پائیز ۱۳۹۳/ سال هفتم/ شماره دوم

فصلنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک جامدات

www.jsme.ir

فصلنامه علمی پژوهشی
مهندسی مکانیک جامدات

کمانش خطی وغیرخطی صفحات دایروی/حلقوی گرافن ارتوتروپیک به کمک تئوری الاستیسیته غیرموضعی

مصطفی صادقیان[۱،*]، مهرداد جبارزاده[۲]

* نویسنده مسئول: msadeghian@mshdiau.ac.ir

چکیده

در این مقاله، تحلیل خطی و غیرخطی کمانش صفحات نسبتا ضخیم دایروی/حلقوی گرافن با خواص ارتوتروپیک بر پایه الاستیک تحت بار مکانیکی مورد بررسی قرار می‌گیرد. به کمک تئوری الاستیسیته غیرموضعی، اصل کار مجازی، تئوری مرتبه اول برشی و کرنش‌های غیرخطی فون-کارمن، روابط حاکم برحسب جابجایی‌ها بدست آمده و از روش مربعات دیفرانسیلی (DQ) همراه با توزیع غیریکنواخت نقاط (چیبشف-گوس-لوباتو) استفاده شده است. برای اعتبار سنجی، نتایج بدست آمده با نتایج کمانش در مراجعدیگر مقایسه شده و اثرات ضریب غیرموضعی، ضخامت، شعاع و پایه الاستیک، بر بارهای بی بعد کمانش مورد بررسی قرار گرفته است و همچنین نتایج تحلیل به روش تئوری غیر موضعی و موضعی با یکدیگر مقایسه شده اند. از نتایج مشاهده می‌شود که بار بی‌بعد کمانش صفحات گرافن با کاهش انعطاف پذیری از نظر شرط مرزی، با افزایش ضریب غیرموضعی، افزایش بیشتری می‌یابد و همچنین با افزایش شعاع صفحه، اختلاف نتایج تحلیل غیر موضعی و موضعی بیشتر می‌شود.

واژه‌های کلیدی

کمانش، صفحه دایروی/حلقوی، ارتوتروپیک، تئوری غیرموضعی الاستیسیته، روش مربعات دیفرانسیلی

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی مشهد

۲-استادیار، دانشکده مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی مشهد

۱- مقدمه

با توسعه روزافزون علم و فناوری، مواد و ساختارهایی با خواص برتر و پیشرفته مورد نیاز است. فناوری نانو[۱] به مواد و ساختارها در مقیاس نانو می‌پردازد و صفحات گرافن زیر شاخه ای از این ریز ساختارها است که در ساخت باطری‌ها[۲]، حسگرهای بیولوژیکی و شیمیایی[۳]، سلول-های خورشیدی[۴] و غیره کاربرد دارد. صفحات گرافنیک لایه ای از دسته کربن هستند که در یک ساختار شش ضلعی(لانه زنبوری) قرار گرفته‌اند و در واقع برای اولین بار به عنوان یک کریستال دو بعدی مطرح و نخستین بار در سال ۲۰۰۴ تولید شدند[۵]. گرافن از نظر تئوری، به دلیل داشتن یک سطح خاص بزرگ، تحرک پذیری ذاتی بالا، مدول یانگ و هدایت حرارتی بالا در سال‌های اخیر توجه بسیاری از محققین را به خود جلب کرده است[۶].

مشاهدات تجربی [۷] یکی از شیوه‌های مدلسازی ساختارهای نانو هستند که به دلیل پر هزینه بودن آن از روش های دیگری نظیر: مدلسازی اتمی، مکانیک محیط پیوسته اتمی هیبرید و مکانیک محیط های پیوسته استفاده می-شود. مدلسازی اتمی شامل روش-هایی مانند دینامیک ملکولی کلاسیک، دینامیک مولکولی اتصال سفت[3] و تئوری تابعی چگالی[4] است[۸و۹]. مکانیک محیط پیوسته اتمی هیبرید این امکان را می‌دهد تا پتانسیل درون اتمی را در تحلیل محیط پیوسته با برابر قرار دادن انرژی پتانسیل ساختار مواد نانو با انرژی کرنش مکانیکی المان حجمی مدل محیط پیوسته بدست آید[۱۰]. مدلسازی به روش محیط‌های پیوسته به مراتب نسبت به دو روش قبل کم هزینه-تر بوده و شامل تئوری‌های کلاسیک(موضعی)، تئوری الاستیسته غیرموضعی ارینگن[۱۱]، تئوری الاستیسیته گرادیان کرنشی اصلاح شده[5][۱۲] و تئوری تنش کوپل اصلاح شده[6][۱۳] است که برای ساختارهای نانو در سیستم‌هایی با مقیاس بزرگ استفاده می‌شوند[۱۴]. به این دلیل از مدلسازی به روش محیط پیوسته به عنوان راهی در تحلیل ساختارهایی نظیر کمانش می توان استفاده کرد. در این بین، تئوری الاستیسته غیرموضعی ارینگن دارای روابط حاکم نسبتا ساده تری است و اثر مقیاس کوچک در ساختارهایی با مقیاس نانو و میکرو را محاسبه می کند.

تحقیقات گسترده ای در زمینه صفحات نانو بر اساس تئوری غیرموضعی ارینگن صورت گرفته است. از جمله این محققین می توان به پرادهان و همکاران[۱۵]، اشاره کرد که کمانش ورق‌های مستطیلی تک لایه گرافن را با استفاده از روش DQبررسی کرده و نشان دادند که ضریب غیرموضعی تاثیر بسزایی بر روی صفحات گرافن دارد و باعث کاهش بارهای کمانش بر آن ها می-شود. سماعی و همکاران[۱۶]، پاسخ کمانشی صفحات گرافن مستطیلی ایزوتروپیک تحت بارگذاری یکنواخت را به صورت تحلیلی ارائه کردند و در آن برای مدل سازی صفحات گرافن نسبتا ضخیم از تئوری مرتبه اول برشی میندلین استفاده نمودند. آن ها در مقاله خود رفتار کمانشی نانو ورق مستطیلی بر روی بستر پسترناک را با استفاده از مدل غیرموضعی صفحه میندلین به صورت تحلیلی مورد بررسی قرار دادند. فرج پور و همکاران[۱۷] کمانش صفحات گرافن با ضخامت متغیر را بررسی نموده و نشان دادند رفتار کمانش صفحه گرافن تک لایه بشدت به ضریب غیرموضعی وابسته است. نارندر و گوپالکریشنن[۱۸]، به تحلیل دمای کمانش بحرانی در نانو لوله‌های تک لایه براساس مدل تیر تیموشنکو پرداخته و مشاهده کردند که اثرات ضریب غیرموضعی و ضریب پایه وینکلر دو جزء مهم در تحلیل کمانش حرارتی صفحات

[3]tight-binding molecular dynamics
[4]density functional theory
[5]Modified Strain Gradient Elasticity
[6]Modified Couple Stress Theory

گرافن هستند. در تحقیق دیگری، لیم و همکاران [۱۹]، به بررسی کمانش حرارتی نانو میله ها پرداختند. آن ها در تحلیل خویش از تئوری غیرموضعی ارینگن برای بررسی نانو میله‌ها و نانو لوله‌ها و نانو تیرها پرداخته و تاثیر تغییرات دما بر کمانش بحرانی را ارزیابی کردند. فرج پور و همکاران[۲۰]، کمانش ورق های مستطیلی با خواص ارتوتروپیک را با استفاده از روش DQ ارائه کردند. تجزیه و تحلیل ارتعاشات حرارتی گرافن تک لایه مستطیل شکل تعبیه شده در محیط الاستیک پلیمر با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرموضعی توسط پرسنا کومار و همکاران[۲۱]، مورد مطالعه قرار گرفت که آن‌ها در تحلیل خود از روش ناویر استفاده کردند. امام [۲۲]، مدلی برای تحیل کمانش و پس کمانش نانوتیرها ارائه نمود که برای تئوری های گوناگون نظیر تئوری مرتبه اول برش و مراتب بالاتر و کلاسیک مناسب است. محمدی و همکاران[۲۳]، به تحلیل رفتار کمانشی صفحات ارتوتروپیک مستطیلی تک لایه نانو در محیط حرارتی بر پایه الاستیک به کمک روش DQ بررسی کرد. آن-ها در تحقیق خود شرط مرزی مختلف را بررسی کردند و نشان دادند که بارهای کمانش صفحات گرافن به ضریب غیرموضعی وابسته است. سرامی و ازهری[۲۴]، به تحلیل ارتعاشات و کمانش صفحات مستطیلی به روش نوار[7] محدود پرداختند و صفحه گرافن را با خاصیت ایزوتروپیک و ارتوتروپیک برای شرایط تکیه گاهی مختلف بررسی نمودند. گلمکانی و رضاطلب[۲۵]کمانش صفحات ارتوتروپیک مستطیلی تحت بارهای غیریکنواخت را با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی و به کمک روش مربعات دیفرانسیلی(DQ) بررسی نمودند. در مقاله آن ها تمام لبه های صفحه گرافن تحت بار متغیر خطی فرض شد و مشاهده کردند که با افزایش ضریب غیرموضعی بارهای کمانش در ابتدا به صورت غیرخطی سپس به صورت خطی کاهش می‌یابند.

در زمینه کمانش صفحات دایروی گرافن تحت بارهای مکانیکی درون صفحه ای، کارهای اندکی ارائه شده است که از جمله آن ها فرج پور و همکاران[۲۶] هستند که تحلیل کمانش متقارن ورق های دایروی گرافن تحت بارگذاری یکنواخت شعاعی به کمک تئوری کلاسیک را ارائه کردند. همچنین در پژوهش راوری و شهیدی[۲۷]، از روش تفاضل محدود برای کمانش نانوورق های دایروی حلقوی به کمک تئوری کلاسیک استفاده شده است. بدرود و همکاران[۲۸]، در پژوهش خود کمانش متقارن و غیرمتقارن نانو ورق های نازک، با بهره گیری از تئوری مرتبه اول برشی غیرموضعی ارینگن همراه با کرنش های خطی، بررسی کردند. آن‌ها اثرات پارامترهای هندسی نانو ورق، شرایط تکیه گاهی و پارامترهای غیر موضعی بر روی رفتار کمانشی نانو ورق دایروی و حلقوی را ارزیابی کردند.

در پژوهش حاضر تحلیل کمانش مکانیکی صفحات نسبتا ضخیم دایره‌ای گرافن همراه با خصوصیات ارتوتروپیک وکرنش‌های غیرخطی بررسی می شود. اثرات مقیاس کوچک به کمک تئوری الاستیسیته غیرموضعی ارینگن اعمال شده است. معادلات تعادل از روش انرژی محاسبه و برای حل آن‌ها از روش عددی مربعات دیفرانسیلی استفاده شده است.

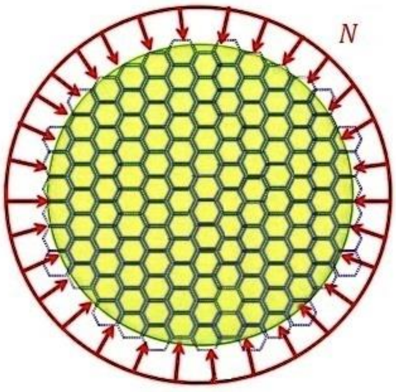
۲- روابط حاکم

شکل (۱)، یک صفحه گرافن دایره‌ای و شکل ۲ مدل پیوسته آن را نشان می‌دهد. جابجایی ها بر اساس تئوری مرتبه اول برشی به صورت رابطه (۱) هستند[۲۹]:

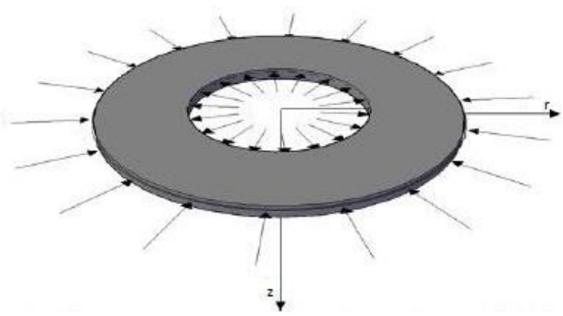
$$
\begin{aligned}
u(r,\theta,z) &= u_0(r) + z\varphi_r \\
v(r,\theta,z) &= 0 \\
w(r,\theta,z) &= w_0(r)
\end{aligned}
\qquad (۱)
$$

7finite strip

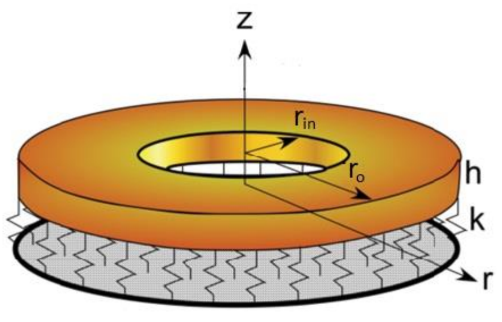
که در آن u، v و w به ترتیب مولفه‌های جابجایی هر نقطه دلخواهی در فاصله z از صفحه میانی، به ترتیب در جهات r ، θ و z می‌باشند.همچنین u_0 و w_0 مولفه‌های جابجایی صفحه میانی ورق بوده که خود تابعی از متغیر r می‌باشند و عبارت φ_r چرخش المان حول محور θ هستند.



شکل (۱) صفحه گرافن دایروی تحت بار N



شکل(۲) حلقه دایروی تحت بارگذاری



شکل (۳) مدل سه بعدی محیط پیوسته حلقه دایروی بر پایه الاستیک

با استفاده از فرضیات فون کارمن برای روابط غیرخطی کرنش- جابجایی، مولفه‌های کرنش بر حسب جابجایی به صورت رابطه (۲) بدست می‌آیند[۲۹]:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}+z\frac{d\varphi}{dr}+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2 \qquad (۲)$$
$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r}+z\frac{\varphi}{r}$$
$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}+\varphi\right)$$

در تئوری مکانیک پیوسته موضعی، تنش در یک نقطه به کرنش در همان نقطه وابسته است اما ارینگن نشان داد در تئوری مکانیک پیوسته غیرموضعی تنش در یک نقطه به کرنش در تمام محیط پیوسته وابسته است[۱۱].معادله حاکم درتئوری مکانیک پیوسته غیرموضعی توسط ارینگن به صورت زیر ارائه شده است[۱۱]:

$$\sigma^{nl} - \mu\nabla^2\sigma^{nl} = \sigma^l \qquad (۳)$$

دررابطه فوق μ ضریب غیرموضعی بوده و لاپلاسین توسط رابطه (۴) تعریف می‌شود:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\partial}{r\partial r}+\frac{\partial^2}{r^2\partial\theta r^2} \qquad (۴)$$

که، σ^{nl} تانسورتنش غیرموضعی و σ^l تانسورتنش موضعی است که به صورت رابطه (۵) بیان می‌شود:

$$\sigma^l = C:\varepsilon \qquad (۵)$$

دراین تحقیق صفحه گرافن به صورت ورق ارتوتروپیک درنظر گرفته شده که C ماتریس سختی بوده و از رابطه (۶) تعیین می‌شود،

$$C = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{(1-\nu_{12}\nu_{21})} & \frac{\nu_{12}E_2}{(1-\nu_{12}\nu_{21})} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_2}{(1-\nu_{12}\nu_{21})} & \frac{E_2}{(1-\nu_{12}\nu_{21})} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \qquad (۶)$$

بنابراین باترکیب معادلات(۳) و (۵) روابط تنش-کرنش عبارت‌اند از:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r{}^{nl} \\ \sigma_\theta{}^{nl} \\ \sigma_{rz}{}^{nl} \end{Bmatrix} - \mu\nabla^2 \begin{Bmatrix} \sigma_r{}^{nl} \\ \sigma_\theta{}^{nl} \\ \sigma_{rz}{}^{nl} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{(1-\nu_{12}\nu_{21})} & \frac{\nu_{12}E_2}{(1-\nu_{12}\nu_{21})} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_2}{(1-\nu_{12}\nu_{21})} & \frac{E_2}{(1-\nu_{12}\nu_{21})} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} \qquad (۷)$$

E_1 و E_2 مدول الاستیسیته در جهات ۱ و ۲ و ν_{12} و ν_{21} ضریب پواسون در جهات مذکور و G_{12} مدول برشی هستند.

نتیجه‌های تنش به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۱]:

$$(N_r,N_\theta,Q_r)^{nl} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_r{}^{nl},\sigma_\theta{}^{nl},\sigma_{rz}{}^{nl})dz \qquad (۸)$$

$$(M_r,M_\theta)^{nl} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_r{}^{nl},\sigma_\theta{}^{nl})zdz \qquad (۹)$$

Hضخامت صفحه گرافن است. برای تعیین معادلات تعادل از اصل حداقل انرژی پتانسیل استفاده می‌شود:

$$\Pi = U + \Omega \qquad (۱۰)$$

که Πانرژی پتانسیل کل سیستم، Uانرژی کرنشی سیستم و Ωانرژی پتانسیل بارهای خارجی است. طبق این اصل، وقتی سیستمی در حال تعادل است، تغییرات انرژی پتانسیل آن سیستم صفر است:

$$\delta\Pi = \delta U + \delta\Omega \cong 0 \qquad (۱۱)$$

مقادیر تغییرات انرژی کرنشی سیستم [۲۸] و انرژی پتانسیل بارهای خارجی به صورت روابط (۱۲) و (۱۳) تعیین می‌شوند:

$$U = \frac{1}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{r} \sigma^{nl}{}_{ij}\varepsilon_{ij} r dr\, d\theta dz = \frac{1}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{r} (\sigma^{nl}{}_r\varepsilon_{rr} + \sigma^{nl}{}_\theta\varepsilon_{\theta\theta} + \sigma^{nl}{}_{r\theta}\varepsilon_{r\theta} + \sigma^{nl}{}_{rz}\varepsilon_{rz} + \sigma^{nl}{}_{\theta z}\varepsilon_{\theta z}) r dr\, d\theta dz \qquad (۱۲)$$

$$\Omega = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{r} N\left(\frac{d(ru_r)}{dr} + \frac{du_\theta}{d\theta}\right) dr\, d\theta dz \qquad (۱۳)$$

انرژی پتانسیل پایه الاستیک به صورت رابطه (۱۴) است[۳۰:]

$$V_w = \frac{1}{2}\int_A kw^2 dA \qquad (۱۴)$$

که k ضریب پایه الاستیک است. با استفاده از معادلات فوق، روابط تعادل بر حسب منتجه‌های تنش غیرموضعی به صورت رابطه (۱۵) حاصل می‌شوند:

$$\delta u: \quad -N^{nl}{}_r - r\frac{dN^{nl}{}_r}{dr} + N^{nl}{}_\theta + N = 0 \qquad (۱۵)$$

$$\delta\varphi: \quad -r\frac{dM^{nl}{}_r}{dr} + M^{nl}{}_\theta + rQ^{nl}{}_r - M^{nl}{}_r = 0 \qquad (۱۶)$$

$$\delta w: \quad Q^{nl}{}_r + r\frac{dQ^{nl}{}_r}{dr} + \frac{d}{dr}\left(rN^{nl}{}_r\frac{dw}{dr}\right) - kw = 0 \qquad (۱۷)$$

به کمک رابطه (۳) معادلات تعادل بر حسب منتجه‌های تنش موضعی از روابط (۱۸) تا (۱۹) بدست می‌آیند:

$$-N_r - r\frac{dN_r}{dr} + N_\theta + N = 0 \qquad (۱۸)$$

$$-r\frac{dM_r}{dr} + M_\theta + rQ_r - M_r = 0 \qquad (۱۹)$$

$$Q_r + r\frac{dQ_r}{dr} + (1-\mu\nabla^2)\left[\frac{d}{dr}\left(rN_r\frac{dw}{dr}\right) - kw\right] = 0 \qquad (۲۰)$$

نتیجه‌های تنش موضعی به کمک روابط (۲)، (۴) و (۵) بر حسب جابجایی‌ها به صورت:

$$\begin{aligned}
N_r{}^l &= A_{11}\left(\frac{du_0}{dr} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2\right) + A_{12}\left(\frac{u_0}{r}\right)\\
N_\theta{}^l &= A_{12}\left(\frac{du_0}{dr} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2\right) + A_{22}\left(\frac{u_0}{r}\right)\\
Q_r{}^l &= A_{33}\left(\frac{dw}{dr}\right)\\
M_r{}^l &= D_{11}\left(\frac{d\varphi}{dr}\right) + D_{12}\left(\frac{\varphi}{r}\right)\\
M_\theta{}^l &= D_{12}\left(\frac{d\varphi}{dr}\right) + D_{22}\left(\frac{\varphi}{r}\right)
\end{aligned} \qquad (۲۱)$$

هستند، که ضرایب این معادلات عبارتند از :

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \frac{E_1 h}{(1-\nu_{12}\nu_{21})}, \quad A_{12} = \frac{\nu_{12}E_2 h}{(1-\nu_{12}\nu_{21})}\\
A_{33} &= (5/6)G_{12}h\\
D_{11} &= \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})}, D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})}\\
D_{12} &= \frac{\nu_{12}E_2 h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})}
\end{aligned} \qquad (۲۲)$$

به کمک روابط (۲۱) و (۲۲) معادلات تعادل بر اساس جابجایی‌ها به صورت روابط (۲۲) تا (۲۴) بدست می‌آیند:

$$A_{11}\Big(\frac{du_0}{dr}+\frac{1}{2}\big(\frac{dw}{dr}\big)^2\Big)+A_{12}\left(\frac{u_0}{r}\right) + rA_{11}\left(\frac{d^2u_0}{dr^2}+\frac{d^2w}{dr^2}\frac{dw}{dr}\right) + A_{12}\left(\frac{du_0}{dr}\right) - A_{12}\frac{u_0}{r} - A_{12}\left(\frac{du_0}{dr}+\frac{1}{2}\big(\frac{dw}{dr}\big)^2\right) - A_{22}\left(\frac{u_0}{r}\right)=0 \tag{۲۳}$$

$$-rD_{11}\frac{d^2\varphi}{dr^2}+D_{22}\left(\frac{\varphi}{r}\right)+rA_{33}\left(\frac{dw}{dr}\right)-D_{11}\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)=0 \tag{۲۴}$$

$$r\Big(A_{11}\big(\frac{du_0}{dr}+\frac{1}{2}\big(\frac{dw}{dr}\big)^2\big)+A_{12}\left(\frac{u_0}{r}\right)\Big)\frac{d^2w}{dr^2} + \left(A_{11}\left(\frac{du_0}{dr}+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2\right) + A_{12}\left(\frac{u_0}{r}\right)\right)\frac{dw}{dr} + r\Big[A_{11}\Big(\frac{d^2u_0}{dr^2}+\frac{d^2w}{dr^2}\frac{dw}{dr}\Big] + A_{12}\Big[\frac{-u_0}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{du_0}{dr}\Big]\Big)\Big]\left(\frac{dw}{dr}\right) + A_{33}\left(\frac{dw}{dr}\right)+rA_{33}\frac{d^2w}{dr^2} + (1-\mu\nabla^2)\Big[\Big(N_{cr}\big(r\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{dw}{dr}\Big)-kw\Big]=0 \tag{۲۵}$$

در اینجا برای تحلیل کمانش از روش تعادل همسایگی استفاده می‌شود. در این روش معادله تعادل را می‌توان از تغییر بسیار کوچک در نزدیکی حالت تعادل به دست آورد. بدین منظور نتیجه‌های جابجایی، نیرو و گشتاور به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$u=u^0+u^1 \qquad w=w^0+w^1 \tag{۲۶}$$

$$\varphi=\varphi^0+\varphi^1 \quad N_r={N_r}^0+{N_r}^1 \quad N_\theta={N_\theta}^0+{N_\theta}^1 \quad Q_r={Q_r}^0+{Q_r}^1 \quad M_r={M_r}^0+{M_r}^1 \quad M_\theta={M_\theta}^0+{M_\theta}^1 \tag{۲۷}$$

که در این روابط بالانویس 0 مربوط به حالت پیش کمانش و بالانویس 1 ناشی از تغییر بسیار ناچیز در حالت پایداری است.

در نتیجه به دلیل آن که در حالت پیش کمانش تغییر شکل عمودی وجود ندارد ($w^0=0$) معادلات پیش کمانش به صورت روابط (۲۸) تا (۳۰) بدست می‌آید:

$$-{N_r}^0-r\frac{d{N_r}^0}{dr}+{N_\theta}^0-N=0 \tag{۲۸}$$

$$-r\frac{d{M_r}^0}{dr}+{M_\theta}^0+r{Q_r}^0-{M_r}^0=0 \tag{۲۹}$$

$${Q_r}^0+r\frac{d{Q_r}^0}{dr}=0 \tag{۳۰}$$

با حل معادلات پیش کمانش نتیجه می‌شود:

$${N_r}^0={N_\theta}^0=N \tag{۳۱}$$

همچنین معادلات پایداری به صورت روابط (۳۲) تا (۳۴) بدست می‌آیند:

$$-{N_r}^1-r\frac{d{N_r}^1}{dr}+{N_\theta}^1=0 \tag{۳۲}$$

$$-r\frac{d{M_r}^1}{dr}+{M_\theta}^1+r{Q_r}^1-{M_r}^1=0 \tag{۳۳}$$

$${Q_r}^1+r\frac{d{Q_r}^1}{dr}+(1-\mu\nabla^2)\Big[\left({N_r}^0\frac{dw^1}{dr}\right)+\left({N_r}^1\frac{dw^1}{dr}\right)+r\frac{d{N_r}^0}{dr}\left(\frac{dw^1}{dr}\right)+r\frac{d{N_r}^1}{dr}\left(\frac{dw^1}{dr}\right)+r{N_r}^0\frac{d^2w^1}{dr^2}+r{N_r}^1\frac{d^2w^1}{dr^2}-kw^1\Big]=0 \tag{۳۴}$$

برای بی بعدسازی معادلات پایداری رابطه (۳۴) تعریف می‌شوند:

$$r^*=\frac{r}{r_0}\,,u^*=\frac{u}{h}\,,w^*=\frac{w}{r_0}\,,\varphi^*=\varphi\,,\gamma=\frac{r_0}{h} \qquad (A_{11},A_{12},A_{33})=\frac{(\overline{A}_{11},\overline{A}_{12},\overline{A}_{33})}{Eh} \qquad \overline{N}=\frac{N}{Eh}\,,\overline{k}=\frac{kr^4}{D} \tag{۳۵}$$

معادلات بی‌بعد پایداری بر حسب جابجایی‌ها از روابط(۳۶) تا (۳۸) بدست می‌آیند:

$$\frac{d^2\overline{u}_0}{dr^{*2}}(r^*.\overline{A}_{11})+\frac{d\overline{u}_0}{dr^*}(\overline{A}_{11})+\frac{\overline{u}_0}{r^*}(-\overline{A}_{22})+\frac{d^2\overline{w}}{dr^{*2}}\left(\frac{d\overline{w}}{dr^*}.\overline{A}_{11}.r^*.\delta\right)+\frac{d\overline{w}}{dr^*}.\frac{\delta}{2}(\overline{A}_{11}-\overline{A}_{12})=0 \quad (۳۶)$$

$$-r^*\overline{D}_{11}\frac{d^2\overline{\varphi}}{dr^{*2}}+\overline{D}_{22}\left(\frac{\overline{\varphi}}{r^*}\right)+r^*\overline{A}_{33}\left(\frac{d\overline{w}}{dr^*}\right)-\overline{D}_{11}\left(\frac{d\overline{\varphi}}{dr^*}\right)=0 \quad (۳۷)$$

$$r^*(\overline{A}_{11}(\frac{du_0^*}{dr^*}+\frac{\gamma}{2}\left(\frac{dw^*}{dr^*}\right)^2)+\overline{A}_{12}\left(\frac{u_0^*}{r^*}\right))\frac{d^2w^*}{dr^{*2}}+\left(\overline{A}_{11}\left(\frac{du_0^*}{dr^*}+\frac{\gamma}{2}\left(\frac{dw^*}{dr^*}\right)^2\right)+\overline{A}_{12}\left(\frac{u_0^*}{r^*}\right)\right)\frac{dw^*}{dr^*}+r^*[\overline{A}_{11}\left(\frac{d^2u_0}{dr^{*2}}+\gamma\frac{d^2w^*}{dr^{*2}}\frac{dw^*}{dr^*}\right]+\overline{A}_{12}[\frac{-u_0^*}{r^{*2}}+\frac{1}{r^*}\frac{du_0^*}{dr^*}])]\left(\frac{dw^*}{dr^*}\right)+\gamma\overline{A}_{33}\left(\frac{dw^*}{dr^*}\right)+r^*\gamma\overline{A}_{33}\frac{d^2w^*}{dr^{*2}}+\gamma(1-\overline{\mu}\overline{\nabla}^2)[\left(\overline{N}(r^*\frac{d^2w^*}{dr^{*2}}+\frac{dw^*}{dr^*}\right)-\overline{k}w^*]=0 \quad (۳۸)$$

۳- روش مربعات دیفرانسیلی

در روش مربعات دیفرانسیلی مشتق یک تابع به صورت جمع جبری مقادیر گره ای در طول دامنه نوشته می‌شود که به صورت رابطه (۳۹) بیان می شود [۳۱]:

$$\frac{d^nF}{dr^n}=\sum_{j=1}^{N}C_{ij}^{(n)}F(r_j) \quad (۳۹)$$

به طوری که $C_{ij}^{(n)}$ ضریب وزنی بوده و برای مشتق مرتبه اول به صورت زیر بدست می‌آید:

$$c_{ij}^{(1)}=\frac{P(r_i)}{(r_i-r_j)P(r_j)} \qquad i\neq j \quad (۴۰)$$

$$p(r_i)=\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N}(r_i-r_k) \quad (۴۱)$$

و هنگامی $i=j$ است داریم:

$$C_{ii}^{(1)}=-\sum_{\substack{k=1,\neq i\\i=1,2,..,N}}^{N}C_{ki}^{(n)} \quad (۴۲)$$

در رابطه فوق N تعداد گره‌ها در راستای شعاع است.

ضرایب وزنی برای مشتق‌های بالاتر به صورت رابطه (۴۳) هستند:

$$C_{ij}^{(n)}=n\left[A_{ij}^{n-1}A_{ij}^{(1)}-\frac{A_{ij}^{n-1}}{x_i-x_j}\right] \quad i\neq j$$
$$C_{ii}^{(n)}=-\sum_{\substack{k=1,\neq i\\i=1,2,..,N}}^{N}C_{ki}^{(n)} \; i=j \quad (۴۳)$$

توزیع نقاط شبکه براساس نقاط چبیشف-گوس-لوباتو به صورت زیر است :

$$r_i=\frac{a}{2}\left[1-\cos\left(\frac{\pi i}{N-1}\right)\right]_{i=0,1,...,N} \quad (۴۴)$$

شرایط مرزی که دراین مقاله مورد بررسی قرارگرفته به صورت تکیه‌گاه گیردار و ساده در نظر گرفته شده‌اند:

$$C:\begin{cases}w(r)=0,\varphi(r)=0,u(r)=0\\u(0)=0,\varphi(0)=0\end{cases} \quad (۴۵)$$

$$S:\begin{cases}w(r)=0,M_r(r)=0,u(r)=0\\u(0)=0,\varphi(0)=0\,,\dfrac{dw}{dr}=0\end{cases} \quad (۴۶)$$

۴- بحث و نتیجه گیری

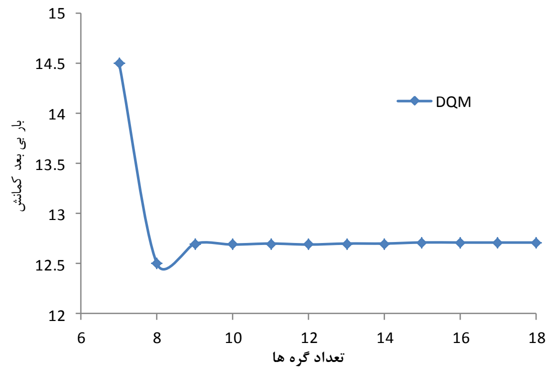
برای تعیین نتایج عددی، صفحه ارتوتروپیک تک لایه دایره‌ای توپر با شعاع $r = 10\text{nm}$، ضخامت صفحه $h = 0.34\text{nm}$، مدول الاستیسیته $E_1 = 1765Gpa$ و $E_2 = 1588Gpa$ ضرایب پواسون $\nu_{12} = 0.3$ در نظر گرفته شده است.

در ابتدا برای بررسی دقت نتایج، از عبارت‌های غیرخطی صرف نظر شده و تغییرات بارهای بی بعد کمانش بر اساس ضرایب غیرموضعی مختلف به ترتیب برای شرایط مرزی تکیه‌گاهی گیردار و ساده با مرجع [۲۸]مقایسه و در جدول (۱) ارائه شده است که تطابق خوبی را نشان می‌دهد.

جدول (۱) مقایسه بار بی بعد کمانش تحقیق حاضر با مرجع [۲۸]

μ	تکیه گاه گیردار[۲۸]	تکیه گاه گیردار(تحقیق حاضر)	تکیه گاه ساده[۲۸]	تکیه گاه ساده (تحقیق حاضر)
	بار بی بعد کمانش			
۰	۱۴/۶	۱۴/۵۹۸	۴/۱۵۱	۴/۱۵۱
۰/۵	۱۱/۰۰۱	۱۱	۳/۶۵۱	۳/۶۵۱
۱	۸/۷	۸/۶۹۸	۳/۱۵	۳/۱۴۹
۱/۵	۷/۱۳	۷/۱۲۹	۲/۶۵۳	۲/۶۵۲
۲	۶/۲۹۹	۶/۲۹۹	۲/۱۴	۲/۱۴
۲/۵	۵/۷	۵/۶۹۸	۱/۵۹۱	۱/۵۹۱
۳	۵/۱۱۱	۵/۱۱۱	۱/۱۱	۱/۱۱
۳/۵	۴/۶	۴/۵۹۷	۰/۶۱۲	۰/۶۱۱۹
۴	۴/۳۱۲	۴/۳۱۱	۰/۲۶	۰/۲۶

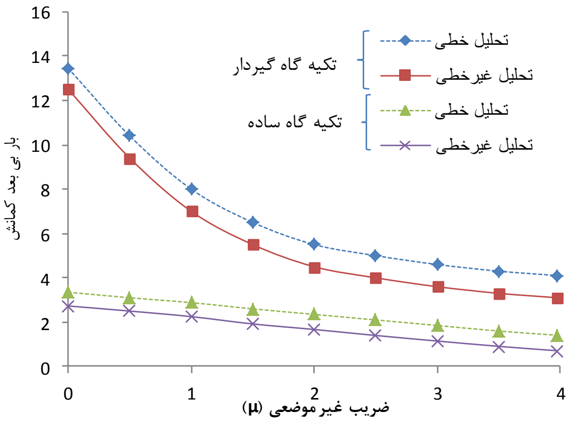
به دلیل آن که نتایج روش عددی مربعات دیفرانسیلی به تعداد گره‌ها وابسته است، نتایج عددی همگرایی تحقیق حاضر به صورت شکل (۴) می‌باشد. مطابق شکل، از تعداد گره‌های ۹ به بعد، همگرایی مطلوب حاصل می‌شود



شکل (۴) بررسی همگرایی بار بی‌بعد کمانش بر حسب تعداد گره ها

در شکل (۵) تغییرات بارهای بی‌بعد کمانش خطی و غیرخطی به ضریب‌های غیرموضعی گوناگون در شرایط بدون پایه الاستیک برای شرایط تکیه‌گاهی گیردار و ساده نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که در شرایط تکیه‌گاهی گیردار تغییرات بارهای بی‌بعد کمانش خطی و غیرخطی به صورت غیرخطی تغییر می‌کنند اما در شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده با شیب نسبتا ثابتی کاهش می‌یابد.

همچنین تاثیر افزایش ضریب غیرموضعی با کاهش انعطاف پذیری شرایط تکیه‌گاهی، افزایش می‌یابد.

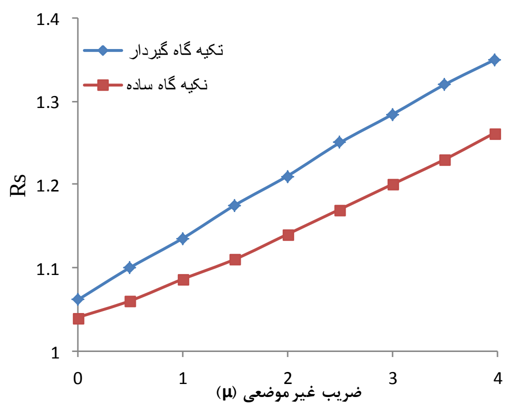


شکل (۵) تغییرات بارهای بی‌بعد کمانش به ضریب های غیر موضعی ($\bar{k}$=0)

برای مقایسه بارهای بی‌بعد کمانش در حالت غیرخطی به خطی متغیر Rsبه صورت زیر تعریف می‌شود:

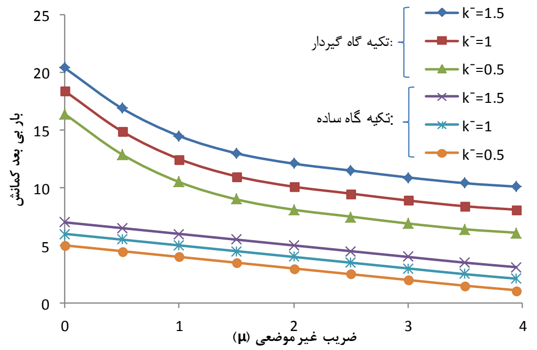
$$Rs = \frac{\text{بار بی بعد کمانش غیرخطی}}{\text{بار بی بعد کمانش خطی}}$$

شکل (۶) نسبت تغییرات بارهای بی‌بعد کمانش در حالت غیرخطی به خطی را به ضریب های غیرموضعی در شرایط بدون پایه الاستیک برای شرایط تکیه‌گاهیگیردار و ساده را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که تاثیر تحلیل غیرخطی بر تکیه‌گاه گیر دار بیشتر بوده و با افزایش ضریب غیرموضعی نتایج دو تحلیل از یکدیگر فاصله می گیرند.



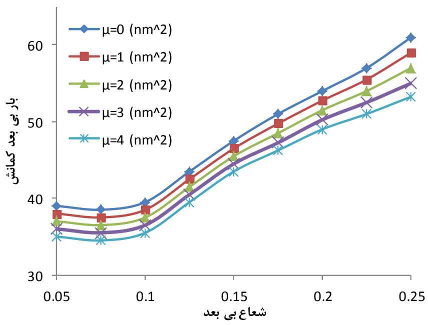
شکل (۶)تغییرات بارهای بی‌بعد کمانش به ضریب های غیر موضعی مختلف درشرایطتکیه گاهیگیردار و ساده ($\bar{k}$=0)

در شکل (۷) تغییرات بارهای بی‌بعد کمانش به ضریب-های غیرموضعی، برای ضرایب پایه الاستیک گوناگون مختلف ترسیم شده است. مشاهده می‌شود با افزایش سختی پایه الاستیک بار بی‌بعد کمانش افزایش یافته وتاثیر افزایش سختی پایه الاستیک بر تکیه گاه گیردار بیشتر از مفصلی است همچنین در تکیه گاه ساده شیب تغییرات به صورت غیرخطی بوده اما در تکیه‌گاه ساده تغییرات به صورت شیب نسبتا ثابت است.



شکل (۷) تغییرات بارهای بی‌بعد کمانش به ضریب های غیرموضعی، برای ضرایب پایه الاستیک گوناگون

شکل (۸) تغییرات بارهای بی‌بعد کمانش به شعاع بی‌بعد، برای ضریب‌های غیرموضعی گوناگون نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که در شعاع های کوچک (در حدود ۰/۱) تقریبا بار بی بعد ثابت مانده و سپس با شیب نسبتا زیاد بار بی بعد کمانش افزایش می یابد.

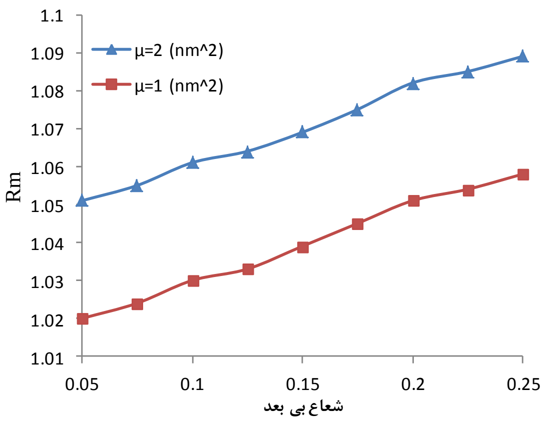


شکل(۸)تغییرات بارهای بی‌بعد کمانش به شعاع بی‌بعد($\bar{r}$)،برای ضریب‌های غیرموضعی مختلف درشرایطتکیه‌گاهیگیردار ($\bar{k}$=0)

برای بررسی اختلاف تئوری موضعی و غیرموضعی، متغیرRmبه صورت زیر تعریف می‌شود:

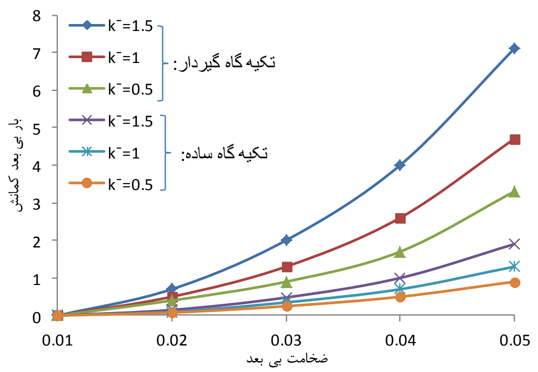
$$Rm = \frac{\text{بار بی بعد کمانش غیرموضعی}}{\text{بار بی بعد کمانش موضعی}}$$

در شکل (۹) نسبت تغییرات بارهای بی‌بعد کمانش در حالت غیرموضعی به موضعی در μ=1.2nm^2، برای شعاع‌های مختلف ترسیم شده است. مشاهده می‌شود که افزایش شعاع، اختلاف نتایج تحلیل کمانش به کمک تئوری های موضعی و غیرموضعی بیشتر می‌شود.



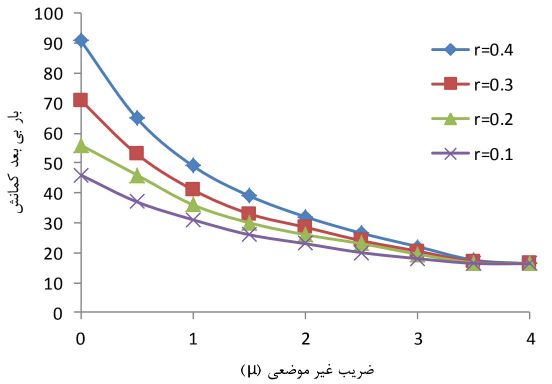
شکل(۹)تغییرات Rmبه شعاع‌های بی‌بعد

در شکل (۱۰) تغییرات بارهای بی‌بعد کمانش به ضخامت بی‌بعد، برای ضریب‌های مختلف پایه الاستیک برای شرایط تکیه‌گاهی گیردار و ساده نشان داده شده است. با توجه به شکل، با افزایش ضخامت، بار بی‌بعد کمانش افزایش یافته و همچنین در یک ضخامت معین با کاهش سختی پایه الاستیک، بار بی‌بعد کمانش کاهش می یابد.



شکل (۱۰) تغییرات بارهای بی‌بعد کمانش به ضخامت برای ضرایب پایه الاستیک گوناگون در شرایط تکیه‌گاهی گیردار وساده

در شکل (۱۱) تغییرات بارهای بی‌بعد کمانش برای صفحه حلقوی (با فرض ثابت بودن شعاع داخلی) به ضریب-های غیرموضعی برای شعاع‌های بی‌بعد گوناگون درشرایط تکیه‌گاهی گیردار نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود در حالت موضعی نتایج بار کمانش در شعاع‌های بی-بعد گوناگون، مختلف هستند اما با افزایش ضریب غیرموضعی تاثیر نسبت ابعادی کاهش یافته و نتایج بار بی بعد کمانش در هر نسبت شعاعی به سمت عدد ثابت میل می کند.



شکل(۱۱) تغییرات بارهای بی‌بعد کمانش به ضریب های غیرموضعی در شعاع‌های بی‌بعد مختلف برای صفحه حلقویدرشرایط تکیه‌گاهی گیردار ($\bar{k}$=0)

۵- نتیجه گیری

در این تحقیق تحلیل خطی و غیر خطی کمانش صفحات دایروی/حلقوی گرافن به کمک تئوری الاستیسیته غیرموضعی تحلیل شده است. از مهمترین نتایج می توان به موارد زیر اشاره کرد:

– با کاهش انعطاف‌پذیری شکل از نظر شرط مرزی، تاثیر افزایش ضریب غیرموضعی بر بار بی بعد کمانش بیشتر است.

–افزایش ضریب غیر موضعی موجب کاهش نیروی بی بعد کمانش می‌شود.

–با افزایش ضخامت، تاثیر ضریب غیرموضعی و اثر ضریب پایه الاستیک بر بار بی‌بعد کمانش کاهش می‌یابد.

– با کاهش انعطاف‌پذیری شرایط مرزی، تاثیر افزایش ضریب غیرموضعی بر تحلیل غیرخطی، افزایش می یابد. لذا تاثیرافزایش ضریب غیرموضعی بر تحلیل غیرخطی گیردار بیشتر از مفصلی می باشد.

– با افزایش شعاع صفحه، تاثیر ضریب غیرموضعی بر بار بی بعد کمانش افزایش می یابد و اختلاف نتایج تحلیل غیرموضعی و موضعی بیشتر می‌شود.

فهرست علائم

تعداد کل گره ها	n
جابه جایی در جهت ضخامت(nm)	w
جابه جایی در جهت محیطی(nm)	v
جابه جایی در جهت شعاعی(nm)	u
سفتی بستر الاستیک(kN/m)	K
شعاع صفحه(nm)	r
ضخامت ورق(m)	h
مدول الاستیسیته(GPA)	E
نسبت بار غیرموضعی به موضعی	Rm
نسبت بار کمانش غیرخطی به خطی	Rs

مراجع:

[1] Taniguchi N., On the Basic Concept of Nanotechnolog, Proceedings of the International Conference of Production Engineering, London, 1974, pp.18-23.

[2] Ma M., Tu J.P., Yuan Y.F., Wang X.L., Li K.F., Mao F., Zeng Z.Y., Electrochemical Performance of ZnO Nanoplates as Anode Materials for Ni/Zn Secondary Batteries, *Journal of Power Source*, Vol. 179, 2008, pp. 395-400.

[3] J. Yguerabide, E. E. Yguerabide , Resonance Light Scattering Particles as Ultrasensitive Labels for Detection of Analytes in a wide Range of Applications, *Journal of Cellular Biochemistry-Supplement*, 37, 2001, pp.71-81.

[4] Agesen M., Sorensen C.B., Nanoplates and Their Suitability for Use as Solar Cells, Proceeding of Clean Technology, Boston Secondary Batteries, *Journal of Power Source*, Vol. 179, 2008, pp. 395-400.

[5] Novoselov K.S., Geim A.K., Morozov S.V., Jiang D., Zhang Y., Dubonos S.V., Grigorieva I.V., Firsov A.A., Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films, *Science*, vol. 306, 2004, pp. 666–669.

[6] Xu Z.P., Buehler M.J., Geometry controls conformation of graphene sheets: membranes, ribbons, and scrolls, *ACS-Nano*, Vol. 4, 2010, pp. 3869–3876.

[7] Chiu H.Y., Hung P., Postma H.W.Ch., Bockrath M., Atomic-Scale Mass Sensing Using Carbon Nanotube Resonators, *Nano Letters*, Vol.8, 2008, pp. 4342–4346.

[8] Hernandez E., Goze C., Bernier P., Rubio A., Elastic Properties of C and BxCyNz Composite Nanotubes, *Physics Review Letters*, Vol. 80, 1998, pp. 4502–4505.

[9] Li C.Y., Chou T.W., Elastic wave velocities in single-walled carbon nanotubes, *Physics Review B*, Vol. 73, 2006, pp. 245-407.

[10] Li C., Chou T.W., Single-walled carbon nanotubes as ultrahigh frequency nanomechanical resonators, *Physics Review B*, Vol. 68, 2003, pp. 073405.

[11] Eringen A.C., *Nonlocal Continuum Field Theories*, Newyork, Springer-Verlag.

[12] Fleck N.A., Hutchinson J.W., Strain Gradient Plasticity, *Advance applied mechanics*, Vol. 33, 2002, pp. 295-361.

[13]F. Yang, A.C.M. Chong, D.C.C. Lam, P. Tong , Couple Stress Based Strain Gradient Theory for Elasticity, *International journal of solid structs*, 39, 2002, pp. 2731-2743.

[14] Parnes R., Chiskis A., Buckling of nano-fibre reinforced composites: a re-examination of elastic buckling, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 50, 2002, pp. 855–879.

[15] Pradhan S.C., Murmu T., Small Scale Effect onthe Buckling of Single-Layered Graphene Sheetsunder Biaxial Compression via Nonlocal Continuum Mechanics, *Computational Materials Science*, Vol. 47, 2009, pp. 268-274.

[16] Samaei A.T., Abbasion S., Mirsayar M.M., Buckling Analysis of a Single-Layer Graphene Sheet Embedded in an Elastic Medium Based on Nonlocal Mindlin Plate Theory, *Mechanics Research Communications*, Vol. 38, 2011, pp.481-485.

[17] Farajpour A., Danesh M., Mohammadi M., Buckling analysis of variable thickness nanoplates using nonlocal continuum mechanics, *Physica E.*, Vol. 44, 2011, pp.719–727.

[18] Narendar S., Gopalakrishnan S., Critical buckling temperature of single-walled carbon nanotubes embedded in a one-parameter elastic medium based on nonlocal continuum mechanics, *Physica E.*, Vol. 43, 2011, pp. 1185–1191.

[19] Lim C.W., Yang Q., Zhang J.B., Thermal buckling of nanorod based on non-local elasticity theory, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 47, 2012, pp. 496-505.

[20] Farajpour A., Shahidi A.R., Mohammadi M., Mohzoon M., Buckling of Orthotropic Micro/Nanoscale Plates under Linearly varying in-plane load via nonlocal continuum mechanics, *Composite Structures*, Vol. 94, 2012, pp. 1605-1615.

[21] Prasanna Kumar T.J., Narendar S., Gopalakrishnan S., Thermal vibration analysis of monolayer graphene embedded in elastic medium based on nonlocal continuum mechanics. *Composite Structures*, Vol. 100, 2013, pp. 332–342.

[22] Emam S.A., A general nonlocal nonlinear model for buckling of nanobeams, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 37, 2013, pp. 6929–6939.

[23] Mohammadi M., Farajpour A., Moradi A., Ghayour M., Shear buckling of orthotropic rectangular graphene sheet embedded in an elastic medium in thermal environment, *Composites: Part B*, Vol. 56 , 2014, pp. 629–637.

[24] Sarrami-Foroushani S., Azhari M., Nonlocal vibration and buckling analysis of single and multi-layered graphene sheets using finite strip method including van der Waals effects, *Physica E.*, Vol. 57, 2014, pp. 83–95.

[25] Golmakania M.E., Rezatalaba J., Nonuniform biaxial buckling of orthotropic nanoplates embedded in an elastic medium based on nonlocal Mindlin plate theory, *Composite Structures*, Vol. 119, 2015, pp. 238–250.

[26] Farajpour A., Mohammadi M., Shahidi A.R., Mahzoon M., Axisymmetric Buckling of the Circular Graphene Sheets with the Nonlocal continuum plate model, *Physica E.*, Vol. 43, 2011, pp. 1820–1825.

[27] KaramoozRavari M.R., Shahidi A.R., Axisymmetric buckling of the circularannular nanoplates using finite difference method, *Mechanica*, Vol. 48, 2013, pp. 135–144.

[28] Bedroud M., Hosseini-Hashemi S., Nazemnezhad R., Buckling of circular/annular Mindlinnanoplates via nonlocal lasticity, *Acta Mechanics*, Vol. 224, 2013, pp. 2663-2676.

[29] Nosier A., Fallah F., Non-linear Analysis of Functionally Graded Circular Plates under Asymmetric Transverse Loading, *International journal of non-Linear mechanic*s, Vol. 44 , 2009, pp. 928-942.

[30] Naderi A., Saidi A.R., Exact solution for stability analysis of moderately thick functionally graded, *Composite Structures*, Vol. 93, 2011, pp. 629–638.

[31] Shu C., *Differential Quadrature and Its Application in Engineering*, Berlin, Springer.