

## خیز و ارتعاشات آزاد پنل ساندویچی با هسته لانه زنبوری بر بستر الاستیک وینکلر

یونس یوسفی<sup>۱\*</sup>، حسین وحدانی فر<sup>۲</sup>، رضا شیرانی<sup>۳</sup>، محمد دهقانی<sup>۴</sup>

\* نویسنده مسئول: y.yousefi@iauo.ac.ir

## واژه‌های کلیدی

پنل ساندویچی - ارتعاشات -  
کوادراتور دیفرانسیلی - لانه زنبوری

تاریخ ارسال: ۹۵/۰۹/۱۷

تاریخ بازنگری: ۹۵/۱۰/۲۱

تاریخ پذیرش: ۹۵/۱۱/۱۸

## چکیده

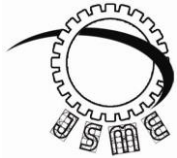
در این مقاله به بررسی خیز و ارتعاشات آزاد پنل ساندویچی پرداخته شده است. هسته ساندویچ پنل از نوع لانه زنبوری شش‌وجهی و رویه‌های آن از دو ماده متفاوت Carbon fiber reinforced plastic و K-aryl/epoxy در نظر گرفته شده است. معادلات حاکم بر پایه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول استخراج گردیده و برای حل معادلات از روش عددی دیفرانسیل مربعات تعمیم یافته استفاده شده است. جهت اعتباربخشی به روش دیفرانسیل مربعات به کاررفته در این مقاله از روش کلاسیک با حل گالرکین ارائه شده در مراجع استفاده شده و نشان داده شده که روش دیفرانسیل مربعات تعمیم یافته به کار گرفته شده دارای نتایج خوب با درصد خطای نسبی پایین نسبت به مقاله مرجع یاد شده است. تغییر شکل ایجاد شده در پنل ساندویچی به ازای دو نوع بارگذاری متفاوت مورد بررسی قرار گرفته است. در نهایت فرکانس‌های طبیعی برای چهار مد اول برای دو ماده متفاوت رویه‌ها به دست آورده شده و تأثیر نسبت‌های متفاوت طول به ضخامت هسته و نسبت ضخامت رویه‌ها به ضخامت هسته لانه زنبوری بر مقدار فرکانس طبیعی بررسی شده است. همچنین تأثیر ضریب سختی فونداسیون بر خیز ایجاد شده و فرکانس طبیعی، ارائه گردیده است.

۱- مری، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد امیدیه، خوزستان، ایران.

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مکانیک، دانشگاه شهید چمران اهواز، خوزستان، ایران.

۳- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مکانیک، دانشگاه شهید چمران اهواز، خوزستان، ایران.

۴- دانشجوی دکتری، دانشکده مکانیک، دانشگاه یزد، یزد، ایران.



## **Deflection and Free Vibration of Sandwich Panel with Honeycomb Core on Winkler Elastic Foundation**

Younes Yousefi<sup>1</sup>, Hossein Vahdanifar<sup>2</sup>, Reza Shirani<sup>3</sup>, Mohammad Dehghani<sup>4</sup>

\* Corresponding Author: [y.yousefi@iauo.ac.ir](mailto:y.yousefi@iauo.ac.ir)

---

### **Abstract:**

In this paper deflection and free vibration of sandwich panel is studied. The core of Sandwich panels is made of hexagonal honeycomb and faces are made of two different materials of Carbon Fiber Reinforced Plastic and K-aryl/epoxy covering. The governing equations are deduced from the First order Sheer Deformation Theory (FSDT) and they are solved using Generalized Differential Quadrature Method (GDQM). The classical method in the references is used to verify the DQ method and to show that the applied GDQM method has a good results with compared to the references. Deflection of sandwich panel is investigated with two different load types. Finally natural frequency for the first 4 modes and the two different faces materials are calculated and the effect of various lengths to core thickness ratios and faces to honeycomb core thickness ratios are studied. Further, the effect of foundation stiffness coefficient on deflection and natural frequency are showed.

---

### **Key words:**

Sandwich Panel  
Vibrations  
Differential Quadrature  
Honeycomb

---

1- Lecturer, Engineering Department, Omidiyeh Branch, Islamic Azad University, Khuzestan, Iran.

2-MSc Student, Department of Engineering Shahid Chamran University, Khuzestan, Ahwaz, Iran.

3- MSc Student, Department of Engineering Shahid Chamran University, Khuzestan, Ahwaz, Iran.

4- Phd student, Department of Mechanical Engineering, Yazd University , Yazd ,Iran.

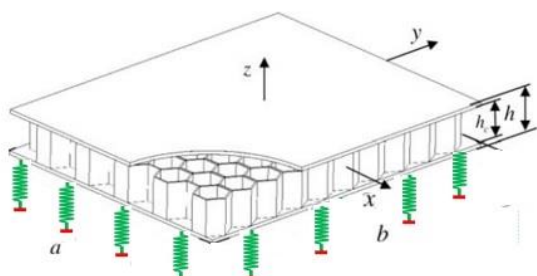
## ۱- مقدمه

مربع‌سازی دیفرانسیلی تعمیم‌یافته به صورت عددی حل شده‌اند. شو و همکاران [۶] به آنالیز ارتعاش صفحات کامپوزیتی چهارضلعی پرداختند. در پژوهش آنان دامنه‌های فیزیکی نامنظم به یک دامنه مستطیلی در فضای محاسباتی تبدیل شده است و در گام بعد معادلات حاکم و شرایط مرزی نیز به فرم مربوطه در فضای محاسباتی قرار گرفته است. روش بیان شده توسط آنان نسبت به روش دیلیو توت در سال ۱۹۹۶ کارآمدتر و از نظر حجم محاسباتی و بازه زمانی بسیار کوتاه‌تر بود. سروکین و همکاران [۷] ارتعاشات اجباری پانل ساندویچی مستطیلی تحت تأثیر نیروی عرضی با فرکانس تحریک در محدوده فرکانس طبیعی اول را مورد بررسی قرار دادند. بر این اساس و با در دست بودن فرکانس طبیعی اول بر اساس پاسخ ارتعاشات اجباری در حوزه فرکانس سایر فرکانس‌های طبیعی سیستم را محاسبه نمودند. رامکومار و همکاران [۸] تجزیه و تحلیل ارتعاشات اجباری ورق ارتوتروپیک پرداختند. آن‌ها معادلات حاکم بر مدل را به صورت توابع مثلثاتی بیان کردند و در نهایت با استفاده از روش لاگرانژی حل نمودند. وو یوان و همکاران [۹] به تجزیه و تحلیل نظری کمانش حرارتی برای یک پنل ساندویچی پرداختند. هسته در نظر گرفته شده در این مدل به صورت یک خرپا فرض شد و همچنین از اثر استحکام خمشی هسته صرف نظر شده است. آن‌ها در پژوهش خود اثرات دما و پارامترهای هندسی بر بار کمانشی حرارتی را مورد بررسی قرار دادند. وانگ و همکاران [۱۰] به تحلیل ورق‌های کامپوزیتی با استفاده از تئوری زیگزاگ مرتبه سوم پرداختند. ایشان معادلات حاکم را از روش همیلتون استخراج نمودند و جهت صحت سنجی از نتایج حاصل از مدل المان محدود کمک گرفتند. کانت و سوامنتان [۱۱] فرمولاسیون و حل تحلیلی برای آنالیز ارتعاشات آزاد ورق‌های چندلایه کامپوزیتی و ساندویچی بر اساس تئوری بهبودیافته مرتبه بالا ارائه دادند. در مدل ارائه شده، تغییر شکل‌های چندلایه با در نظر گرفتن تأثیرات تغییر شکل‌های برشی عرضی، تنش‌ها و کرنش‌های نرمال عرضی و متغیرهای غیرخطی برای جابه‌جایی‌های درون صفحه‌ای

با توجه به اهمیت پانل‌های ساندویچی به دلیل داشتن ویژگی‌های خاص از جمله مقاومت بالا و وزن کم و همچنین به کارگیری این اجزاء به شکل‌های مختلف در صنایع از جمله صنایع هوافضا و خودروسازی زمینه تحقیقات بسیاری از محققان را فراهم کرده است. بررسی عملکرد استاتیکی و تحلیل دینامیکی این پانل‌ها از جمله تحلیل ارتعاشی آن‌ها در اثر بارگذاری خارجی متغیر با زمان نقش مهمی در طراحی و کاربرد آن‌ها دارد. تحقیقات زیادی در رابطه با پانل‌های ساندویچی در زمینه‌های مختلف از جمله خیز و ارتعاشات آزاد و اجباری صورت گرفته است که شرح زیر می‌باشند.

انصاری و همکاران [۱] خیز تیر کامپوزیتی موج‌دار به کمک سیم آلیاژ حافظه‌دار بررسی نمودند. آن‌ها از مدل برینسون به منظور مدل‌سازی رفتار آلیاژ حافظه‌دار استفاده کردند. سیانگ و همکاران [۲] به بررسی ارتعاش آزاد ورق‌های نازک مستطیلی ارتوتروپیک در شرایط تکیه‌گاهی مختلف به روش دقیق. آن‌ها ارتعاش آزاد درون صفحه‌ای صفحات مستطیلی پرداختند را محاسبه نمودند. همچنین حل دقیق ارتعاش آزاد صفحات ارتوتروپیک مستطیلی با استفاده از نظریه میندلین را توسعه دادند. چن و همکاران [۳] روش لاگرانژی برای تحلیل دینامیکی ورق‌های ضخیم توسعه داده و تأثیر نیروهای برشی ارائه دادند؛ اما معایب روش آنان این بود که وقتی تعداد چند جمله‌ای‌های لاگرانژ کوچک‌تر از تعداد حالات ارتعاش ورق باشد توابع شکل مد ممکن است نتواند به طور کامل شرایط مرزی را برآورده سازد و همچنین از خمش در لبه‌های ورق نیز صرف نظر شده است. چن و همکاران [۴] در مورد تحلیل ارتعاش آزاد ورق‌های استوانه‌ای ایزوتروپیک بر روی تکیه‌گاه الاستیک میانی تحقیق کردند و فرکانس ارتعاش این ورق را محاسبه نمودند. ویولا و همکاران [۵] نیز یک چارچوب کلی برای فرمول‌بندی و محاسبات تحلیل دینامیکی پوسته و ورق دو انحنایی چندلایه با ضخامت متوسط را ارائه کرده‌اند. در این تحقیق مسائل دوبعدی ارتعاش پوسته با استفاده از روش

می‌گردند. نتایج خروجی برای تغییر شکل‌های ایجاد شده در پنل ساندویچی به ازای دو نوع بارگذاری متفاوت گسترده و سینوسی ارائه خواهد شد.



شکل (۱) نمای شماتیک ساندویچ پنل بر بستر الاستیک

## ۱-۲- استخراج معادلات جابه‌جایی ساندویچ پنل بر اساس

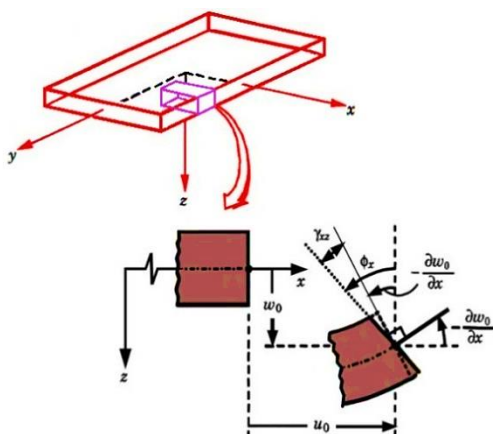
تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی (FSDT):

در تئوری مرتبه اول همانند تئوری کلاسیک دو فرضیه زیر معتبر است:

۱- خطوط مستقیم عمود بر صفحه میانی قبل از تغییر شکل بعد از تغییر شکل، مستقیم باقی می‌مانند.

۲- خطوط مستقیم عمود بر صفحه میانی تغییر طول نمی‌دهند.

اما در تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی برخلاف فرضیات تئوری کلاسیک صفحات عمود بر سطح میانی بعد از تغییر شکل دیگر بر سطح میانی عمود باقی نمی‌مانند (شکل ۲).



شکل ۲- نمایی از تغییر شکل یک صفحه با در نظر گرفتن انرژی کرنشی

برشی (تئوری برشی مرتبه اول برای صفحات) [۱۶]

در نتیجه با در نظر گرفتن این تئوری مؤلفه‌های کرنش نرمال  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$  و کرنش برشی  $\epsilon_{xy}$ ,  $\epsilon_{yz}$ ,  $\epsilon_{xz}$  وجود داشته

محاسبه شده‌اند. فراسیتیک و تامسون [۱۲] تئوری مرتبه بالای پانل‌های ساندویچی را در آنالیز ارتعاشات آزاد پانل ساندویچی با هسته انعطاف‌پذیر مورد استفاده قرار دادند. ایشان نشان دادند که این تئوری نتایج موفقیت‌آمیزی در زمینه‌ی مختلف آنالیز پانل‌های ساندویچی مانند آنالیز کمناش و ارتعاشات آزاد تیر ساندویچی، کمناش و خمش پانل‌های ساندویچی برخوردار است. یکی دیگر از روش‌های حل دقیق استفاده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی می‌باشد. سرینیواز و همکاران [۱۳] با استفاده از این نظریه سه‌بعدی خطی به تحلیل ارتعاشات آزاد ورق‌های مستطیلی ضخیم همگن و لایه‌ای تحت شرایط تکیه‌گاهی ساده پرداختند. نوس و همکاران [۱۴] به مطالعه ارتعاشات آزاد در پوسته‌های جدار نازک پرداختند. خواص مکانیکی بکار رفته در تحلیل از مواد هدفمند می‌باشد. آن‌ها معادلات حاکم بر پوسته استوانه‌ای را با استفاده از تئوری تغییر شکل مرتبه بالا استخراج و با استفاده اصل کار مجازی به حل نمودند. فرانچسکو و همکاران [۱۵] به حل معادلات حاکم برای ارتعاشات آزاد پوسته‌های نامتقارن توسط المان دوبعدی دیفرانسیل مربعات تعمیم یافته پرداختند. همچنین آن‌ها در پژوهش خود اثرات دوران و چرخش پوسته‌های منحنی شکل را مورد بررسی قرار دادند.

در این پژوهش به بررسی ارتعاشات آزاد و تغییر مکان ایجاد شده در ساندویچ پنل با هسته لانه‌زنبوری پرداخته می‌شود. همچنین تأثیر انواع مختلف پارامترهای هندسی و تغییر خواص رویه‌ها مورد بررسی قرار گرفته است.

## ۲- بیان مسئله و استخراج معادلات حاکم:

در این مقاله به بررسی ارتعاشات آزاد و تغییر شکل ایجاد شده در ساندویچ پنل قرار گرفته بر بستر الاستیک وینکلر پرداخته می‌شود. نمای شماتیک مدل در شکل ۱ قابل مشاهده است. معادلات حاکم بر مسئله با استفاده از تئوری تغییر شکل مرتبه اول استخراج شده و با استفاده از روش حل عددی دیفرانسیل کوآرداچر تعمیم یافته حل

$$\varepsilon^0 = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$k = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

## ۲- روش انرژی و اصل همیتون:

برای استخراج روابط حاکم بر مسئله از اصل انرژی و همیتون با رابطه انرژی‌های جنبشی و پتانسیل رویه‌ها و هسته ساندویچ پل برحسب جابه‌جایی‌های تعریف شده بیان می‌شود که به صورت زیر می‌باشد:

$$\delta(U - T - V_s) = 0 \quad (17)$$

در این رابطه  $\delta u$  انرژی کرنشی مجازی  $\delta V_s$  کار مجازی انجام شده توسط نیروهای خارجی  $\delta T$  انرژی جنبشی مجازی بوده و با توجه به فرضیات FSDT با رابطه زیر هر کدام تعریف می‌گردند:

$$\delta U = \int_{\Omega_0} \int \int (\sigma_x^i \delta \varepsilon_x^i + \sigma_y^i \delta \varepsilon_y^i + \tau_{xy}^i \delta \gamma_{xy}^i + \tau_{xz}^i \delta \gamma_{xz}^i + \tau_{yz}^i \delta \gamma_{yz}^i) dV dT \quad i = t, b \quad (18)$$

$$V_s = \int \int \left( \frac{1}{2} k w^2 \right) dx dy \rightarrow \delta V_s = \int \int (k w \delta w) dx dy \quad (19)$$

$$\delta T = \int_{\Omega_0} \int \int \rho (\dot{u}^i \delta \dot{u}^i + \dot{v}^i \delta \dot{v}^i + \dot{w}^i \delta \dot{w}^i) dV dT \quad (20)$$

رابطه (۱۸) معرف تغییرات انرژی پتانسیل می‌باشد که برحسب تنش و کرنش بیان شده است؛ و همچنین رابطه (۲۱) تغییرات انرژی جنبشی پانل برحسب مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی می‌باشد درجایی که کار نیروهای خارجی به صورت روابط (۱۹) بیان شده‌اند.

$$\delta U = \int \int \int (\sigma_x (\delta \varepsilon_x^0 + z k_x) + \sigma_y (\delta \varepsilon_y^0 + z k_y) +$$

و تنها مؤلفه کرنش نرمال  $\varepsilon_{zz}$  صفر می‌باشد. همچنین مؤلفه‌های جابه‌جایی در راستای  $x, y$  یعنی  $(u, v)$  به صورت توابعی خطی نسبت به  $z$  فرض گردیده و مؤلفه جابه‌جایی در راستای ضخامت یعنی  $w$  مستقل از  $z$  در نظر گرفته می‌شود. در نتیجه میدان جابه‌جایی به صورت زیر بیان می‌شود.

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z \psi_x(x, y, t) \quad (1)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z \psi_y(x, y, t) \quad (2)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (3)$$

در روابط فوق  $u_0, v_0, w_0$  مؤلفه‌های جابه‌جایی صفحه میانی و  $\psi_x, \psi_y$  چرخش عمود بر صفحه میانی به ترتیب حول محورهای  $x, y$  می‌باشند. همچنین مؤلفه‌های کرنش با فرض خطی بودن به صورت روابط (۴) الی (۹) تعریف می‌شوند.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (5)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (6)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (7)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (8)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (9)$$

با توجه به تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول می‌توان کرنش‌ها را به صورت روابط (۱۰) الی (۱۴) بیان نمود:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \quad (10)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \quad (11)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \quad (12)$$

$$\gamma_{xz} = \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (13)$$

$$\gamma_{yz} = \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (14)$$

درجایی که می‌توان کرنش لایه میانی و انحنا را به صورت رابطه زیر تعریف نمود:

با ادغام روابط (۳۰) تا (۳۷) در رابطه (۲۱) و (۲۲) رابطه (۳۸) و (۳۹) به دست می آید.

$$\delta U = \int \int \frac{\partial N_x}{\partial x} \delta u_0 + \frac{\partial M_x}{\partial x} \delta \psi_x + \frac{\partial N_y}{\partial y} \delta v_0 + \frac{\partial M_y}{\partial y} \delta \psi_y + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \delta u_0 + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \delta v_0 + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \delta \psi_x \quad (38)$$

$$\delta T = \int \int \int \rho [(u_0 + z\psi_x)\delta(u_0 + z\psi_x)] + \rho [(v_0 + z\psi_y)\delta(v_0 + z\psi_y)] + (\dot{w}_0 \delta \dot{w}_0) dV dT \quad (39)$$

با استفاده از روابط بیان شده از روش همیلتون می توان به روابط کلی تری برای معادلات حاکم بر فیزیک مسئله دست پیدا نمود که با استفاده از تعاریف خاص از جمله کوپل های تنش و نتیجه های تنش برشی می توان روابط را به شکل ساده تر که در ادامه می آیند، بیان نمود.

#### ۴- معادلات حاکم بر ساندویچ پل:

با در نظر گرفتن کرنش های خطی معادلات تعادل به صورت زیر بیان می گردند:

$$\delta w: \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - kw + p = I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (40)$$

$$\delta \psi_x: \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = I_1 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \quad (41)$$

$$\delta \psi_y: \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = I_1 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} \quad (42)$$

بنابراین معادلات بنیانی ورق کامپوزیتی مقارن به شرح زیر هستند درجایی که:

$$M_x = D_{11}k_x + D_{12}k_y \quad (43)$$

$$M_y = D_{21}k_x + D_{22}k_y \quad (44)$$

$$M_{xy} = D_{66}k_{xy} \quad (45)$$

همچنین نیروهای برشی به شرح زیر است.

$$\begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{44} & 0 \\ 0 & H_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} \quad (46)$$

$$H_{44} = G_{xzt} t \zeta \quad (47)$$

$$H_{55} = G_{yzt} t \zeta \quad (48)$$

$$\tau_{xy} \delta (\gamma_{xy}^0 + z k_{xy}) dV dT + \int \int \int \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} dV dT \quad (22)$$

#### ۳- بیان برخی از روابط ساختاری:

با توجه به اینکه رویه ها کامپوزیت در نظر گرفته شده اند روابط ساختاری بین نیرو و گشتاور و کرنش های صفحه های در رویه های کامپوزیتی را می توان با استفاده از ماتریس های سفتی خمشی با صرف نظر کردن از سختی هسته به صورت زیر به دست آورد.

$$D_{11} = \bar{E}_{xt} \frac{t^3}{12} \zeta \quad (23)$$

$$D_{12} = D_{21} = \bar{E}_{xt} v_{xyt} \frac{t^3}{12} \quad (24)$$

$$D_{22} = \bar{E}_{yt} \frac{t^3}{12} \zeta \quad (25)$$

$$D_{66} = G_{xyt} \frac{t^3}{12} \zeta \quad (26)$$

که در آن:

$$\zeta = 1 + 3 \frac{h}{t} + 3 \frac{h^2}{t^2} \quad (27)$$

$$\bar{E}_{xt} = \frac{E_{xt}}{1 - v_{xyt} v_{yxt}} \quad (28)$$

$$\bar{E}_{yt} = \frac{E_{yt}}{1 - v_{xyt} v_{yxt}} \quad (29)$$

درجایی که از روابط موجود در ورق های نازک داشتیم:

$$N_x = \int \sigma_x dz \quad (30)$$

$$N_y = \int \sigma_y dz \quad (31)$$

$$N_{xy} = \int \tau_{xy} dz \quad (32)$$

$$M_x = \int \sigma_y z dz \quad (33)$$

$$M_y = \int \sigma_x z dz \quad (34)$$

$$M_{xy} = \int \tau_{yx} z dz \quad (35)$$

$$Q_x = \int \tau_{zx} dz \quad (36)$$

$$Q_y = \int \tau_{zy} dz \quad (37)$$

جبری و یا معادلات مرتبه اول برحسب مقادیر متغیر میدانی در نقاط مجزا در دامنه حل می‌باشد. به همین منظور ابتدا ناحیه حل شبکه‌بندی شده و سپس روش عددی اعمال و حل مسئله بر اساس این شبکه‌بندی صورت می‌پذیرد. در روش DQ شبکه‌بندی به صورت تبدیل ناحیه حل به مجموعه‌ای از نقاط به نام گره انجام می‌پذیرد. روش DQ مقدار مشتق تابع  $f$  در هر گره نسبت به یک راستای مشخص را به صورت مجموع خطی وزن‌دار از مقادیر تابع در تعدادی نقاط در آن راستا بیان می‌کند. بیان ریاضی تعریف فوق را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

**۵-۱- تعریف مشتقات:**

در این روش مشتق برای  $f$  که تابعی از  $x, y$  است به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_x^{(n)}(x_i, y_j) = \sum_{k=1}^{N_x} C_{ij}^{(n)} f(x_k, y_i): n = 1, 2, \dots, N_x - 1 \quad (60)$$

$$f_y^{(m)}(x_i, y_j) = \sum_{k=1}^{N_y} C_{jk}^{(m)} f(x_i, y_k): m = 1, 2, \dots, N_y - 1 \quad (61)$$

$$f_{xy}^{(n+m)}(x_i, y_j) = \sum_{k=1}^{N_x} C_{ik}^{(n)} \sum_{l=1}^{N_y} C_{jl}^{(m)} f(x_k, y_l) \quad i = 1, 2, \dots, N_x \text{ and } j = 1, 2, \dots, N_y \quad (62)$$

وزن‌ها در روابط فوق در قالب ماتریس  $C$  به نام ماتریس ضرایب وزنی بیان شده‌اند و اندیس‌های  $n, m$  نشانگر مرتبه مشتق‌گیری و ماتریس ضرایب مربوط می‌باشد. به منظور استخراج ماتریس ضرایب وزنی تابع مطلوب در هر راستا توسط توابعی تقریب زده می‌شوند که این توابع تقریب به نام توابع تست شناخته می‌شوند. چانگ و شو [۶] به طور مجزا با انتخاب توابع میان یاب لاگرانژ به عنوان توابع تست فرمول‌های صریحی را برای به دست آوردن ماتریس ضرایب ارائه کرده‌اند. در این فرمول‌ها ضرایب وزنی به طور مستقیم و دقیق مستقل از تعداد و موقعیت گره‌ها حاصل می‌شوند. فرمول‌های ارائه شده توسط شو و ریچارد به واسطه بیان یک رابطه بازگشتی برای محاسبه ماتریس ضرایب در

درحالی که انحناها و نیروهای برشی برابرند با:

$$k_x = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \quad (49)$$

$$k_y = \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \quad (50)$$

$$k_{xy} = \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \quad (51)$$

$$\gamma_{xz}^0 = \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (52)$$

$$\gamma_{yz}^0 = \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (53)$$

با جایگزینی روابط (۴۳)، (۴۸) در معادله (۴۰) و (۴۲) سه رابطه اصلی ارتعاشات آزاد ساندویچ پل بر بستر الاستیک به دست خواهد آمد.

$$H_{44} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + H_{55} \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - kw + q = I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (54)$$

$$D_{11} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} - H_{44} \left( \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = I_1 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \quad (55)$$

$$(D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} - H_{55} \left( \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = I_1 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} \quad (56)$$

درجایی که ممان اینرسی و چگالی چندلایه از روابط زیر پیروی می‌کنند.

$$\rho_m h = \sum_{k=1}^N \rho_k (h_k - h_{k-1}) \quad (57)$$

$$I = \sum_{k=1}^N \rho_k \int z_k^2 dz_k \quad (58)$$

شرایط مرزی به صورت زیر برای چهار سر گیردار تعریف می‌شود:

$$w = \psi_x = \psi_y = 0 \quad (59)$$

**۵- روش دیفرانسیل کوادراچر تعمیم یافته:**

به طور کلی روش‌های عددی در حل مسائل درصد تبدیل مشتقات و انتگرال‌ها در معادلات دیفرانسیلی به یک دستگاه

مذکور می‌باشد. این اینط بانام نقاط چپیشف شناخته می‌شوند.

حال با توجه به توضیح بیان شده برای روش GDQ باید رابطه (۲۵) را که بیان کننده معادلات حاکم بر ارتعاش آزاد ساندویچ پل بر بستر الاستیک است را جداسازی نمود که به شرح زیر انجام گرفته است.

$$\sum_{j=1}^n D_{11} C_{ij}^{(xx)} \Psi_x^j + \sum_{j=1}^n D_{16} C_{ij}^{(xx)} \Psi_y^j + \sum_{j=1}^n (D_{12} + D_{66}) C_{ij}^{(xy)} \Psi_y^j + \sum_{j=1}^n D_{66} C_{ij}^{(yy)} \Psi_x^j - \sum_{j=1}^n H_{44} (\phi_{ij} \Psi_y^j + C_{ij}^{(y)} W^j) - \sum_{j=1}^n H_{55} (\phi_{ij} \Psi_x^j + C_{ij}^{(x)} W^j) + q_{ij} = -I_1 \omega^2 \phi_{ij} \Psi_x^j \quad (68)$$

$$\sum_{j=1}^n D_{66} C_{ij}^{(xx)} \Psi_y^j + \sum_{j=1}^n (D_{12} + D_{66}) C_{ij}^{(xy)} \Psi_x^j + \sum_{j=1}^n D_{22} C_{ij}^{(yy)} \Psi_y^j - \sum_{j=1}^n H_{44} (\phi_{ij} \Psi_y^j + C_{ij}^{(y)} W^j) - \sum_{j=1}^n H_{55} (\phi_{ij} \Psi_x^j + C_{ij}^{(x)} W^j) = -I_1 \omega^2 \phi_{ij} \Psi_y^j \quad (69)$$

$$\sum_{j=1}^n H_{44} (C_{ij}^{(x)} \Psi_y^j + C_{ij}^{(xy)} \Psi_x^j + 2C_{ij}^{(xy)} W^j) + \sum_{j=1}^n H_{55} (C_{ij}^{(x)} \Psi_x^j + C_{ij}^{(xy)} W^j) + \sum_{j=1}^n H_{44} (C_{ij}^{(y)} \Psi_y^j + C_{ij}^{(yy)} W^j) = -I_0 \omega^2 \phi_{ij} W^j \quad (70)$$

شرایط مرزی به صورت زیر برای چهار سر گیردار تعریف می‌شوند.

$$w = \psi_x = \psi_y = 0 \quad (71)$$

## ۶- اعتبار سنجی

در این بخش در ابتدا جهت صحت سنجی روش ارائه شده در این پژوهش به مقایسه نتایج حاصل از حل عددی GDQ با نتایج به دست آمده از مرجع [۱۶] برای شرط مرزی گیردار در لبه‌های ورق پرداخته می‌شود. بدین منظور خصوصیات ورق ارتوتروپیک استفاده شده در مقاله مرجع در جدول ۱ تا ۳ بیان شده است.

مشتق‌های مرتبه بالاتر مورد توجه بیشتری قرار گرفته‌اند. در این فرمول‌ها مؤلفه‌های غیر قطر اصلی ماتریس ضرایب برای مشتق مرتبه اول به صورت زیر بیان می‌شوند

$$C_{ij}^{(1)} = \frac{M(X_i)}{(X_i - X_j)M(X_j)} \quad i = 1, 2, \dots, N_x, i \neq j \quad (63)$$

درجایی که:

$$M(X_i) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_x} (X_i - X_j) \quad (64)$$

و برای مشتقات مرتبه بالاتر:

$$C_{ij}^{(n)} = n \left( C_{ii}^{(n-1)} C_{ij}^{(1)} - \frac{C_{ii}^{(n-1)}}{X_i - X_j} \right) \quad i = 1, 2, \dots, N_x, i \neq j \quad (65)$$

برای اعضای قطر اصلی ماتریس به شکل زیر تغییر می‌یابد.

$$C_{ii}^{(n)} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_x} C_{ij}^{(n)} : i = 1, 2, \dots, N_x, n = 1, 2, \dots, N_x - 1 \quad (66)$$

همان گونه که قبلاً ذکر شد روش DQ مشتق را به حاصل جمع وزن دار از مقادیر تابع تبدیل می‌کند؛ و از طرف دیگر وزن‌ها با توجه به روابط بیان شده بر اساس تعداد و موقعیت گره‌ها حاصل می‌شوند؛ بنابراین به راحتی می‌توان به این نکته پی برد که موقعیت و تعداد گره‌ها که به آن‌ها نقاط نمونه نیز گفته می‌شود نقش مهمی در دقت نتایج نهایی بازی می‌کنند. در این تحقیق نقاط واقع بر صفرهای چند جمله‌ای چپیشف به عنوان مجموعه نقاط نمونه انتخاب شده‌اند. این نقاط توسط رابطه زیر محاسبه می‌گردند.

$$X_i = \frac{a}{2} \left( 1 - \cos \left( \frac{i-1}{N_x-1} \pi \right) \right) \quad i = 1, 2, \dots, N_x \quad (67)$$

که در عبارت بالا  $a$ ,  $b$  به ترتیب طول بازه مورد نظر در راستای  $x$ ,  $y$  بیان کننده تعداد گره‌ها در راستای



مکانیکی مختلف مطابق مقاله مرجع [۱۶] می‌پردازیم؛ که نتایج آن در جدول های ۵ الی ۸ نشان داده شده است.

جدول ۵- مقایسه نتایج برای رویه ها B-boron/epoxy با مرجع [۱۶]

مقدار	واحد	کمیت
۱۸۵	Gpa	مدول یانگ E <sub>1</sub>
۱۰٫۵	Gpa	مدول یانگ E <sub>2</sub>
۷٫۳	Gpa	مدول برشی G <sub>12</sub>
۰٫۲۸	-	نسبت پواسون ν <sub>12</sub>
۱۶۰۰	kg/m <sup>3</sup>	چگالی ρ

جدول ۱- مشخصات ماده T-graphite/epoxy

مقدار	واحد	کمیت
۲۰۸	Gpa	مدول یانگ E <sub>1</sub>
۱۸٫۹	Gpa	مدول یانگ E <sub>2</sub>
۵٫۷	Gpa	مدول برشی G <sub>12</sub>
۰٫۲۳	-	نسبت پواسون ν <sub>12</sub>
۲۰۰۰	kg/m <sup>3</sup>	چگالی ρ

جدول ۲- مشخصات ماده B-boron/epoxy

مقدار	واحد	کمیت
۲۰۸	Gpa	مدول یانگ E <sub>1</sub>
۱۸٫۹	Gpa	مدول یانگ E <sub>2</sub>
۵٫۷	Gpa	مدول برشی G <sub>12</sub>
۰٫۲۳	-	نسبت پواسون ν <sub>12</sub>
۲۰۰۰	kg/m <sup>3</sup>	چگالی ρ

جدول ۶- مقایسه نتایج برای رویه ها B-boron/epoxy با مرجع [۱۶]

مقدار	واحد	کمیت
۲۰۸	Gpa	مدول یانگ E <sub>1</sub>
۱۸٫۹	Gpa	مدول یانگ E <sub>2</sub>
۵٫۷	Gpa	مدول برشی G <sub>12</sub>
۰٫۲۳	-	نسبت پواسون ν <sub>12</sub>
۲۰۰۰	kg/m <sup>3</sup>	چگالی ρ

جدول ۳- مشخصات ماده K-aryl/epoxy

مقدار	واحد	کمیت
۷۶	Gpa	مدول یانگ E <sub>1</sub>
۵٫۶	Gpa	مدول یانگ E <sub>2</sub>
۲٫۳	Gpa	مدول برشی G <sub>12</sub>
۰٫۳۴	-	نسبت پواسون ν <sub>12</sub>
۱۴۶۰	kg/m <sup>3</sup>	چگالی ρ

جدول ۷- مقایسه نتایج برای رویه ها B-boron/epoxy با مرجع [۱۶]

مقدار	واحد	کمیت
۷۶	Gpa	مدول یانگ E <sub>1</sub>
۵٫۶	Gpa	مدول یانگ E <sub>2</sub>
۲٫۳	Gpa	مدول برشی G <sub>12</sub>
۰٫۳۴	-	نسبت پواسون ν <sub>12</sub>
۱۴۶۰	kg/m <sup>3</sup>	چگالی ρ

جدول ۸- مقایسه نتایج برای رویه ها K-aryl/epoxy با مرجع [۱۶]

مقدار	واحد	کمیت
۷۶	Gpa	مدول یانگ E <sub>1</sub>
۵٫۶	Gpa	مدول یانگ E <sub>2</sub>
۲٫۳	Gpa	مدول برشی G <sub>12</sub>
۰٫۳۴	-	نسبت پواسون ν <sub>12</sub>
۱۴۶۰	kg/m <sup>3</sup>	چگالی ρ

جدول ۴- مقایسه نتایج خروجی برای شرط مرزی گیردار با مرجع [۱۶]

مقدار	واحد	کمیت
۲۰۸	Gpa	مدول یانگ E <sub>1</sub>
۱۸٫۹	Gpa	مدول یانگ E <sub>2</sub>
۵٫۷	Gpa	مدول برشی G <sub>12</sub>
۰٫۲۳	-	نسبت پواسون ν <sub>12</sub>
۲۰۰۰	kg/m <sup>3</sup>	چگالی ρ

هدف از انجام این پژوهش تحلیل ارتعاش آزاد و تغییر شکل ایجادشده در ساندویچ پنل بر بستر الاستیک وینکلر با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول به همراه روش GDQM می‌باشد، هسته ساندویچ پنل از نوع لانه‌زنبوری شش‌وجهی است که خواص آن و همچنین خصوصیات رویه‌ها در جدول زیر بیان شده‌اند. در این مقاله نتایج خروجی برای دو ماده متفاوت برای رویه‌ها ارائه شده است به ترتیب شرح زیر می‌باشند:

جدول ۹- نام مواد تشکیل دهنده رویه‌ها

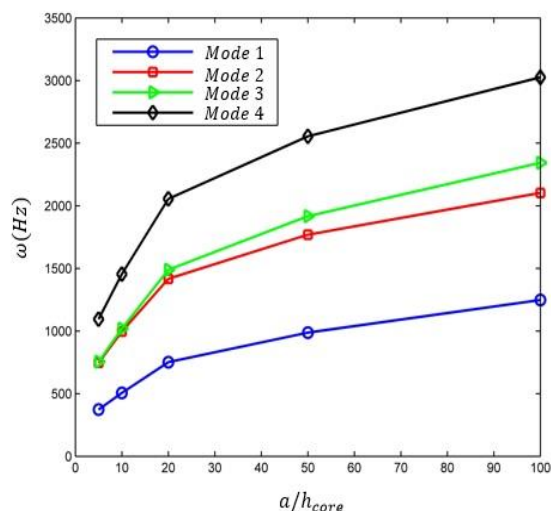
M <sub>1</sub>	Carbon fiber reinforced plastic
----------------	---------------------------------

همانطور که از نتایج ارائه شده در جدول ۴ برای روش حل GDQM مشاهده می‌گردد میزان خطای نسبی این روش در مقایسه با روش اجزا محدود و گالریکین برای یک ورق ارتوتروپیک با شرط مرزی گیردار در لبه های آن بسیار کم می‌باشد. در ادامه جهت اعتبار سنجی بیشتر به بررسی ۵ مد اول ارتعاشی برای رویه هایی با خواص

با خواص مکانیکی متفاوت در نظر گرفته شده و شرط مرزی حاکم بر آن از نوع گیردار لحاظ شده است. در بخش سوم تأثیر فونداسیون وینکلر بر میزان مد ارتعاشی و خیز حاصل در مدل به ازای پارامترهای مختلف بررسی شده است.

#### ۸-۱ بخش اول ارائه نتایج

در شکل ۳ تا ۶، میزان فرکانس طبیعی برای ۴ مد اول ارتعاشی به ازای سختی فونداسیون  $k = 1100 N/m^3$  و عرض  $b = 1(m)$  و با در نظر گرفتن متغیرهایی از جمله طول و نسبت آن به ضخامت هسته نشان داده شده است. لازم به ذکر است که جنس رویه‌ها از **Carbon fiber reinforced plastic** می‌باشد.



شکل ۳- فرکانس‌های طبیعی برای ۴ مد اول با فرض  $a = 1(m)$

شکل ۳ فرکانس‌های طبیعی برای ۴ مد اول ارتعاشی به ازای نسبت‌های مختلف طول به ضخامت هسته را نشان می‌دهد. با توجه به روند نمودار مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت طول به ضخامت هسته پنل ساندویچی میزان فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد. این روند افزایشی برای سایر مودهای ارتعاشی نیز صادق می‌باشد. در شکل ۴ نتایج خروجی بر حسب فرکانس سازه و نسبت طول به ضخامت هسته لانه زنبوری به ازای  $a = 3(m)$  آورده شده است.

K-aryl/epoxy			
جدول ۱۰- خواص مکانیکی رویه‌ها			
کمیت	واحد	نوع ماده رویه‌ها	
		$M_2$	$M_1$
مدول یانگ $E_1$	Gpa	۵۴,۵۵	۷۶
مدول یانگ $E_2$	Gpa	۵۴,۵۵	۵,۶
مدول برشی $G_{12}$	Gpa	۲۰,۶۷	۲,۳
مدول برشی $G_{13}$	Gpa	۳,۷۸	۲,۳
مدول برشی $G_{23}$	Gpa	۳,۷۸	۲,۱۵
نسبت پواسون $\nu_{12}$	-	۰,۳۲	۰,۳۴
نسبت پواسون $\nu_{13}$	-	۰,۳۲	۰,۳۴

هسته در نظر از جنس نرم و از نوع لانه‌زنبوری شش‌وجهی می‌باشد که با توجه به اینکه در کد GDQM نوشته شده نیاز به مدول‌های برشی هسته در راستای Z می‌باشد. لذا مقادیر آن به شرح جدول ۱۱ است.

جدول ۱۱- مشخصات ماده هسته

کمیت	واحد	مقدار
مدول برشی $G_{13}$	Mpa	۴۴۰
مدول برشی $G_{23}$	Mpa	۲۲۰

#### ۷- تعریف چند پارامتر موردنیاز

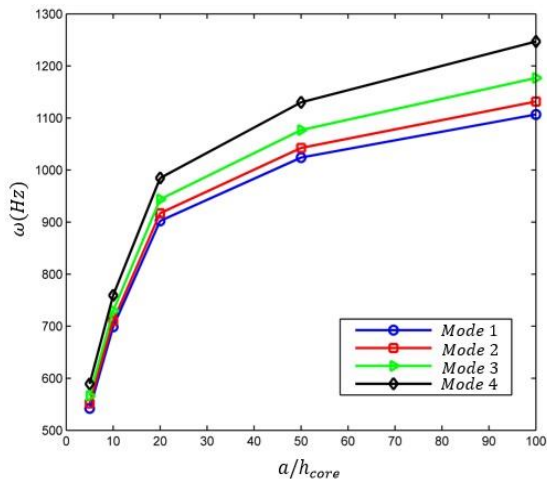
جهت ارائه نتایج خروجی به ازای پارامترهای مختلف هندسی در جدول ۱۲ متغیرهای موردنیاز تعریف شده است.

جدول ۱۲- تعریف متغیرهای موردنیاز

کمیت	واحد	نام متغیر
طول ساندویچ پنل	m	a
عرض ساندویچ پنل	m	b
ضخامت رویه‌های ساندویچ پنل	m	t
ضخامت هسته (لانه‌زنبوری)	m	$h_c$
نسبت طول به ضخامت هسته	-	$a/h_c$
نسبت ضخامت هسته به رویه‌های	-	$h_c/t$

#### ۸- نتایج خروجی

نتایج به دست آمده از حل GDQM در این پژوهش در سه بخش ارائه شده‌اند. در بخش اول و دوم به محاسبه فرکانس طبیعی ساندویچ پانل با هسته لانه‌زنبوری و رویه‌هایی از دو ماده ارتوتروپیک پرداخته می‌شود. برای رویه‌ها دو نوع ماده

جدول ۶- فرکانس های طبیعی برای ۴ مد اول با فرض  $a = 7(m)$ 

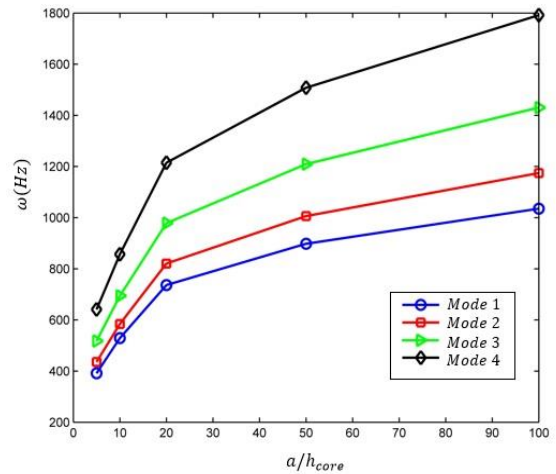
با مشاهده نتایج خروجی در شکله ای ۳ تا ۶ می توان دریافت که با افزایش طول سازه میزان فرکانس طبیعی سازه کاهش می یابد. همچنین با توجه به روند نتایج خروجی در شکل ۵ و ۶ این نتیجه حاصل میشود که فرکانس طبیعی با نسبت طول به ضخامت ساندویچ پنل رابطه مستقیم دارد. در ادامه در جدول ۱۳ تأثیر ضخامت هسته لانه زنبوری به رویه ها نشان داده شده است.

جدول ۱۳- فرکانس های طبیعی به ازای نسبت های مختلف ضخامت هسته به ضخامت رویه ها

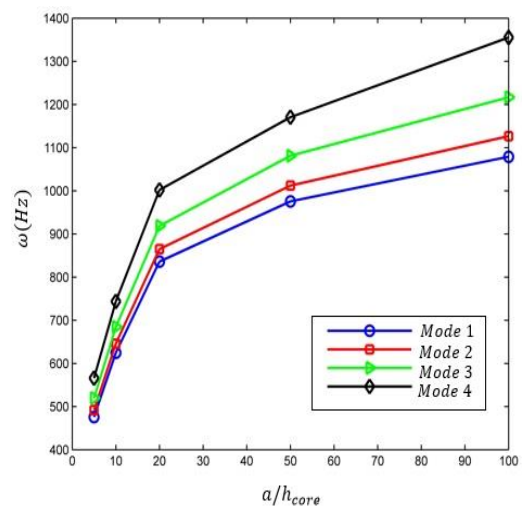
مد چهارم	مد سوم	مد دوم	مد اول	$h_{core}/t$
۷۸۲,۲۷	۵۲۵,۲۱	۵۲۲,۱۵	۲۶۳,۴۵	۰,۱
۱۱۳۷,۵۵	۷۸۳,۵۵	۷۷۵,۴۷	۳۸۶,۶۴	۰,۲
۱۴۳۳,۹۵	۹۹۳,۲۳	۹۷۹,۱۹	۴۹۱,۲۳	۰,۳
۱۷۰۴,۵۸	۱۱۸۶,۸۶	۱۱۶۵,۶۴	۵۸۷,۹۶	۰,۴
۱۹۶۱,۵۰	۱۳۷۰,۸۳	۱۳۴۲,۹۹	۶۸۰,۷۱	۰,۵
۲۲۱۰,۴۴	۱۵۵۰,۶۳	۱۵۱۵,۱۰	۷۷۱,۳۵	۰,۶
۲۴۵۴,۵۵	۱۷۲۷,۷۰	۱۶۸۴,۱۰	۸۶۰,۹۴	۰,۷
۲۶۹۵,۶۵	۱۹۰۳,۳۶	۱۸۵۱,۲۴	۹۵۰,۰۴	۰,۸
۲۹۳۴,۸۷	۲۰۷۸,۳۳	۲۰۱۷,۲۸	۱۰۳۹,۰۲	۰,۹

جدول ۱۳ تأثیر افزایش نسبت ضخامت هسته به ضخامت رویه ها برای ۴ مد اول ارتعاشی را نشان می دهد. مشاهده می شود که با افزایش نسبت ضخامت هسته به رویه پنل ساندویچی فرکانس طبیعی افزایش می یابد.

## ۲-۸ بخش دوم ارائه نتایج

شکل ۴- فرکانس های طبیعی برای ۴ مد اول با فرض  $a = 3(m)$ 

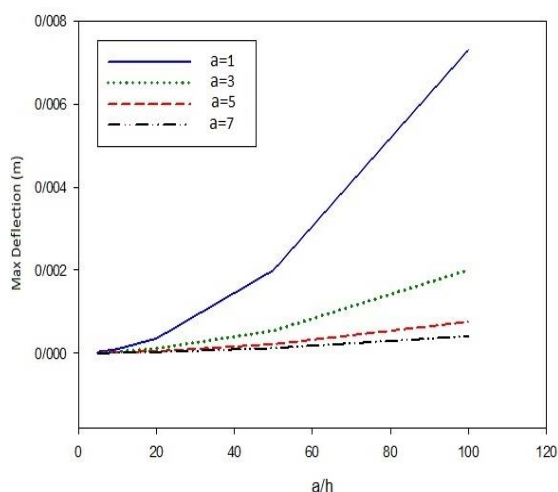
همانطور که از شکل ۴ مشاهده می گردد افزایش طول پنل ساندویچی باعث کاهش میزان فرکانس طبیعی سازه می شود. در شکل های ۵ و ۶ افزایش بیشتر این پارامتر و تأثیر آن بر فرکانس طبیعی و مد های ارتعاشی قابل مشاهده می باشد.

شکل ۵- فرکانس های طبیعی برای ۴ مد اول با فرض  $a = 5(m)$

۷۲۰،۰۳	۵۵۷،۳۴	۳۸۸،۵۵	۲۸۵،۰۹	۰،۲
۸۸۰،۱۹	۶۸۳،۳۲	۴۷۶،۶۷	۳۴۹،۹۶	۰،۳
۱۰۱۶،۰۱	۷۹۱،۲۲	۵۵۲،۳۰	۴۰۵،۷۲	۰،۴
۱۱۳۸،۲۹	۸۸۸،۴۰	۶۲۰،۴۰	۴۵۵،۹۹	۰،۵
۱۲۵۰،۲۷	۹۷۸،۲۶	۶۸۳،۴۵	۵۰۲،۵۷	۰،۶
۱۳۵۵،۱۳	۱۰۶۲،۸۳	۷۴۲،۸۸	۵۴۶،۵۲	۰،۷
۱۴۵۴،۵۳	۱۱۴۳،۵۰	۷۹۹،۵۸	۵۸۸،۴۹	۰،۸
۱۵۴۹،۵۹	۱۲۲۱،۰۸	۸۵۴،۱۵	۶۲۸،۹۱	۰،۹

### ۳-۸ بخش سوم ارائه نتایج

در این بخش به تأثیر نسبت طول به ضخامت هسته پل ساندویچی  $a/h$  بر خیز ایجاد شده در ساندویچ پل با خواص رویه‌های از جنس K-aryl/epoxy و Carbon fiber reinforced plastic تحت بارگذاری‌های گسترده و سینوسی ارائه شده است در پایان تأثیر میزان سختی فونداسیون بر میزان فرکانس طبیعی بررسی شده است.



شکل (۷) تأثیر نسبت  $a/h$  بر خیز ایجاد شده در ساندویچ پل با خواص رویه‌ها از جنس (Carbon fiber reinforced plastic) تحت بارگذاری گسترده

در این بخش همانند بخش اول به بررسی پارامترهای هندسی بر فرکانس طبیعی ساندویچ پل می‌پردازیم. رویه دارای خواص مکانیکی از جنس K-aryl/epoxy در نظر گرفته شده اند. از مقایسه نتایج ارائه شده در جداول ۱۴ الی ۱۸ با بخش اول مشاهده می‌گردد که میزان فرکانس طبیعی سازه کاهش یافته است دلیل این امر کاهش خواص مکانیکی ماده در نظر گرفته شده برای رویه‌ها می‌باشد.

جدول ۱۴- فرکانس های طبیعی برای ۴ مد اول با فرض  $a = 1(m)$  (واحد فرکانس های طبیعی (Hz) می باشد)

مد اول	مد دوم	مد سوم	مد چهارم	$a/h_{core}$
۲۸۶،۲۶	۳۹۰،۱۰	۵۵۹،۵۰	۷۲۲،۴۵	۵
۳۹۹،۴۱	۵۴۳،۳۳	۷۷۷،۸۷	۹۹۶،۷۲	۱۰
۶۱۰،۵۸	۸۲۶،۷۴	۱۱۷۸،۳۳	۱۴۷۸،۰۸	۲۰
۸۲۱،۱۷	۱۱۰۶،۱۰۳	۱۵۶۸،۵۹	۱۹۰۹،۵۶	۵۰
۱۰۶۵،۳۱	۱۴۲۷،۸۸	۲۰۱۳،۷۹	۲۳۴۳،۹۱	۱۰۰

جدول ۱۵- فرکانس های طبیعی برای ۴ مد اول با فرض  $a = 3(m)$

مد اول	مد دوم	مد سوم	مد چهارم	$a/h_{core}$
۱۴۵،۴۳	۲۲۲،۴۷	۳۴۴،۴۵	۳۵۲،۸۶	۵
۲۰۴،۰۳	۳۱۰،۷۵	۴۷۸،۷۴	۴۷۳،۸۳	۱۰
۳۱۵،۸۵	۴۷۵،۱۷	۷۲۲،۱۶	۷۵۱،۸۹	۲۰
۴۳۲،۵۵	۶۳۹،۵۹	۹۵۴،۱۹	۱۰۰۹،۱۸	۵۰
۵۷۷،۳۴	۸۳۲،۳۲	۱۲۰۸،۷۶	۱۳۰۵،۱۵	۱۰۰

جدول ۱۶- فرکانس های طبیعی برای ۴ مد اول با فرض  $a = 5(m)$

مد اول	مد دوم	مد سوم	مد چهارم	$a/h_{core}$
۱۶۲،۷۳	۱۹۳،۹۴	۲۴۶،۱۸	۳۱۹،۰۲	۵
۲۲۷،۹۸	۲۷۰،۹۱	۳۴۲،۷۱	۴۴۲،۴۵	۱۰
۳۵۱،۱۸	۴۱۴،۱۲	۵۱۹،۱۶	۶۶۳،۸۵	۲۰
۴۷۷،۱۵	۵۵۷،۰۵	۶۹۰،۲۰	۸۷۱،۷۱	۵۰
۶۲۸،۷۴	۷۲۳،۹۱	۸۸۲،۴۸	۱۰۹۵،۸۲	۱۰۰

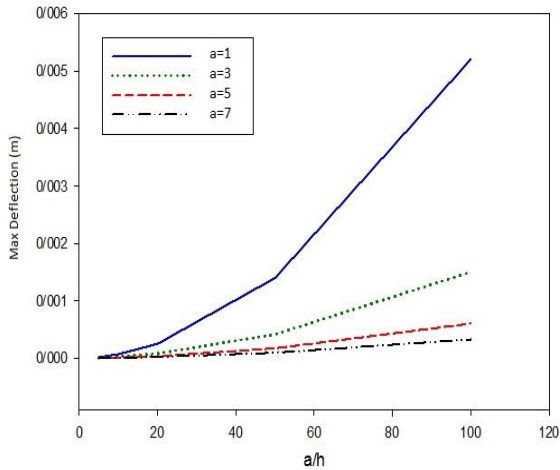
جدول ۱۷- فرکانس های طبیعی برای ۴ مد اول با فرض  $a = 7(m)$

مد اول	مد دوم	مد سوم	مد چهارم	$a/h_{core}$
۱۸۵،۴۱	۲۰۲،۶۷	۲۳۱،۸۷	۲۷۳،۲۷	۵
۲۵۹،۱۳	۲۸۲،۶۶	۳۲۲،۵۰	۳۷۸،۹۴	۱۰
۳۹۶،۳۵	۴۳۰،۰۶	۴۸۷،۳۰	۵۶۸،۳۳	۲۰
۵۳۲،۹۲	۵۷۴،۴۹	۶۴۵،۴۸	۷۴۶،۰۲	۵۰
۶۹۰،۵۰	۷۳۸،۲۴	۸۲۰،۶۴	۹۳۷،۵۶	۱۰۰

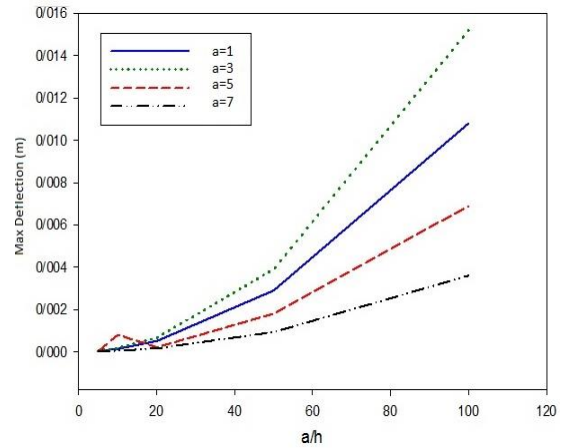
جدول ۱۸- فرکانس های طبیعی به ازای نسبت های مختلف ضخامت هسته به

ضخامت رویه ها

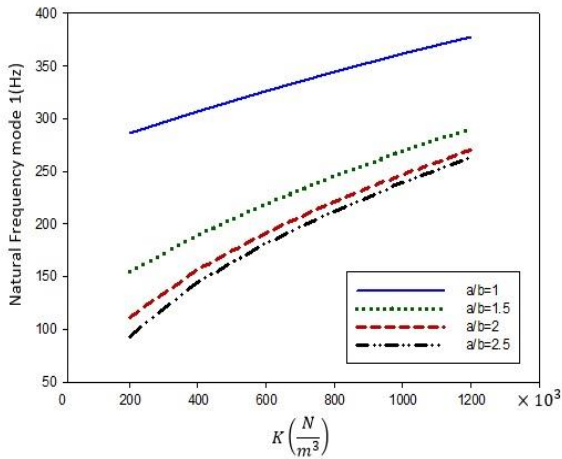
مد اول	مد دوم	مد سوم	مد چهارم	$h_{core}/t$
۲۰۱،۶۶	۲۷۴،۹۸	۳۹۴،۶۸	۵۱۱،۵۴	۰،۱



شکل (۱۰) تأثیر نسبت  $a/h$  بر خیز ایجادشده در ساندویچ پنل با خواص رویه‌ها از جنس (K-aryl/epoxy) تحت بارگذاری سینوسی

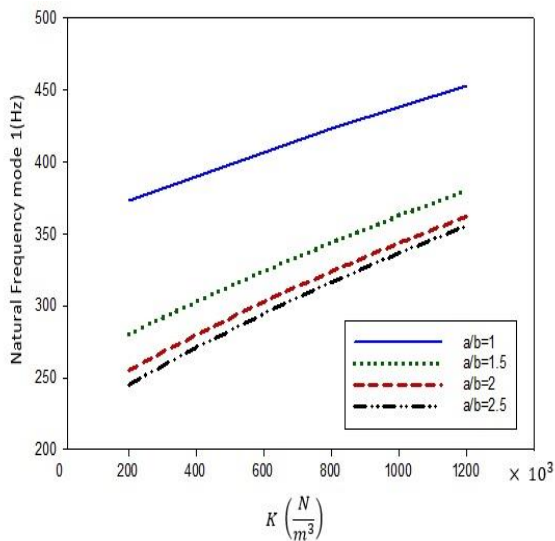


شکل (۸) - تأثیر نسبت  $a/h$  بر خیز ایجادشده در ساندویچ پنل با خواص رویه‌ها از جنس (K-aryl/epoxy) تحت بارگذاری گسترده

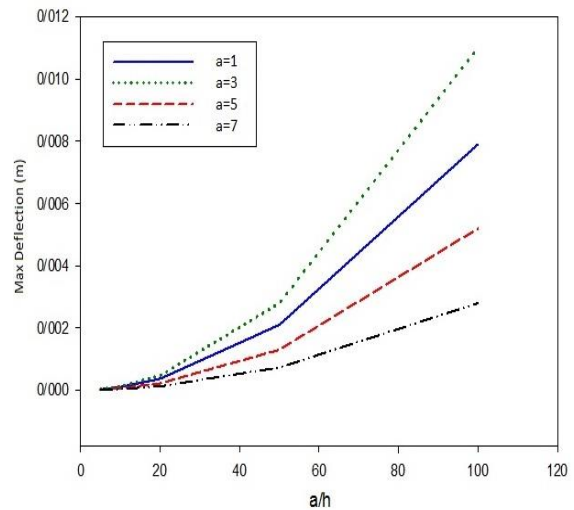


شکل (۱۱) تأثیر سختی فنر بستر الاستیک بر فرکانس طبیعی مد اول برای نسبت‌های مختلف ابعاد ساندویچ پنل رویه‌ها از جنس Carbon fiber reinforced plastic

با توجه به شکل ۷ و ۸ می‌توان دریافت که با افزایش نسبت طول به ضخامت هسته میزان خیز ایجادشده در ساندویچ پنل افزایش خواهد یافت. از طرفی یکی از مؤثرترین پارامترهایی که بر میزان تغییر شکل سازه تأثیر بسزایی دارد خواص مکانیکی رویه‌ها می‌باشد. در ادامه در شکل ۹ و ۱۰ تأثیر بارگذاری سینوسی بر میزان خیز ایجادشده ارائه شده است.



شکل (۱۲) تأثیر سختی فنر بستر الاستیک بر فرکانس طبیعی مد اول برای نسبت‌های مختلف ابعاد ساندویچ پنل (رویه‌ها از جنس K-aryl/epoxy)



شکل (۹) تأثیر نسبت  $a/h$  بر خیز ایجادشده در ساندویچ پنل با خواص رویه‌ها از جنس (Carbon fiber reinforced plastic) تحت بارگذاری سینوسی

- با افزایش نسبت  $a/b$  خیز ماکزیمم در مدل کاهش می‌یابد.

#### ۷- مراجع:

- [1] Ansari M., Golzar M., Behravesht A. H., Evaluation of corrugated composite beam deflection by shape memory alloy wire, *Modares Mechanical Engineering*, vol. 14, 2014, pp. 49-58.
- [2] Xing, Y. F., and Liu, B., Exact Solutions for the Free In-Plane Vibrations of Rectangular Plate, *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 51, 2009, pp. 246-255.
- [3] CHEN P.C., RAMKUMAR R.L., Static and dynamic analysis of clamped orthotropic plates using Lagrangian multiplier technique, *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 25, 1987, pp. 316-323.
- [4] Chen W. q., Ding H. j., Xu R.q., On Exact Analysis of Free Vibrations of Embedded Transversely Isotropic Cylindrical Shell, *International Journal of Pressure Vessels and Piping* Vol. 75, 1998, pp. 961-966.
- [5] Tornabene Viola E., Fantuzzi F., General higher-order shear deformation theories for the free vibration analysis of completely doubly-curved laminated shells and panels, *Composite Structures*, vol. 95, 2013, pp. 639-666.
- [6] Shu C., Chen W., Du H., Free vibration analysis of curvilinear quadrilateral plates by the differential quadrature method, *J.Comput. Phys.*, vol. 163, 2000, pp. 452-466.
- [7].Sorokin S.V. and Ershova O.A., Forced and Free Vibrations of Rectangular Sandwich Plates with Parametric Stiffness Modulation, *J. Sound and Vibration*, Vol. 259, 2003, pp. 119-143.
- [8] RAMKUMAR R. L. , CHEN P.C. and SANDERSO W.J., Free vibration solution for clamped orthotropic plates using Lagrangian multiplier technique, *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 14- 035040.

از شکل‌های ۱۱ و ۱۲ مشاهده می‌گردد که با افزایش ضریب سختی فونداسیون وینکلر فرکانس طبیعی برای نسبت ابعاد مختلف افزایش می‌یابد.

#### ۶- بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله به بررسی فرکانس‌های طبیعی و تغییر شکل‌های ایجاد شده در ساندویچ پنل بر بستر الاستیک پرداخته شد. تئوری مورد استفاده تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول در نظر گرفته شد و جهت حل معادلات حاکم بر فیزیک مسئله از روش حل عددی GDQM استفاده گردید. مطابق روند صحنه سنجی، نتایج حاصل دارای دقت بالا و درصد خطای نسبی پایین در مقایسه با تئوری‌های کلاسیک است. در این مقاله از دو ماده مختلف که هر کدام دارای خواص متفاوتی بودند در رویه‌های ساندویچ پنل مورد استفاده قرار گرفت؛ که نتایج آن به شرح زیر می‌باشند:

آنچه برای جداول حاصل شده از بخش ارتعاشات ساندویچ پنل می‌توان نتیجه گرفت به شرح زیر می‌باشد:

- با افزایش نسبت طول به ضخامت هسته  $a/h_{core}$  مقدار فرکانس طبیعی مدهای ارتعاشی افزایش می‌یابد.
- با افزایش ضخامت هسته به رویه‌ها  $h/t$  مقدار فرکانس طبیعی مدهای ارتعاشی افزایش می‌یابد.
- افزایش سختی فونداسیون الاستیک وین کلر باعث افزایش مدهای ارتعاشی و خیز ماکزیمم می‌گردد.

آنچه برای نمودارهای حاصل شده از بخش خیز می‌توان نتیجه گرفت به شرح زیر است:

- با افزایش نسبت ضخامت هسته به ضخامت رویه‌ها ماکزیمم تغییر مکان ایجاد شده در ساندویچ پنل کاهش می‌یابد.
- با افزایش نسبت طول ساندویچ پنل به ضخامت  $a/h_{core}$  مقدار ماکزیمم تغییر مکان افزایش می‌یابد.

[9] Yuan W., A theoretical analysis on the thermal buckling behavior of fully clamped sandwich panels with truss cores, *Journal of Thermal Stresses*, 37, 2014, pp. 1433–1448.

[10] Wang S., Free vibration analysis of skew fibre-reinforced composite laminates based on first-order shear deformation plate theory, *Comput. Struct.* Vol. 63, 1997, pp. 525–538.

[11].Kant T. and Swaminathan K., Analytical Solutions for Free Vibration of Laminated Composite and Sandwich Plates Based on a Higher Order Refined Theory, *J. Composite Structures* , vol. 53, 2001, pp. 73–85.

[12] Frostig Y. and Thomsen O.T., High-order Free Vibration of Sandwich Panels with a Flexible Core, *J. Solid and Structures*, vol. 41, 2004 ,pp. 1697-1724.

[13] Srinivas S., Joga-Rao C. V., Rao, A. K., An Exact Analysis for Vibration of Simply-Supported Homogeneous and Laminated Thick Rectangular Plates, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 12, 1970 , pp. 187-199.

[14] Neves A.M.A. and et al., Free vibration analysis of functionally graded shells by a higher-order shear deformation theory and radial basis functions collocation, accounting for through-the-thickness deformations, *European Journal of Mechanics A/Solids* 37, 2013, pp. 24-34.

[15] Tornabene F., 2-D GDQ solution for free vibrations of anisotropic doubly-curved shells and panels of revolution, *Composite Structures* 93, 2011, pp. 1854–1876.

[16] ] Xing Y.F., Liu B., New exact solutions for free vibrations of thin orthotropic rectangular plates, *Composite Structures*, Vol 89(4), 2009, pp. 567-.

[17] Reddy, Junuthula Narasimha. *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. CRC press, 2004.

