



تحلیل عددی ارتعاشات اتفاقی ورق کامپوزیتی نسبتاً ضخیم

مهدی صفایی^۱، محمد جواد محمودی^{۲*}، پدram صفرپور^۳

* نویسنده مسئول: mj_mahmoudi@sbu.ac.ir

واژه‌های کلیدی

ارتعاشات اتفاقی، ورق کامپوزیتی، تئوری
مرتب‌ه اول برشی

چکیده

در این مقاله ارتعاشات اتفاقی یک ورق کامپوزیتی مورد بررسی قرار می‌گیرد. به علت ضخامت ورق، تئوری مرتبه اول برشی در نظر گرفته می‌شود. نخست، معادلات تنش و کرنش ورق کامپوزیت برای محاسبه تنش و کرنش در نقاط مختلف ورق به دست می‌آید. سپس با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی و به کمک روش المان محدود، فرکانس‌های طبیعی ورق به دست آمده و برای صحت‌گذاری نتایج، مقایسه‌ای بین روش المان محدود و نتایج حاصل از شبیه‌سازی در نرم افزار انسیس انجام می‌شود. در نهایت جابجایی و تنش در نقاط مختلف ورق تحت تاثیر یک نیروی اتفاقی که از نوع طیف سفید باند محدود می‌باشد، به دست آمده و اثر پارامترهایی نظیر جهت-گیری الیاف و تعداد مودهای ارتعاشی به کار رفته در محاسبات، مورد بررسی قرار می‌گیرد. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد نیازی به استفاده تمامی مودهای ارتعاشی در محاسبه جابجایی و تنش نیست.

۱- دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک و انرژی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران

۲- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک و انرژی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران

۳- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک و انرژی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران

۱- مقدمه

بسیاری از سازه‌های ساخته شده توسط انسان در طول عمر خود در معرض ارتعاشات اتفاقی قرار دارند. ساختمان‌های در معرض نیروی زلزله، سازه‌های دریایی در معرض امواج دریا و سازه‌های هوایی در مقابل نیروی باد، نمونه‌هایی از این دست هستند. این ارتعاشات به نوبه خود می‌تواند باعث آسیب و یا حتی تخریب شود. بنابراین مدل‌سازی و تحلیل این سازه‌ها تحت تاثیر ارتعاشات اتفاقی ضروری به نظر می‌رسد. اینشتین در طی مقاله‌ای که در سال ۱۹۰۵ درباره حرکت براونی ارائه داد آغازگر شاخه‌ای از علم بود که بعدها ارتعاشات اتفاقی نام گرفت. وی در این مقاله به بررسی حرکت ذراتی پرداخت که در یک مایع معلق هستند و از جانب مایع به آنها نیرو وارد می‌شود [۱]. پس از اینشتین دانشمندان توجه خود را مطوف به حل این مساله کردند. اولین تحلیلی که در این زمینه انجام شد توسط اسمولاکوسفکی بود که به بررسی پاسخ در حوزه زمان پرداخت. پس از اسمولاکوسفکی، اولنیک به تحلیل پاسخ در حوزه فرکانس پرداخت که امروزه نیز این روش با توسعه بیشتری مورد استفاده قرار گرفته است. همچنین مقالات متعددی برای بررسی ارتعاشات اتفاقی سازه‌های مختلف نظیر تیرها، ورق‌ها و... به چاپ رسیده است. ارینگن، الیشاکوف و لیفشیتز از روش جمع نامحدود مودها به منظور ارائه یک حل به فرم بسته برای تیر با تکیه‌گاه ساده که در معرض بارگذاری اتفاقی بود، استفاده کردند [۲،۳]. چونان ارتعاشات اتفاقی یک ورق مستدیر روی یک سطح الاستیک با تکیه‌گاه‌های الاستیک و کشش اولیه را مورد بررسی قرار داد و با ارائه حل سری، تاثیر تکیه‌گاه‌های الاستیک، کشش اولیه و سختی سطح الاستیک را بر میانگین مربع جابجایی بررسی نمود [۴]. کراندال و ژو ارتعاشات اتفاقی ورق مثلی تحت اثر یک نیرو با چگالی طیفی باند پهن را مورد بررسی قرار دادند [۵]. ویت از روش بسط به سری برای حل معادلات حرکت ورق لایه ای استوانه‌ای تحت بارگذاری اتفاقی استفاده کرد [۶]. سدرباوم

و همکارانش ارتعاشات اتفاقی ورق لایه‌ای متقارن را با استفاده از تئوری مرتبه بالاتر برشی در دو حالت میدان فشار مورد بررسی قرار دادند. این دو حالت میدان فشار اتفاقی عبارت بودند از طیف سفید^۱ و نوسانات فشار لایه مرزی آشفته^۲ [۷]. پس از آن سدرباوم و همکاران از روش بسط به سری به منظور حل مساله ارتعاشات اتفاقی ورق لایه‌ای متقارن ضربدری و پادمقارن زاویه‌ای با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی^۳ استفاده کردند [۸]. گری و همکارانش پاسخی تحلیلی برای ارتعاشات با دامنه زیاد و ارتعاشات اتفاقی ورق لایه‌ای متقارن ارائه دادند [۹]. هاریچاندان و هاواری از روش خطی سازی معادل^۴ برای بررسی ارتعاشات اتفاقی مواد مرکب رشته‌ای استفاده کردند [۱۰]. پس از آن همان روش توسط هاریچاندان و ناجا به منظور تحلیل ارتعاشات اتفاقی یک ورق کامپوزیتی غیر خطی استفاده شد [۱۱]. کانگ و هاریچاندان روشی برای بررسی رفتار ورق لایه ای ارائه دادند که در آن، غیرخطی بودن رفتار ماده به وسیله یک چند جمله‌ای از درجه پنج تقریب زده شد [۱۲]. دای و همکاران به بررسی ارتعاشات اتفاقی یک ورق لایه‌ای با یک لایه میراگر ویسکوالاستیک وابسته به فرکانس پرداختند [۱۳].

با توجه به اهمیت موضوع ارتعاشات اتفاقی و اثر آن بر قسمت‌های مختلف سازه‌ای که تحت اثر این نیروها قرار دارد، در مقاله حاضر ارتعاشات اتفاقی یک ورق کامپوزیتی به کمک روش المان محدود مورد بررسی قرار گرفته است. ابتدا معادلات تنش-کرنش حاکم بر یک ورق کامپوزیتی با فرض حالت تنش صفحه‌ای ارائه می‌شود. سپس با استفاده از روش المان محدود و تئوری مرتبه اول برشی به محاسبه فرکانس طبیعی و شکل مودهای ورق پرداخته می‌شود. نتایج این تحلیل با نتایج حاصل از مدل‌سازی در نرم افزار

1 - White Noise

2 - Turbulent Boundary Layer Pressure Fluctuation

3 - First-order Shear Deformation plate Theory (FSDT)

4 - Equivalent Linearization

حسب مدول الاستیسیته، مدول برشی و نسبت پواسون به صورت رابطه (۲) تعریف می‌شوند.

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}},$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{13} = G_{13}, \quad (2)$$

$$Q_{33} = G_{33}, \quad Q_{23} = G_{23}$$

با توجه به اینکه رابطه (۱) در دستگاه محلی نوشته شده است، برای بدست آوردن مقادیر مطلوب در دستگاه اصلی از ماتریس تبدیل T مطابق رابطه (۳) استفاده می‌شود.

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \quad (3)$$

که در آن θ زاویه الیاف نسبت به محور X است. معادلات جدید تنش-کرنش در دستگاه X-Y به صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$\{\bar{\sigma}\} = [\bar{Q}]\{\bar{\epsilon}\} \quad (4)$$

در رابطه (۴) ماتریس سختی از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$[\bar{Q}] = [T]^{-1}[Q][T]^{-T} \quad (5)$$

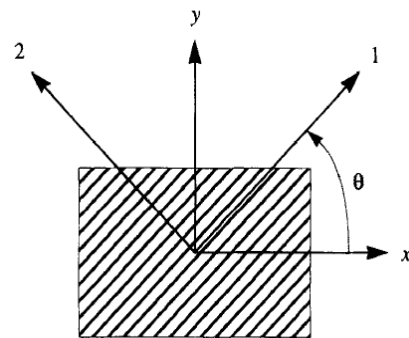
۳- فرمول بندی المان محدود

در این مقاله برای محاسبه میدان جابجایی در ورق از تئوری مرتبه اول برشی استفاده شده است که برای ورق‌های نسبتاً ضخیم به کار می‌رود. یکی از فرض‌های تئوری کلاسیک ورق‌ها این است که نرمال‌های عرضی پس از جابجایی همچنان بر صفحه میانی عمود می‌مانند که این فرض در ورق‌های نازک مناسب است و با ضخیم‌تر شدن ورق، کرنش‌های جانبی برشی نیز به حساب می‌آیند. بنابراین در ورق‌های ضخیم نیاز به استفاده از تئوری دیگری که کرنش جانبی برشی را نیز در نظر بگیرد، است.

انسیس مقایسه می‌شود. همچنین روابط مورد نیاز برای بررسی ارتعاشات اتفاقی ورق ارائه شده و در نهایت به کمک آنچه در قسمت‌های قبلی به دست آمده، به بررسی ارتعاشات اتفاقی ورق کامپوزیتی پرداخته شده و تنش و جابجایی در نقاط مختلف ورق، بر حسب چگالی طیفی نیروی تحریک و تعداد مودها به دست می‌آید.

۲- معادلات ساختاری

برای محاسبه تنش در ورق کامپوزیتی ابتدا معادلات ساختاری ارائه می‌شود. ورق‌های کامپوزیتی عموماً ضخامت کمی دارند؛ بنابراین برای بررسی آنها می‌توان حالت تنش صفحه‌ای را در نظر گرفت. شکل (۱) یک ورق کامپوزیتی و دستگاه مختصات آن را نشان می‌دهد.



شکل (۱) یک ورق کامپوزیتی و دستگاه مختصات آن

اگر راستای الیاف را با ۱، راستای عمود بر الیاف در صفحه ورق کامپوزیتی را با ۲ و راستای ۳ را طبق دستگاه راستگرد متعامد تعریف کنیم، معادلات تنش-کرنش به صورت رابطه (۱) به دست می‌آیند [۱۴].

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{12} & Q_{22} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & Q_{33} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & Q_{44} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & Q_{55} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

که در آن σ_1 و ϵ_1 تنش و کرنش عمودی در راستای ۱، σ_2 و ϵ_2 تنش و کرنش عمودی در راستای ۲، σ_3 و ϵ_3 تنش و کرنش برشی در صفحه ۱-۲، σ_4 و ϵ_4 تنش و کرنش برشی در صفحه ۲-۳ و σ_5 و ϵ_5 تنش و کرنش برشی در صفحه ۳-۱ می‌باشند. همچنین ضرایب ماتریس سختی [Q] معادله (۱)، که به فرم ماتریسی به صورت $\{\sigma\} = [Q]\{\epsilon\}$ است، بر

$$\{u\} = \sum_{i=1}^r \varphi_i d_i \quad (9)$$

در رابطه فوق φ_i تابع شکل المان در هر گره و d_i مولفه‌های جابجایی در گره‌های آن المان است. در بررسی ارتعاشات اتفاقی ابتدا باید فرکانس طبیعی و شکل مودهای سیستم به دست آیند. رابطه بین نیرو و جابجایی برای یک ورق به صورت رابطه (۱۰) نوشته می‌شود.

$$Kd = F \quad (10)$$

ماتریس K از مونتاژ کردن ماتریس سختی برای یک المان به دست می‌آید. ماتریس سختی کل یک المان به صورت زیر به دست می‌آید.

$$K^e = K_m^e + K_b^e + K_s^e \quad (11)$$

و در آن ماتریس‌های سختی به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$K_m^e = \int (B_m)^T \bar{B} B_b d\Omega + \int (B_b)^T \bar{B} B_b d\Omega + \int (B_m)^T A B_m d\Omega \quad (12)$$

$$K_b^e = \int (B_b)^T D B_b d\Omega$$

$$K_s^e = \int (B_s)^T A_s B_s d\Omega$$

همچنین ماتریس‌های به کار رفته در رابطه (۱۲) به صورت زیر هستند.

$$B_m = \begin{bmatrix} \varphi_{i,x} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \varphi_{i,y} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{i,y} & \varphi_{i,x} & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$B_b = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \varphi_{i,x} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \varphi_{i,y} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \varphi_{i,y} & \varphi_{i,x} \end{bmatrix}$$

$$B_s = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \varphi_{i,y} & \cdot & \varphi_i \\ \cdot & \cdot & \varphi_{i,x} & \varphi_i & \cdot \end{bmatrix}$$

همچنین اعضای سایر ماتریس‌ها از رابطه (۱۴) به دست می‌آیند.

تئوری مرتبه اول برشیا در نظر گرفتن فرض‌هایی برای میدان جابجایی به دست می‌آید؛ نرمال‌های عرضی بعد از جابجایی هم‌چنان مستقیم باقی می‌مانند و نیز افزایش طول پیدا نمی‌کنند. بنابراین جابجایی عرضی تابعی از مختصات در راستای ضخامت نخواهد بود. همچنین بر خلاف تئوری کلاسیک، نرمال‌های عرضی پس از جابجایی، دیگر بر صفحه میانی عمود باقی نمی‌مانند و بنابراین کرنش‌های برشی عرضی نیز به حساب می‌آیند. با در نظر گرفتن این فرضیات، میدان جابجایی در تئوری مرتبه اول برشی برای یک ورق به فرم رابطه (۶) در می‌آیند [۱۴].

$$\begin{Bmatrix} u(x, y, z, t) \\ v(x, y, z, t) \\ w(x, y, z, t) \end{Bmatrix} = \quad (6)$$

$$\begin{Bmatrix} u(x, y, z, t) \\ v(x, y, z, t) \\ w(x, y, z, t) \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \phi_x(x, y, t) \\ \phi_y(x, y, t) \\ \cdot \end{Bmatrix}$$

که u, v, w و ϕ_x, ϕ_y نشان‌دهنده مؤلفه بردار تغییر مکان به ترتیب در راستاهای X و Y و Z هستند. u_0, v_0 و w_0 تغییر مکان داخل صفحه در نقطه‌ای روی صفحه میانی ورق به ترتیب در راستاهای X, Y و Z هستند و ϕ_x و ϕ_y نشان‌دهنده دوران حول محورهای X و Y می‌باشند.

به کمک تئوری الاستیسیته رابطه بین کرنش‌ها و جابجایی‌ها به فرم زیر است:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon' \\ \cdot \\ \gamma \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} kz \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (7)$$

که پارمترهای آن به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\varepsilon' = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\}^T$$

$$\{\gamma\} = \left\{ \frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y, \frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \right\}^T \quad (8)$$

$$\{k\} = \left\{ \frac{\partial \phi_x}{\partial x}, \frac{\partial \phi_y}{\partial y}, \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right\}^T$$

المان مورد استفاده در این مقاله المان ایزوپارامتریک چهارگره‌ای با پنج درجه آزادی در هر گره است که میدان جابجایی در هر نقطه آن از رابطه (۹) استخراج می‌شود.

رابطه (۱۶) قرار دهیم شکل مود مربوط به آن فرکانس طبیعی به دست خواهد آمد.

۴- فرمول بندی ارتعاشات اتفافی

با در نظر گرفتن ارتعاشات اتفافی خطی، هر عضو از ماتریس جابجایی‌های گره‌ای، از رابطه (۱۹) به دست می‌آید [۱۰].

$$E(u_i, u_s) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\varphi_{ij} \varphi_{sk}}{M_j M_k} \sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^n \varphi_{ij} \varphi_{mk} \times \quad (19)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_j(-\omega) H_k(\omega) S_{lm}(\omega) d\omega$$

که در آن M_j و نیز تابع H از رابطه (۲۰) به دست می‌آیند.

$$M_j = \{\varphi_j\}^T [M] \{\varphi_j\}, \quad (20)$$

$$H(\omega) = [\omega_j^2 - \omega^2 + 2i\xi_j \omega_j \omega]^{-1}$$

همچنین $S_{lm}(\omega)$ تابع چگالی طیفی متقاطع بوده و برای ورودی‌های مستقل برابر صفر در نظر گرفته می‌شود. ω و ξ_j نیز به ترتیب فرکانس و ضریب میرایی هستند. در این مقاله تحریک از نوع طیف سفید باند محدود بوده که تابع چگالی طیفی آن از رابطه (۲۱) استخراج می‌شود [۱۵].

$$S_p(\omega) = \begin{cases} S, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (21)$$

۵- مطالعه موردی

ورق مورد مطالعه در این مقاله در شکل (۲) نشان داده شده است. برای صحه‌گذاری مدل ارائه شده در مقاله، ابتدا فرکانس‌های طبیعی به دست آمده به کمک کد نویسی را با نتایج حاصل از مدل‌سازی در نرم‌افزار انسیس مقایسه می‌کنیم. ورق با ۲۵ المان چهارگره‌ای ایزوپارامتریک که هر گره دارای پنج درجه آزادی می‌باشد، مدل شده است. خواص مکانیکی ورق در جدول (۱) آورده شده است. لازم به ذکر است مدول برشی ماده مورد استفاده، در جهات مختلف مقدار یکسانی دارد. همچنین برای مدل‌سازی در نرم-

$$(A_{ij}, \bar{B}_{ij}, D_{ij}) = \int_{-\frac{h}{4}}^{\frac{h}{4}} Q_{ij}(\nu, z, z^*) dz \quad (14)$$

$$A_{ij}^s = k \int_{-\frac{h}{4}}^{\frac{h}{4}} Q_{ij} dz$$

اندیس‌های i و j برای $A_{ij}, \bar{B}_{ij}, D_{ij}$ اعداد ۱، ۲ و ۶ و برای A_{ij}^s اعداد ۴ و ۵ هستند. K ضریب تصحیح برشی بوده و مقدار آن در این مقاله ۰/۸۳ در نظر گرفته می‌شود [۱۴]. همچنین بردار نیرو برای المان با حوزه Ω به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F^e = \int [\varphi]^e q d\Omega \quad (15)$$

که در آن q نیروی وارد بر المان است. برای به دست آوردن فرکانس طبیعی و شکل مودهای ورق کامپوزیتی از فرمول زیر استفاده می‌کنیم.

$$(K - \omega^* M) d = 0 \quad (16)$$

در این رابطه K و M به ترتیب ماتریس‌های سختی و جرم کل هستند که از مونتاژ کردن ماتریس سختی و جرم برای یک المان به دست می‌آیند. ماتریس سختی برای المان از رابطه‌های (۱۱) تا (۱۴) به دست می‌آید. ماتریس جرم برای یک المان به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$M^e = \int [\varphi]^T [\rho] [\varphi] d\Omega \quad (17)$$

که در آن $[\rho]$ ماتریس چگالی و به صورت زیر است:

$$[\rho] = \begin{bmatrix} \rho h & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \rho h & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \rho h & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\rho h^3}{12} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\rho h^3}{12} \end{bmatrix} \quad (18)$$

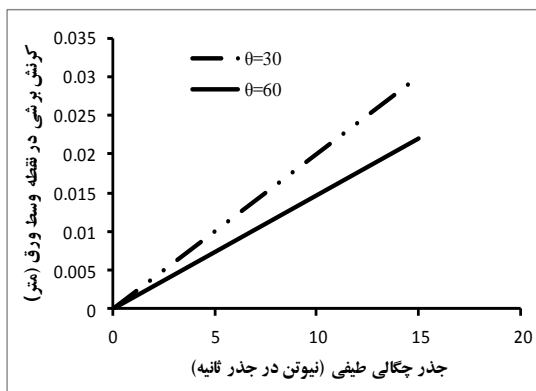
در رابطه (۱۸) h ضخامت ورق و ρ چگالی آن است. با به دست آوردن ماتریس جرم و سختی برای کل سازه و مساوی صفر قرار دادن دترمینان ماتریس رابطه (۱۶) فرکانس‌های طبیعی ورق کامپوزیتی به دست می‌آیند. همچنین مقادیر هر کدام از فرکانس‌های طبیعی را که در

بعد از صحنه گذاری مدل ارائه شده، در جدول (۳) پنج فرکانس طبیعی اول ورق فوق وقتی زاویه الیاف ۳۰ و ۶۰ درجه هستند به کمک تئوری مرتبه اول برشی ارائه شده است. با توجه به جدول (۳) مقادیر فرکانس طبیعی برای هنگامی که زاویه الیاف ۳۰ درجه است بیشتر از ۶۰ درجه می باشد.

جدول (۳) پنج فرکانس اول بی بعد ورق کامپوزیتی یک سر گیر دار با زاویه الیاف ۳۰ و ۶۰ درجه به کمک تئوری مرتبه اول برشی

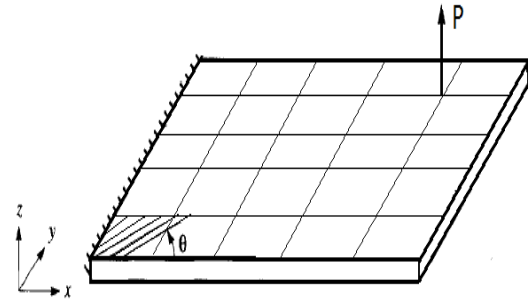
شماره فرکانس	۱	۲	۳	۴	۵
زاویه الیاف ۳۰°	۰/۳۵۳	۱/۱۸	۲/۴۳	۳/۳۷	۵/۱۸
زاویه الیاف ۶۰°	۰/۱۶	۰/۹۴	۱/۲۵	۲/۹۰	۳/۸۸

در ادامه به بررسی پاسخ ورق کامپوزیتی تحت بارگذاری اتفاقی پرداخته می شود. این ورق تحت تاثیر نیروی P از نوع تحریک طیف سفید باند محدود، با مقدار متوسط صفر قرار گرفته است و چگالی طیفی آن از رابطه (۲۱) به دست می آید. نمودار کرنش برشی ϵ_4 در نقطه وسط ورق بر حسب جذر چگالی طیفی نیروی تحریک، برای دو جهت گیری مختلف الیاف در ورق، در شکل (۳) نشان داده شده است. در یک تحلیل خطی جذر میانگین مربع پاسخ متناسب با جذر S_0 است و نمودار آن باید به شکل یک خط راست باشد که در شکل (۳) نیز این نمودار به شکل یک خط است. همان طور که از نمودار مشخص است در هر سطح تحریک، جابجایی برای زاویه ۶۰ درجه کمتر از ۳۰ درجه است.



شکل (۳) نمودار کرنش برشی بر حسب جذر چگالی طیفی نیروی تحریک در نقطه وسط ورق

افزار انسیس از المان پوسته 141 چهار گره ای استفاده شده است و با توجه به اینکه این المان با فرض های تئوری کلاسیک است، مدل ارائه شده در این مقاله نیز ابتدا به کمک تئوری کلاسیک ارائه شده است. در این حالت الیاف در جهت محور X هستند.



شکل (۲) ورق کامپوزیتی مورد مطالعه در مقاله

پنج فرکانس طبیعی اول بی بعد که از روش المان محدود و تئوری کلاسیک (CPT) و نیز مدلسازی در نرم افزار انسیس به دست آمده اند، در جدول (۲) نشان داده شده اند. برای بی بعد کردن از رابطه (۲۲) استفاده شده است.

$$\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_T}} \quad (22)$$

که در رابطه (۲۱) a طول ورق است.

جدول (۱) خواص مکانیکی ورق کامپوزیتی

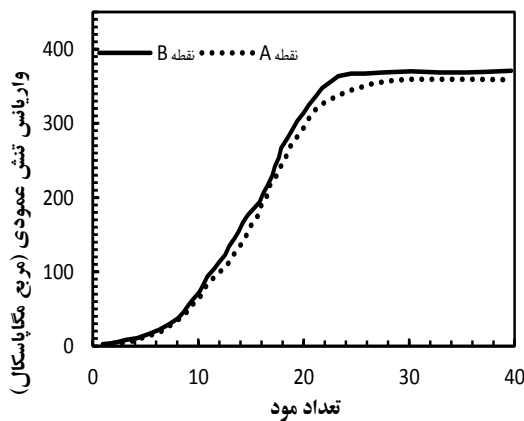
E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	G_{12} (GPa)	ρ (Kg/m ³)	ν_{12}
۱۳۸	۹	۷/۱	۲۰۰۰	۰/۳

همانطور که از جدول (۲) مشاهده می شود نتایج حاصل از مدل ارائه شده در این مقاله به کمک تئوری کلاسیک ورق با نتایج حاصل از مدلسازی در نرم افزار انسیس مطابقت قابل قبولی را نشان می دهد.

جدول (۲) پنج فرکانس اول بی بعد ورق کامپوزیتی یک سر گیر دار

شماره فرکانس	۱	۲	۳	۴	۵
CPT	۰/۶۳۴	۱/۱۱	۳/۵۳	۴/۲۳	۴/۹۴
انسیس	۰/۶۲۷	۱/۰۹	۳/۴۹	۴/۰۴	۴/۷۴

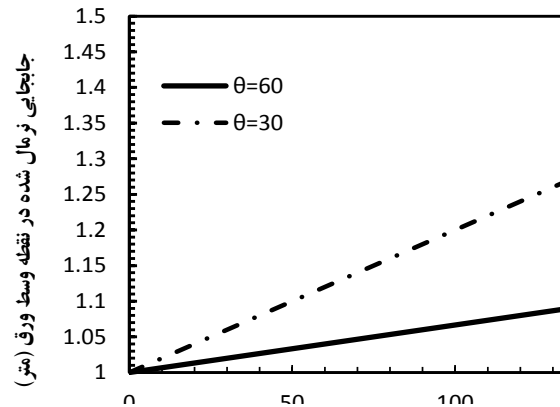
شکل (۶) نمودار واریانس تنش عمودی در راستای محور X را در نقطه A به مختصات $(۰/۴, ۰/۳)$ و نقطه B به مختصات $(۰/۲, ۰/۳)$ هنگامی که زاویه الیاف با این محور برابر صفر است را بر حسب تعداد مود به کار رفته، نشان می‌دهد. همان طور که دیده می‌شود با در نظر گرفتن تعداد مود دلخواه، همواره تنش نقطه B از A بیشتر است. همچنین حساسیت تنش نقطه B نسبت به تعداد مودهای به کار رفته، از نقطه A کمتر است و نمودار آن زودتر به تنش نهایی اش می‌رسد. این موارد با توجه به اینکه نقطه اعمال نیرو در مختصات $(۰/۴, ۰/۴)$ قرار دارد قابل توجیه است. با توجه به اینکه نقطه B به تکیه‌گاه نزدیکتر است. بنابراین تنش بیشتری در آن به وجود آمده است. همچنین از آنجا که این نقطه دورتر از محل اعمال نیروی تحریک قرار دارد نسبت به تعداد مودهای به کار رفته برای محاسبه تنش حساسیت کمتری دارد. با مقایسه شکل (۵) و (۶) مشخص می‌شود که برای محاسبه تنش یک نقطه، نیاز به بکار بردن تعداد مودهای بیشتری نسبت به جابه جایی در آن نقطه است.



شکل (۶) نمودار واریانس تنش عمودی در راستای محور X در نقطه‌های A و B

۶- نتیجه گیری

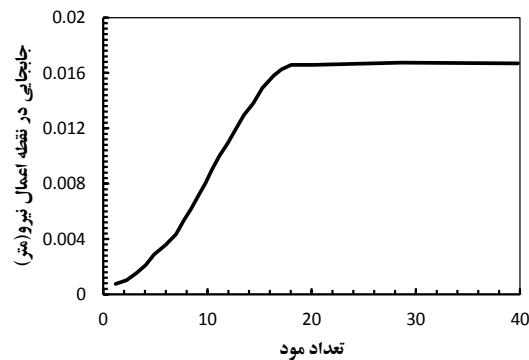
در این تحقیق ارتعاشات اتفاقی یک ورق کامپوزیتی مورد بررسی قرار گرفت. نخست معادلات ساختاری یک ورق کامپوزیتی با فرض تنش صفحه‌ای ارائه شد. سپس به کمک تئوری برشی مرتبه اول و روش المان محدود فرمول‌های



شکل (۴) نمودار جابجایی نرمال شده در جهت Z بر حسب جذر چگالی طیفی در نقطه وسط ورق

در شکل (۴) نمودار جابجایی نرمال شده در جهت Z بر حسب جذر چگالی طیفی نیروی تحریک، برای دو جهت-گیری مختلف الیاف در وسط ورق نشان داده شده است. در این حالت نیز در هر سطح تحریک، جابجایی برای زاویه ۶۰ درجه کمتر از ۳۰ درجه است و با افزایش جذر چگالی طیفی، مقدار جابجایی به صورت خطی زیاد می‌شود.

نمودار جابجایی در راستای Z نقطه اعمال نیرو بر حسب تعداد مود به کار رفته برای محاسبه جابجایی، در شکل (۵) نشان داده شده است. همان طور که در شکل مشخص است جابجایی این نقطه تا در نظر گرفتن ۲۰ مود اول، با افزایش تعداد مودها بیشتر می‌شود و از این مود به بعد، افزایش تعداد مودها برای محاسبه جابجایی، تاثیر چندانی در تغییر جابجایی این نقطه ندارد. این امر در کاهش زمان محاسبات تاثیر زیادی دارد و می‌توان برای کاهش محاسبات و زمان، از در نظر گرفتن مودهای بیشتر صرف نظر کرد.



شکل (۵) نمودار جابجایی در نقطه اعمال نیرو جهت Z بر حسب تعداد مود در نیرو جابجایی بر حسب تعداد مود در نقطه اعمال نیرو

$\{u\}$	میدان جابجایی یک نقطه از المان (m)
$\{F\}$	میدان نیروی کل سازه (N)
v	نسبت پواسون
q	نیروی وارد بر المان (N)

مورد نیاز برای به دست آوردن فرکانس طبیعی و شکل مودهای ورق استخراج و از آن برای بررسی ارتعاشات اتفاقی ورق استفاده شد. پنج فرکانس طبیعی اول ورق کامپوزیتی که از روش المان محدود به دست آمدند بسیار نزدیک به نتایج مدلسازی در نرم افزار انسیس بودند. کرنش‌ها و تنش‌ها در نقاط مختلف ورق به دست آمد و نشان داده شد که نیاز به استفاده از تمامی مودها در محاسبات مربوط به تنش و کرنش نیست. همچنین برای محاسبه تنش یک نقطه نیاز به تعداد مودهای بیشتری است.

مراجع:

- [1] Einstein, E., On the Movement of Small Particles Suspended in a Stationary Liquid Demanded by the Molecular-Kinetic Theory of Heat, *Annealed der Physik*, vol.17, 1905, pp.549-560.
- [2] Eringen, A. C. Response of beams and plates to random loads, *Journal of Applied Mechanics*, vol.24, 1957, pp.46-52.
- [3] Elishakoff, I. and Livshits, D., Some closed-form solutions in random vibration of Bernoulli-Euler beams, *International Journal of Engineering Science*, vol.22, 1984, pp.1291-1302.
- [4] Chonan, S., Random Vibration of an Elastically Supported Circular Plate with an Elastically Restrained Edge and an Initial Tension, *Journal of Sound and Vibration*, vol.58, 1978, pp.443-454.
- [5] Crandall, S. H., Zhu, W. Q., Wide-band Random Vibration of an Equilateral Triangular Plate, *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol.1, 1986, pp.5-12.
- [6] Witt M., Dynamic response of laminated plates to random loading, *International Journal of Solids and Structures*, vol.16, 1979, pp.231-238.
- [7] Cederbaum, G., Librescu, L. and Elishakoff, I., Random vibration of laminated plates modeled within a high-order shear deformation theory, *Journal of the Acoustical Society of America*, vol.84 (2), 1988, pp.660-666.

۷- فهرست علائم

$H(\omega)$	تابع پاسخ فرکانس $(\frac{s}{rad})$
$S_p(\omega)$	تابع چگالی طیفی $(N^2 s)$
ϕ_x	چرخش ورق حول محور x
ϕ_y	چرخش ورق حول محور y
ρ	چگالی (kg/m^3)
θ	زاویه الیاف با محور x (deg)
h	ضخامت ورق (m)
a	طول ورق (m)
ω	فرکانس طبیعی $(\frac{rad}{s})$
$[T]$	ماتریس تبدیل
$\{\sigma\}$	ماتریس تنش (MPa)
$[Q]$	ماتریس سختی (MPa)
$\{\varepsilon\}$	ماتریس کرنش
E	مدول الاستیسیته (MPa)
G	مدول برشی (MPa)
d_i	مولفه بردار جابجایی در گره‌های المان (m)
φ_i	مولفه ماتریس تابع شکل المان
M_j	مولفه ماتریس جرم مودال (kg)

- [8] Cederbaum, G., Elishakoff, I., Librescu, L., Random vibrations of laminated plates modeled within the first order shear deformation theory, *Journal of Composite Structures*, vol.12, 1989, pp.97-111.
- [9] Gray, C.E., Decha-Umphait K. and Mei, C., Large deflection, large amplitude vibrations and random response of symmetrically laminated plates, *Journal of Aircraft*, vol.22(11), 1985, pp.929-930.
- [10] Harichandran, R.S., Hawwari, A., Non-linear random vibration of filamentary composites, *Journal of Computing Systems in Engineering*, vol.3, 1992, pp.469-475.
- [11] Harichandran, R.S. and Naja, M.K., Random vibration of laminated composite plates with material non-linearity, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol.32(4), 1997, pp.707-720.
- [12] Kang, J., and Harichandran, R.S., Random vibration of laminated FRP plates with material nonlinearity using high-order shear theory, *Journal of Engineering Mechanics*, vol.9, 1999, pp.1081-1088.
- [13] Dai, X. J., Lin, J. H., Chen, H. R., Williams, F. W., Random vibration of composite structures with an attached frequency-dependent damping layer, *Journal of Composites*, vol.39, 2008, pp.405-413.
- [14] Reddy, J. N., *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells Theory and Analysis*, CRC Press, 2nd Ed., 2003.
- [15] Newland, D. E., *Random Vibrations, Spectral and Wavelet Analysis*, 3rd Ed., Longman Scientific & Technical and John Wiley & Sons, 1993, 46.

