization, ICASE Report, NO.28, 2001.



شکل (۷) مقایسه ولتاژ تولید شده در تیر یونی مورف در حالت حسگری به روش تئوری و نرم افزار ANSYS

۸- نتیجه گیری

در این تحقیق با استفاده از اصل مینیمم انرژی پتانسیل و روش رابلی - ریتز معادلات تغییر مکان تیر چند لایه پیزوالکتریک تحت شرط مرزی دو سر لولا برای بار گذاری های مختلف به دست آورده شد. سپس نتایج تحلیلی به دست آمده برای تیرهای بای مورف و یونی مورف ساده شده و بار الکتریکی و ولتاژ تولید شده در آنها در حالت حسگری محاسبه گردید. برای بررسی صحت روابط به دست آمده تغییر مکان تیر سه لایه تحت ولتاژ خارجی، تغییر مکان تیر بای مورف تحت نیروی متمرکز و ولتاژ ایجاد شده در آن در حالت حسگری و تغییر مکان تیر یونی مورف تحت بار گسترده و ولتاژ ایجاد شده در آن، به صورت تحلیلی و به کمک نرم افزار ANSYS مورد بررسی و مقایسه قرار گرفت، که مطابقت خوبی را نشان داد. نتایج نشان داد حداکثر ولتاژ ایجاد شده در تیرهای بای مورف و یونی مورف دو سر لولا در حالت حسگری در وسط تیر می باشد که تیر بیشترین خیز را در اثر بار گذاری دارد. همچنین افزایش ولتاژ متناسب با افزایش خیز تیر است و هرچه از تکیه گاه تیر دورتر شویم، دقت داده های مساله کاهش پیدا می کند. در نهایت اینکه با استفاده از لایه های پیزوالکتریک در حالت حسگری می توان خیز تیرها را با استفاده از ولتاژ ایجاد شده در لایه پیزوالکتریک نمایش داد. همچنین می توان در حالت عملگری با اعمال ولتاژ خارجی به لایه پیزوالکتریک خیز تیرها را کنترل نمود (خیز را می توان کم یا زیاد کرد).

- [3] Park J.K., Moon W.K., Constitutive Relations for Piezoelectric Benders Under Various Boundary Conditions, *Journal Sensors and Actuator A: Physical*, volume 117, 2005, pp. 159-167.
- [4] Smits J.G., Choi W., The Constituent Equations of Piezoelectric Heterogeneous Bimorphs, *IEEE Transactions on Ultrasonic, Ferroelectrics, and Frequency Control*, Volume 38, No.3, 1991.
- [5] Yocum M., Abramovich H., Static Behavior of Piezoelectric Actuated Beams, *Computers & Structures*, Volume 80, Number 23, 2002, pp. 1797-1808
- [6] Fernandes A., Pouget J., Analytical and numerical approaches to piezoelectric bimorph, *International Journal of Solid and Structures*, Volume 40, 2003, pp. 4331- 4352.
- [7] Balls R.G., Schlaak H.F., Schmid A.J., The Constituent Equations of Piezoelectric Multilayer Bending Actuators in Closed Analytical Form and Experimental Results, *Journal Sensors & Actuators .A: Physical*, 2006, pp. 1-7.
- [8] Yang J., An Introduction to The Theory of Piezoelectricity, Department of Engineering Mechanics University of Nebraska-Lincoln, U.S.A. , 2005.