مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار
شماره بیست و چهارم / پائیز ۱۳۹٤

بهینه سازی پویای سبد سرمایه گذاری با توجه به هزینه معاملات

زهرا پوراحمدی[۱]
امیرعباس نجفی[۲]

تاریخ دریافت: ۹۳/۱۱/۱۴ تاریخ پذیرش: ۹۴/۲/۹

چکیده

انتخاب سبد سرمایه‌گذاری بهینه برای سرمایه‌گذار، اساسی‌ترین کار در امر مدیریت دارایی‌ها است. در بسیاری از رویکردهای بهینه‌سازی، این کار به صورت یک دوره‌ای انجام می‌گیرد اما از آنجا که سرمایه‌گذاری مفهومی بلندمدت و آینده‌نگر است، یک دوره‌ای در نظر گرفتن بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری با این مفهوم همخوانی نخواهد داشت. بنابراین در این مقاله قصد داریم تا بهینه‌سازی یک دوره ای را به بهینه‌سازی پویا و چند دوره‌ای ارتقا داده و به منظور کاربردی‌تر نمودن مدل پیشنهادی هزینه معاملات را در مدل وارد کرده تا بتوانیم در شرایط واقعی تصمیمی صحیح در رابطه با استراتژی سرمایه‌گذاری اتخاذ نماییم. به منظور اعتبارسنجی مدل پیشنهادی، مثالهای متفاوتی مورد بررسی قرار گرفتند و ضمن شرح عملکرد مدل، کارایی آن نیز در مقابل مدل تک دوره‌ای پیش رونده با استفاده از آزمون من ویتنی مورد سنجش قرار گرفت. با توجه به نتایج ارائه شده می توان به این جمع‌بندی رسید که مدل پویای پیشنهادی گرچه ممکن است در دوره کوتاه مدت از نظر آماری تفاوت محسوسی با مدل تک دوره‌ای نداشته باشد، اما برتری آن در دوره‌های بلند مدت چشمگیر خواهد بود.

واژه‌های کلیدی: سبد سرمایه‌گذاری، بهینه‌سازی پویا، هزینه معاملات، استراتژی سرمایه‌گذاری.

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مالی، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
۲- استادیار دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

۱- مقدمه

بحث سرمایه‌گذاری به‌نحوی که موجب حفظ ارزش و کسب بازده از دارایی‌ها گردد، از اهمیت بسزایی برخوردار است. با به‌کارگیری بهینه‌سازی پرتفو، یکی از مهمترین اهداف در مدیریت دارایی‌ها که همان انتخاب سبد سرمایه‌گذاری مناسب برای سرمایه‌گذاران می‌باشد، محقق می‌گردد. در این مقاله به دنبال ارائه مدلی هستیم تا بتوان به وسیله آن به صورت کاربردی به امر بهینه سازی سبد سرمایه گذاری به صورت چند دوره ای پرداخت و استراتژی مناسب سرمایه گذاری را برای دوره‌ی مد نظر مشخص کرد. در حقیقت مساله مورد بررسی در این مقاله سرمایه‌گذاری چنددوره‌ای خواهد بود که در آن سرمایه‌گذار می‌تواند در تعدادی نقاط مشخص قبل از پایان دوره در سرمایه‌گذاری خود تجدیدنظر کند. اگر تعداد نقاط ممکن برای بازنگری N باشد و طول کل زمان سرمایه‌گذاری را T بنامیم، در صورتی که N به سمت بینهایت میل کند، از حالت بهینه‌سازی در فضای گسسته به بهینه‌سازی در فضای پیوسته خواهیم رسید. البته بهینه‌سازی به صورت پیوسته مقداری دور از واقعیت است چراکه معمولا خرید و فروش‌ها و بازنگری در پرتفو در نقاطی گسسته صورت می‌پذیرد. علاوه بر این، پیوسته در نظر گرفتن زمان موجب پیچیدگی‌های زیادی در حل مسئله بهینه‌سازی می‌شود. لذا در این مقاله نیز زمان گسسته مد نظر قرار خواهد گرفت. در این مقاله مدلی ارائه خواهد شد که با در نظرگیری هزینه مبادله استراتژی های سرمایه گذاری را در نقاط گسستگی به گونه ای تعیین می‌کند که در آخر دوره، سرمایه‌گذار به مقدار بهینه مطلوبیت خود دست یابد. در این مقاله به منظور بهینه‌سازی از روش پویا و داینامیک استفاده می‌شود به این معنی که پس از بهینه‌سازی هر زیر مساله از جواب آن به منظور یافتن جواب بهینه زیر مساله بعدی استفاده می‌شود و این امر به صورت بازگشتی تا جایی ادامه میابد که کل مساله بزرگتر را پوشش دهد. در این بین، ورود هزینه معاملات به مدل، مساله‌ای خواهد بود که در این مقاله سعی می‌شود با دیدگاهی متفاوت به حل آن پرداخته شود و راهکاری کاربردی برای آن پیشنهاد گردد.

۲- مبانی نظری و مروری بر پیشینه پژوهش

سبد سرمایه‌گذاری متشکل از چندین دارایی است. در تحلیل عددی سبد سرمایه‌گذاری، سعی می‌شود تا ترکیبی مناسب از سهام انتخاب گردد به نحوی‌که نتایج و بازدهی حاصل از سرمایه‌گذاری به میزان بهینه نزدیک شود. به دلیل وجود همبستگی میان سهام و نوسانات زیاد آنها، پیدا کردن دارایی بهینه برای سرمایه‌گذاری کافی نیست و باید ترکیبی از دارایی‌ها انتخاب شود. ایده انتخاب سبد سرمایه‌گذاری بهینه به مارکویتز[1] باز می‌گردد که سعی کرد سبد سرمایه‌گذاری انتخاب کند که در مقدار بازده مورد انتظار کمترین نوسان را نسبت به بازده داشته باشد و آن را مرز کارا[2] نامید (مارکویتز، ۱۹۵۲). ایده وی در طی ۵۰ سال بعد از مطرح شدنش هم به صورت کاربردی و هم تئوری مورد استقبال قرار گرفت. البته مشکل عمده این روش، نگاه به سرمایه‌گذاری به صورت یک دوره‌ای بود. در این روش پرتفو بهینه در زمان ابتدایی به دست می‌آمد و ارزش سرمایه‌گذاری با توجه به ترکیب ایده آل معرفی شده برای زمان‌های بعدی محاسبه می‌شد.

البته این امری واضح است که سبد سرمایه‌گذاری در طول زمان نیاز به بازنگری دارد. بنابراین در سال ۱۹۶۹ مرتون[۳] برای حالت زمان پیوسته مدلی پیشنهاد داد که سرمایه‌گذار قادر بود در طول دوره سرمایه‌گذاری در ترکیب سبد سرمایه‌گذاری خود تجدید نظر نموده و میزان مصرف و سرمایه‌گذاری در دارایی‌های مختلف را به گونه‌ای تنظیم نماید که در هر زمان به حداکثر مطلوبیت خود از مصارف بعدی و مطلوبیت انتظاری حاصل از سرمایه‌گذاری، برسد (مرتون، ۱۹۶۹). وی در مقاله خود از معادلات غیرخطی دیفرانسیل جزئی[۴] برای پیدا کردن پرتفو بهینه استفاده کرد. از محاسن روش ارائه شده این بود که برای توابع مطلوبیت[۵] مختلف امکان حل داشت. هدف وی در این مقاله کنترل بر میزان خرید و فروش دارایی ریسکی بود تا بتواند همیشه نسبت ثابتی از ثروت خود را در دارایی ریسک‌دار سرمایه‌گذاری کند. در مقاله وی از تابع مطلوبیت لگاریتمی، تابع مطلوبیت CARA، به عنوان تابع هدف استفاده شده بود. نکته مهم در رابطه با تابع مطلوبیت لگاریتمی این است که برای یافتن حالت بهینه سرمایه‌گذاری در دارایی ریسک‌دار مستقل از میزان ثروت خواهد بود و تنها وابسته به نوسانات سهام است. البته کار مرتون با محدودیت مهم نداشتن هزینه معاملات رو به رو بود که باعث ساده‌سازی بیش از حد فضای مساله می‌شد. از سال ۱۹۷۰ تاکنون مدل‌های مختلفی که هزینه معاملات در آنها لحاظ شده‌اند ارائه شده که هر یک سختی محاسباتی و مزایا و معایب خود را دارند، اما در کل هدف همگی آنها فهم این موضوع است که سرمایه‌گذار واقعی چگونه تصمیم‌گیری می‌کند. در مجموع می‌توان سردمداران بهینه‌سازی پویا را مرتون (۱۹۶۹) و سامولسون[۶] (۱۹۶۹) دانست. البته متاسفانه با استفاده از روش‌های ارائه شده توسط آنها تنها برای مسائل محدود و ترجیحات خاص سرمایه‌گذار، جواب وجود داشت که مثال‌هایی از آن را می‌توان در کارهای کیم[۷] و اومبرگ[۸] (۱۹۸۶) لیو[۹] (۱۹۹۸) و واچر[۱۰] (۲۰۰۲) مشاهده کرد.

در مطالعاتی که امروزه بر روی این موضوع انجام می‌گیرد، روش‌های عددی و تخمینی ارائه می‌شود که به وسیله آنها می‌توان ویژگی‌هایی منطبق‌تر با واقعیت را در مدل بهینه‌سازی پرتفو وارد نمود. در این زمینه می‌توان به کارهای اشخاصی مانند برنان[۱۱] و همکارانش در سال ۱۹۹۷ اشاره کرد که به حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی در قالب بهینه‌سازی پویا پرداختند. کوگان[۱۲] و اوپال[۱۳] در سال ۲۰۰۱ با روش‌های متفاوتی به گسترش تابع هدف پرداختند و به همین طریق توانستند مساله را به صورت تحلیلی حل کنند. مرحله دیگری در مطالعات که باعث ساده‌سازی مساله شد، گسسته‌سازی فضای مساله بود که پس از آن این امکان فراهم شد تا برای ارزیابی و حل مساله از روش‌هایی چون دیفرانسیل کوادریچر (بالدوزی و لینچ[۱۴]، ۱۹۹۹)، شبیه‌سازی (باربریز[۱۵]، ۲۰۰۲)، گسسته‌سازی دو جمله‌ای (دامون[۱۶] و همکاران، ۲۰۰۱)، رگرسیون ناپارامتری (برندت[۱۷]، ۲۰۰۵) و بهینه‌سازی پویا استفاده کرد.

برنامه‌ریزی پویا روشی است که برای حل مسائل پیچیده در ریاضیات، علوم کامپیوتر، اقتصاد و غیره، مورد استفاده قرار می‌گیرد. این روش ابتدا مساله را به زیر مساله‌های ساده‌تر تقسیم می‌کند و از خاصیت هم پوشانی بین زیرمساله‌ها استفاده می‌نماید تا مقدار بهینه را برای زیرمساله‌ها مشخص کند و از این طریق زمان حل مسئله بهینه‌سازی را نسبت به حل ساده آن، کاهش می‌دهد (هریسون[۱۸]، ۱۹۹۸، براون[۱۹]، ۲۰۱۱).

ایده اصلی بهینه‌سازی پویا ایده‌ای ساده است، بدین صورت که برای حل یک مساله، ابتدا قسمت‌های مختلف مساله را حل می‌کنیم و در مرحله بعدی جواب‌های زیرمساله‌ها با هم ترکیب می‌شوند تا یک جواب کلی و جامع برای کل مساله به دست آید. در روش‌های ساده‌تر، معمولا زیرمساله‌ها به تعداد زیاد ساخته می‌شوند و هر کدام به تعداد دفعات زیاد حل می‌شوند. اما در این روش تنها یک بار زیر مساله‌ها حل می‌شوند و از خاصیت هم‌پوشانی بین زیر سیستم‌ها استفاده می‌شود تا از حل دوباره آنها جلوگیری شود و بدین صورت حجم محاسبات کاهش می‌یابد. پاسخ هر زیرسیستم یا زیر مسئله ذخیره می‌شود و در مرحله‌ی بعدی که همان جواب کلی مساله است از آن استفاده می‌شود. این روش در مواردی که تعداد زیرمساله‌ها به صورت نمایی افزایش میابد کارایی بالایی خواهد داشت (بات[۲۰]، ۲۰۱۲).

برنامه‌ریزی پویا همچنین در بهینه‌سازی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در حقیقت الگوریتم برنامه‌ریزی پویا تمام مسیرهای ممکن برای حل مساله را مورد بررسی قرار می‌دهد و در نهایت مناسب‌ترین مسیر را انتخاب می‌کند. حال اگر مقیاس به گونه‌ای باشد که گذر از تمام پاسخ‌های ممکن محتمل و در زمان معقولی قابل انجام باشد، تقریبا می‌توان مطمئن بود که برنامه‌ریزی پویا قادر خواهد بود جواب بهینه را پیدا کند. اما این واقعیت غیر قابل انکار خواهد بود که در رابطه با روابط پیچیده و تعداد حالات زیاد، امکان ارزیابی تمام مسیرهای ممکن وجود نخواهد داشت و ملزم به استفاده از روشی تخمینی برای یافتن جواب بهینه خواهیم بود.

بررسی و مطالعه منابع موجود حاکی از این مطلب است که تعداد کمتری از مقالات در شرایط وجود چندین دارایی ریسک‌دار به حل مدل بهینه‌سازی پویای سبد سرمایه‌گذاری با توجه به هزینه معاملات پرداخته‌اند. در معدود کارهای انجام شده، موترامان و کومار[۲۱] در سال ۲۰۰۶ با به روز رسانی مرزهای محدوده عدم معامله[۲۲] به حل مسئله پرداختند و مدل توصیه شده توسط مرتون را به صورت چند بعدی و با وجود چند دارایی ریسک دار حل کردند. همچنین، یک روش عددی با وجود چند دارایی ریسک‌دار برای بیشینه‌سازی نرخ رشد و با در نظر گرفتن هزینه معاملات در کار مطالعاتی آکین و سولم[۲۳] در سال ۱۹۹۶ مورد بررسی قرار گرفت. در سال ۲۰۰۲ لینچ و تن[۲۴] روش نسبتا ساده‌ای را با در نظرگیری هزینه معاملات نسبی و برنامه‌ریزی پویا ارائه دادند و در پژوهشی تابع مطلوبیت نمایی *CARA* توسط لیو در سال ۲۰۰۴ مورد استفاده قرار گرفت.

به صورت عمومی‌تر باید گفت، بهینه‌سازی پویا به صورت پیوسته دارای پیچیدگی‌های ریاضی زیادی است و با افزایش حجم مساله به صورت نمایی این پیچیدگی افزایش می‌یابد. با این وجود تامپسون و دیویس[۲۵] در مطالعه خود به شکل هوشمندانه‌ای توانستند با استفاده از معادلات دیفرانسیل جزئی (*PDE*)، معادلات چند بعدی انتخاب سبد سرمایه‌گذاری را حل کنند (بات، ۲۰۱۲). بلیکی و پیلیسکا در سال ۱۹۹۹ مدلی پیوسته برای انتخاب بهینه سبد سرمایه‌گذاری ارائه دادند که در آن حساسیت سرمایه‌گذار نسبت به ریسک و هزینه معامله دیده شده بود و نکته حائز اهمیت مدلسازی آنها این بود که قیمت اوراق بهادار تاثیر گرفته و بر اساس فاکتورهای اقتصادی تغییر می‌کردند. همچنین در پژوهش دیگری، داویس و نورمن به

بیشینه‌سازی تابع مطلوبیت و بهینه‌سازی و یافتن استراتژی بهینه برای سرمایه‌گذاری پرداختند (داویس و نورمن، ۱۹۹۰).

همانطور که بدان اشاره شد برای تعریف و حل مساله با استفاده از برنامه ریزی پویا روشهای ابتکاری متعددی مطرح شده است که هر کدام با توجه به مفروضات و محدودیت ها و پیچیدگی محاسباتی تا حدی قادر به نزدیک شدن به شرایط واقعی هستند و عملکردهای متفاوتی خواهند داشت. در این مطالعه نیز سعی شده روشی ابتکاری برای حل این مسائل پیشنهاد شود تا در ضمن نزدیکی به شرایط واقعی و اجتناب از معادلات و تخمین های پیچیده ریاضی بتواند استراتژی مناسبی را به سرمایه گذار پیشنهاد دهد.

۳- روش‌شناسی پژوهش

در این پژوهش داده‌های مربوط به قیمت سهام از سایت یاهو فایننس[۲۶] گرفته می‌شود بدین صورت که متناسب با حجم مساله‌ی تعریف شده، داده‌های مربوط به قیمت سهام برای بازه‌ی مشخص شده از طریق سایت دریافت می‌شود. از آنجا که برای سهام قیمت‌های مختلفی در یک روز ارائه می‌شود، در این مقاله از قیمت بسته شدن[۲۷] به عنوان قیمت سهم در آن روز استفاده می‌گردد. البته استفاده از قیمت‌های دیگر نیز امکان‌پذیر بوده و مشکلی در روند مطالعه به وجود نخواهد آورد. از داده‌های گرفته‌شده از سایت در رابطه با قیمت سهام، بازده‌های روزانه ناشی از تغییر قیمت سهام مشخص می‌شوند. با استفاده از رابطه (۱) می‌توان نرخ بازدهی حاصل از تغییرات قیمت سهام را به دست آورد که نحوه محاسبه و عمل هر یک در ادامه آورده شده است.

$$Return = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 \qquad (۱)$$

لازم به ذکر است، به منظور جلوگیری از اثر تقسیم سود نقدی و فعالیت‌هایی نظیر ترکیب و یا تجزیه سهام بر روی قیمت و در نهایت سود روزانه سهام، بازه و سهم‌هایی انتخاب می‌شود که در آن دوره مواردی مانند موضوعات فوق‌الذکر برای آنها رخ نداده باشد. این امر باعث می‌شود بازده سهام تنها ناشی از تغییر قیمت آن باشد. در این پژوهش به منظور ارائه مثال‌ها و اثبات کارایی مدل، از داده‌های واقعی برای اجرای مدل استفاده می‌کنیم. به عبارتی فرض بر این است که در شروع بازه سرمایه‌گذاری از قیمت تمام سهم‌ها در تمام زیر دوره‌ها با خبر هستیم و با توجه به تاثیر هزینه معاملات قصد داریم تا به صورت مناسبی سرمایه خود را به دارایی‌های مختلف اختصاص دهیم.

مساله بهینه سازی چند دوره ای مورد بحث در این مقاله را می توان به شکل زیر بیان نمود.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{V_t}(W_\mathrm{t}, x_\mathrm{t}) = \max_{\delta_t} E\{W_{\mathrm{t}+1}^{1-\gamma} . g_{t+1}(x_{\mathrm{t}+1})\} \\
&s.t. \\
&\Pi_{t+1} = e^T X_{t+1} + R_f(1 - e^T x_t - y_t) \\
&S_{t+1,i} = R_i(x_{t,i} + \delta_{t,i})
\end{aligned} \qquad (۲)$$

$$y_t = e^T(\delta_t + \boldsymbol{\tau}|\delta_t|)$$
$$W_{t+1} = \Pi_{t+1}.W_t$$
$$\delta_t = x_{t+1,i} - x_{t,i}$$
$$x_{t+1,i} = {S_{t+1,i}}\big/{\Pi_{t+1}}$$

$$t = 0,1,\dots,T-1\;;\quad i = 1,\dots,m$$

در روابط فوق $R = (R_1,\dots,R_k)^T$ بازده حاصل از یک دوره سرمایه‌گذاری در دارایی‌های ریسک‌دار و R_f، بازده دارایی بدون ریسک است. تسهیم ثروت پرتفو بین دارایی‌ها درست قبل از سرمایه‌گذاری به صورت $x_t = (x_{t,1},\dots,x_{t,k})^T$ نشان داده می‌شود. تابع هدف از دو جزء $W_{t+1}^{1-\gamma}$ و $g_{t+1}(x_{t+1})$ تشکیل شده است که عامل اول همان ثروت در زمان $t+1$ و عامل دوم اثر برگشتی حاصل از بهینه‌سازی دوره‌های قبل است. Π_{t+1} به عنوان واحد ثروت به اضافه بازده حاصل از سرمایه‌گذاری در دارایی ریسک‌دار و دارایی بدون ریسک است. $S_{t+1,i}$ بازده حاصل از سرمایه‌گذاری در دارایی iام پس از تغییر ناشی از بازنگری در سبد است. y_t درصد تغییر در سرمایه‌گذاری‌ها به علاوه میزانی است که بابت هزینه معاملات ناشی از این بازنگری ایجاد می‌شود. در صورتی که $\delta_{t,i} > 0$ باشد، به معنای خرید و اگر $\delta_{t,i} < 0$ باشد به معنای فروش از دارایی است. در محدودیت آخر نیز از تقسیم $S_{t+1,i}$ بر Π_{t+1} درصد سرمایه‌گذاری در دارایی iام در زمان $t+1$ به دست می‌آید. در ادامه الگوریتم پیشنهادی این مقاله برای حل مدل بالا آورده خواهد شد.

۳-۱- الگوریتم پیشنهادی

بررسی پژوهش‌های صورت گرفته در رابطه با بهینه‌سازی پویای سبد سرمایه‌گذاری، حاکی از این مطلب است که اکثر فعالیت‌های صورت گرفته، به منظور ورود هزینه معاملات یا از روابط ریاضی پیچیده برای حل مدل و یافتن استراتژی بهینه استفاده کرده‌اند و یا از مفهوم محدوده عدم معامله به این منظور استفاده کرده‌اند. در مجموع استفاده از هر یک از این روش‌ها نیاز به تخمین‌هایی دارد که مستلزم استفاده از ابزارها و معادلات ریاضی پیچیده می‌باشد. در این مطالعه روشی پیشنهادی مطرح می‌گردد که ضمن ساده‌سازی مدل و بدون نیاز به استفاده از تخمین‌ها و معادلات ریاضی پیچیده، منجر به نتایج مطلوبی می‌شود که در ادامه در قالب مثال‌هایی مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

در روش پیشنهادی در این مقاله به جای استفاده از محدوده عدم معامله و معادلات ریاضی و تخمین‌های پیچیده از یک تفکر خاص پیروی می‌کنیم، البته در این روش نیز تخمین‌ها و انحراف از جواب بهینه وجود خواهد داشت چرا که هم از روش بهینه‌سازی شبکه‌ای[۲۸] استفاده می‌شود و هم از به روزرسانی ثروت در داخل هر زیر مساله برای یافتن استراتژی بهینه چشم پوشی می‌شود. اما با توجه به کل روند، به دلیل ساده شدن مدل و توانایی یافتن جواب بهینه نسبت به بهینه سازی پیش‌رونده تک‌دوره‌ای، می توان بر کارایی آن اذعان کرد.

در ادامه شبه کد روش پیشنهادی ارائه می‌گردد و سپس به تفصیل در مورد نحوه عملکرد آن بحث می‌گردد.

```
Start
Input Data and Parameters  [R_f , g , γ, …]
%Finding investment strategy with dynamic programming approach
For t = n: -1:1
  If t = n
    Find the x to optimize U without transaction cost (using Grid method);
    Fill the first column of matrix X;
  Else
    Calculate U_temp by use of the column of matrix X, which fill in the previous step; and predictions about next column;
    Find x to optimize U*U_temp*g_{t+1} (using Grid method);
    Fill the column t of matrix X;
  End if
  Use the last two filling columns to revise the amount of g_{t+1} ;
End for
Use matrix X to calculate wealth at the end of each period. (Reapply suggested strategy.);
Plot wealth of each period
%Finding investment strategy with single period approach
For t = 1:1:n
  Find x to optimize U with transaction cost (using Grid method);
  Fill the column t of matrix X;
End for
Use matrix X to calculate wealth at the end of each period.
(Reapplying suggested strategy.);
Plot wealth of each period;
Compare results
```

ایده اصلی روش پیشنهاد شده در این مطالعه بر اساس این فکر شکل گرفته است که ما قصد داریم تا مطلوبیت نهایی سرمایه‌گذار را در کل دوره سرمایه‌گذاری حداکثر کنیم و این مستلزم این خواهد بود که علاوه بر دوره های اولیه، در دوره آخر نیز سرمایه‌گذاری مناسب و بهینه ای داشته باشیم. یافتن جواب بهینه در دوره آخر می‌تواند تاثیرگذار باشد، چرا که در دوره های قبل ممکن است به دلیل وجود هزینه معاملات و کاهش های احتمالی در دوره‌های آتی، استراتژی که موجب بهینه شدن آن دوره خاص شود با استراتژی بهینه که موجب بهینگی کل دوره می‌شود، متفاوت باشد. در دوره آخر به دلیل اینکه قیمت آتی سهام در انتخاب پرتفو بهینه تاثیری ندارد، می‌توان میزان بهینه این دوره را به صورت تک‌دوره‌ای، با میزان بهینه برای کل دوره سرمایه‌گذاری یکسان دانست که البته میزان درصدهای سرمایه‌گذاری و نوع تسهیم سرمایه در دوره قبلی، به دلیل ایجاد هزینه معاملات می‌تواند در جواب بهینه تاثیر بگذارد. اما در این روش تاثیر این عامل به گونه‌ای دیگر مورد بررسی قرار می‌گیرد. لذا با توجه به موارد مذکور از یافتن درصدهای بهینه برای دوره‌ی آخر سرمایه‌گذاری فرایند را آغاز می‌کنیم. بدین منظور می‌توان از رابطه زیر استفاده نمود:

$$U_T(W_{\mathrm{T}}, x_{\mathrm{T}}) = W_{\mathrm{T}}^{1-\gamma}.\max_{x_t} E\{\Pi_{\mathrm{T}}^{1-\gamma}.g_T\} \qquad (۳)$$

در فرمول فوق می‌توان تغییراتی را اعمال کرد که در ادامه بدان اشاره خواهیم کرد. در دوره آخر معادله زیر برقرار خواهد بود.

$$g_T(x) = \frac{1}{1-\gamma} \qquad (۴)$$

اگر استراتژی بهینه سرمایه‌گذاری برای یک واحد ثروت یافت شود، آن استراتژی برای هر ثروتی قابل استفاده خواهد بود. بنابراین می‌توان به جای $W_T^{1-\gamma}$ از ۱ استفاده کرد. بنا بر توضیحات بالا برای دوره آخر خواهیم داشت:

$$\beta_T = R_T . X_{T-1} + R_f . (1 - X_{T-1})$$
$$U_T = \max_{x_t} E\left\{\beta_T^{1-\gamma} . \frac{1}{1-\gamma}\right\} \qquad (۵)$$

حال می‌توانیم از طریق روش بهینه‌سازی شبکه‌ای و یا هر تکنیک دیگر بهینه‌سازی، استراتژی و تسهیم ثروت بهینه را برای دوره آخر به دست آوریم. به این ترتیب استراتژی بهینه برای دوره آخر بدون در نظر گرفتن دوره‌های قبلی و هزینه معاملات، به دست می‌آید. حال برای دوره‌های قبلی به دلیل استفاده از روش شبکه‌ای در هر مرحله به طور انتخابی مقداری برای هر درصد سرمایه‌گذاری انتخاب می‌شود و مقادیر توابع به ازای آن به دست می‌آید، با مقایسه جواب‌های حاصل از نقاط مورد بررسی ، می‌توان مجموعه جواب بهینه را به دست آورد.

در ادامه توابع مورد استفاده برای یافتن جواب را شرح خواهیم داد. این توابع عبارتند از:

$$Z_T = |X_{T-1}{}^* - X_{T-2}|$$
$$U_{T\,temp} = (\beta_T{}^* - tran.Z_T)^{1-\gamma}$$
$$U_{T-1} = \max_{x_t} E\left\{\Pi_{T-1}^{1-\gamma} . U_{T\,temp} . g_T\right\} \qquad (۶)$$

در توضیح توابع بالا می‌توان گفت، مقادیر مربوط به X_{T-1} از بهینه‌سازی دوره قبل به‌دست آمده است. به همین علت آن را با * مشخص کرده‌ایم. در ادامه فرایند حل، X_{T-2} مقادیر مختلفی را برای یافتن بهترین جواب به خود می‌گیرد. در $U_{T\,temp}$ میزان صحیح مطلوبیت حاصله در زمانی که درصدهای سرمایه‌گذاری در دوره قبل (به طور فرضی در X_{T-1}) مد نظر باشند با وجود هزینه معامله ناشی از بازنگری در پرتفو محاسبه می‌گردد. مقدار مذکور برای محاسبه U در دوره $T-1$ استفاده می‌شود. g_T نیز همان طور که ذکر شد معادل $\frac{1}{1-\gamma}$ است که در معادله بالا ضرب می‌شود. در حقیقت ما در معادله U_{T-1} به دنبال x هایی هستیم تا بتواند در دوره $T-1$ بدون در نظر گرفتن هزینه معاملات ناشی از تغییر استراتژی، ما را به حداکثر مطلوبیت برسانند (محاسبه این تاثیر در دوره قبلی مد نظر قرار خواهد گرفت.) و در عین حال به گونه‌ای انتخاب شوند که هزینه معاملات ناشی از تغییر استراتژی از دوره $T-1$ به $T-2$ به قدری زیاد نباشد تا موجب شود میزان بهینه مطلوبیت بیش از حد کاهش یابد. پس در حقیقت در اینجا با دو تابع مطلوبیت

ادغام شده مواجه خواهیم بود. اول به دنبال حداکثر کردن مطلوبیت در دوره $T-1$ هستیم و در تابع دوم سعی خواهیم کرد هزینه معاملات ناشی از بازنگری در پرتفو را به حداقل ممکن برسانیم. باید توجه داشت مورد دوم به این دلیل جزو اهداف قرار گرفت که تفاوت میان درصدهای انتخاب شده در این دوره با دوره بعدی موجب مقداری هزینه معاملات می‌گردد که کاهش مطلوبیت آن دوره را در پی خواهد داشت. این تاثیر از طریق $\mathrm{U}_{T_{temp}}$ به دوره‌های قبلی منتقل می‌شود و مسلما موجب کاهش و یا افزایش مطلوبیت در دوره‌های قبلی از خود می‌گردد. با در نظر گرفتن هر دوی این اهداف به طور همزمان خواهیم توانست به جواب مناسبی دست یابیم. در نتیجه حل این مدل به جوابی برای X_{T-1} خواهیم رسید و در این مقطع با استفاده از ${X_{T-1}}^*$ و ${X_T}^*$ مقدار g را به روز می کنیم.

$$g_{T-1} = g_T . ({\beta_T}^* - tran. \mathrm{Z}_T)^{1-\gamma} \quad (۷)$$

از مقدار حاصله برای یافتن مقدار بهینه درصد تسهیم ثروت در دوره قبل استفاده می‌شود. معادله های فوق را به شکل عمومی زیر می‌توان بیان کرد:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Z}_t = |{X_{t-1}}^* - X_{t-2}| \\
&\mathrm{U}_{t_{temp}} = ({\beta_t}^* - tran. \mathrm{Z}_t)^{1-\gamma} \\
&\mathrm{U}_{t-1} = \max_{x_t} E\left\{\Pi_{t-1}^{1-\gamma} . \mathrm{U}_{t_{temp}} . g_T\right\} \\
&{\mathrm{Z}_t}^* = |{X_{t-1}}^* - {X_{t-2}}^*| \\
&g_{t-1} = g_t . ({\beta_t}^* - tran. \mathrm{Z}_t)^{1-\gamma}
\end{aligned} \quad (۸)$$

در نتیجه‌ی اجرای این بهینه‌سازی استراتژی سرمایه‌گذاری را برای دوره مورد نظر خواهیم داشت و مشخص می‌شود که در این دوره در هر نقطه گسستگی باید از چه سهمی به چه میزان خریداری شود و درصد کدام سهم باید در پرتفو کاهش یابد.

۴- نتایج پژوهش حاصل از اعتبارسنجی مدل

این بخش را به حل مثالهایی کاربردی و ارزیابی عملکرد مدل پیشنهادی اختصاص می دهیم.

۴-۱- مثال ۱: سه دارایی ریسک دار و یک دارایی بدون ریسک، در دوره کوتاه مدت

برای این مثال از داده‌های قیمت سه سهم مایکروسافت[۲۹]، اپل[۳۰] و ای بی ام[۳۱] استفاده شده و داده‌های مربوط به قیمت سهام را در بازه زمانی ۳۰ ام ژوئن تا ۱۰ جولای سال ۲۰۱۳ که شامل ۷ روز کاری بورس بوده است، مورد بررسی قرار داده‌ایم. این داده ها از سایت یاهو فایننس گرفته شده و پس از تبدیل قیمت به بازدهی، داده‌های زیر در اختیار ما قرار خواهد گرفت. در صورتی که فرض شود امکان خرید و فروش در هر

روز فقط یک بار امکان‌پذیر باشد، ۶ زیر دوره خواهیم داشت که باید در ارتباط با استراتژی خرید و فروش و انتخاب پرتفو مناسب تصمیم‌گیری شود. داده‌های مربوط به بازدهی سهام در این ۶ دوره در زیر آورده شده است.

جدول ۱: بازدهی سهام مورد استفاده در مثال ۱

دوره	دارایی		
	MSFT	IBM	AAPL
۱	-0.01014	-0.00495	0.003843
۲	-0.00058	0.019054	-0.01744
۳	-0.0035	-0.00026	0.005694
۴	-0.00586	-0.00866	0.008065
۵	-0.00206	-0.0091	-0.0055
۶	0.012299	-0.00115	-0.0224

در این مثال هزینه معاملات را در سطح ۰/۵٪ در نظر گرفته و مدل را با این هزینه معامله حل خواهیم کرد اما قبل از حل به وسیله مدل پیشنهادی، با توجه به شرایط و بازدهی تصمیم سرمایه‌گذار را مشخص خواهیم کرد. در جدول زیر سهام مناسب در هر دوره بدون در نظر گرفتن هزینه معامله با رنگ تیره مشخص شده است.

جدول ۲: سهام مناسب در هر دوره بدون در نظر گرفتن هزینه معامله در مثال ۱

دوره	دارایی			
	MSFT	IBM	AAPL	RF
۱	-0.01014	-0.00495	0.003843	0.0002
۲	-0.00058	0.019054	-0.01744	0.0002
۳	-0.0035	-0.00026	0.005694	0.0002
۴	-0.00586	-0.00866	0.008065	0.0002
۵	-0.00206	-0.0091	-0.0055	0.0002
۶	0.012299	-0.00115	-0.0224	0.0002

باید توجه داشت امکان سرمایه‌گذاری دیگری نیز برای سرمایه‌گذار وجود دارد و آن سرمایه‌گذاری در دارایی بدون ریسک خواهد بود. در این مثال و مثال‌های آتی مقدار بازدهی حاصل از سرمایه‌گذاری در دارایی بدون ریسک مقدار ۰/۰۲٪ به صورت روزانه در نظر گرفته شده است.

بدون در نظرگیری هزینه معاملات، فرد سرمایه‌گذار استراتژی مشخص شده در جدول ۲ را به عنوان استراتژی بهینه انتخاب خواهد کرد. سود حاصل از این سرمایه‌گذاری بدون در نظرگیری هزینه معاملات در جدول زیر محاسبه شده است.

جدول ۳: استراتژی و سود حاصل از سرمایه گذاری بدون هزینه معاملات در مثال ۱

دارایی	دوره					
	1	2	3	4	5	6
MSFT	0	0	0	0	0	1
IBM	0	1	0	0	0	0
AAPL	1	0	1	1	0	0
RF	0	0	0	0	1	0
Wealth	1.0038	1.0229	1.0286	1.0367	1.0369	1.0492

اگر هزینه معاملات برای سرمایه‌گذار در نظر گرفته شود، برای انتقال از مرحله اول به دوم با این استراتژی مشخص شده لازم است ۰/۵٪ برای فروش سهام سوم و ۰/۵٪ برای خرید سهم دوم هزینه معامله پرداخت شود که این میزان پرداختی از سود حاصل از سرمایه‌گذاری در سهم سوم در دوره اول بیشتر خواهد بود به این ترتیب برای سرمایه گذار مناسب‌تر خواهد بود ابتدا سهم خود را در دارایی بدون ریسک (سپرده بانکی) سرمایه گذاری کرده و در مرحله دوم تنها با پرداخت یک هزینه معامله سرمایه خود را در دارایی دوم سرمایه گذاری کند. در زیر دوره سوم سه حالت را محاسبه خواهیم کرد که ببینیم آیا به صرفه خواهد بود با پرداخت دو هزینه معامله یکی برای فروش دارایی دوم و دیگری برای خرید از دارایی سوم در پرتفو تجدید نظر شود و یا بهتر است سرمایه در دارایی دوم باقی بماند و متحمل زیان شده اما هزینه معامله پرداخت نشود و در حالت سوم دارایی از سهم دوم خارج و یک هزینه معامله پرداخت شود و ثروت در بانک سپرده‌گذاری شود. در حالت اول ثروت در انتهای دوره ۱/۰۰۹۷ و در حالت دوم ۱/۰۱۴ و در حالت سوم ۱/۰۰۹۲ خواهد بود که مسلما با توجه به این نتایج انتخاب سرمایه گذار استراتژی نگهداشت سرمایه در دارایی دوم خواهد بود. در دوره چهارم نیز دو حالت بازنگری در سبد سرمایه‌گذاری و انتقال آن به دارایی سوم و یا نگهداشت سرمایه مورد بررسی قرار می‌گیرد که به ترتیب نتایج ۱/۰۱۲ و ۱/۰۰۵ به دست می‌آید. با توجه به نتایج، طبیعی است که سرمایه‌گذار در پرتفو خود تجدید نظر کند. در زیر دوره ۵ ام نیز اگر همین روند انتخابی ادامه یابد تصمیم به فروش دارایی گرفته خواهد شد و پس از کسر هزینه معاملات مابقی ثروت در دارایی بدون ریسک سرمایه‌گذاری می‌گردد. در مرحله آخر نیز سرمایه گذار قادر خواهد بود با پرداخت یک بار هزینه معامله دارایی و ثروت خود را در آخر دوره به میزان ۱/۰۱۴۵ ارتقا دهد.

با توجه به توضیحات بالا، سرمایه گذار در شرایطی که هزینه معاملات را در نظر بگیرد، استراتژی خود را به شکلی که در جدول زیر ذکر خواهد شد تغییر می‌دهد. البته همان طور که مشاهده شد سرمایه گذار در این نگرش در رابطه با خرید و فروش دارایی در دوره بعدی در ابتدای همان دوره تصمیم گیری انجام

می‌دهد و این کار در هر مرحله تکرار می‌گردد. در حقیقت در این حالت سرمایه گذار به صورت تک دوره ای و پیش‌رونده به سرمایه‌گذاری نگاه می‌کند.

جدول ۴: استراتژی و سود حاصل از سرمایه گذاری با در نظرگیری هزینه معاملات در مثال ۱

دارایی	دوره					
	1	2	3	4	5	6
MSFT	0	0	0	0	0	1
IBM	0	1	1	0	0	0
AAPL	0	0	0	1	0	0
RF	1	0	0	0	1	0
Wealth	1.0002	1.0143	1.014	1.012	1.0072	1.0145

حال باید دید اگر سرمایه‌گذار از روش برنامه‌ریزی پویا و به صورت بازگشتی به سرمایه‌گذاری خود نگاه کند چه تغییری در انتخاب پرتفو ایجاد خواهد شد. سرمایه‌گذار در این دیدگاه از زیر دوره آخر شروع به بررسی بازده‌های سهام خواهد کرد. بدین ترتیب در دوره ۶ ام، سهم اول به عنوان سهم مناسب انتخاب خواهد شد. حال در دوره ۵ مشاهده می‌شود که در صورت پرداخت هزینه معامله ۰/۵٪ و سرمایه گذاری در دارایی بدون ریسک تنها می‌تواند زیانی معادل ۰/۰۰۲ را پوشش دهد. بنابراین منطقی به نظر می‌رسد که دارایی در سهم اول باقی بماند و تغییر و بازنگری پرتفو در این مرحله انجام نگیرد. در مرحله ۴ سرمایه گذار خواهد توانست با پرداخت ۰/۰۱ برابر با دو هزینه معامله به منظور خرید و فروش سهام، دارایی خود را به سهم سوم انتقال دهد و با این کار نه تنها از زیان نگهداشت با مقدار ۰/۰۰۵ جلوگیری می‌شود، بلکه سودی معادل با ۰/۰۰۸ کسب می گردد که در این مقطع بهترین تصمیم‌گیری خواهد بود. پس از آن باید در رابطه با سرمایه گذاری در دوره سوم تصمیم‌گیری شود در این دوره سرمایه‌گذار می‌تواند با نگهداشت سرمایه در دارایی سوم شرایط خود را به بهترین نحو حفظ کند و نیازی به پرداخت هزینه معامله نباشد. در دوره های اول و دوم هم با توجه به شرایط، تصمیم سرمایه‌گذار برای پرتفو مانند نگرش قبل خواهد بود و در دوره دوم دارایی در سهم دوم و در دوره اول در بانک سرمایه‌گذاری خواهد شد. حال با توجه به استراتژی انتخاب شده با استفاده از دیدگاه بازگشتی ثروت در طول دوره محاسبه می‌شود. استراتژی و ثروت حاصله در جدول زیر نشان داده می‌شود.

جدول ۵: استراتژی بهینه به صورت بازگشتی با در نظر گیری هزینه معاملات در مثال ۱

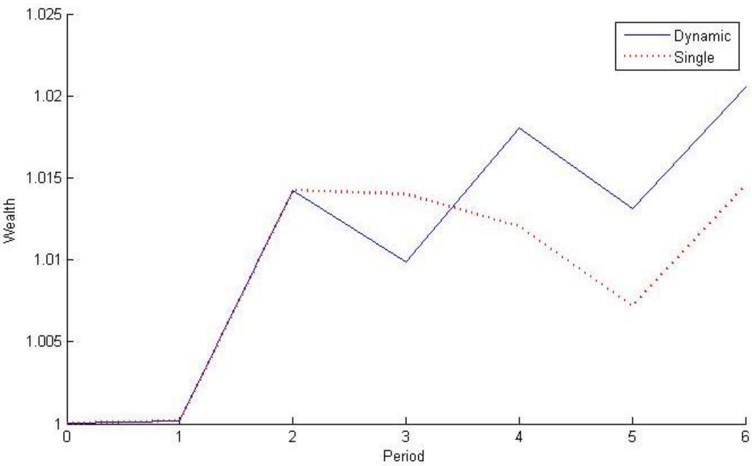
دارایی	دوره					
	1	2	3	4	5	6
MSFT	0	0	0	0	1	1
IBM	0	1	0	0	0	0
AAPL	0	0	1	1	0	0
RF	1	0	0	0	0	0
wealth	1.0002	1.0143	1.0099	1.018	1.0058	1.0181

همان طور که مشاهده می‌شود تفاوت در دیدگاه موجب گردیده تا استراتژی انتخاب سبد سرمایه‌گذاری در دوره‌های سوم و پنجم با حالت قبل متفاوت باشد و این تفاوت موجب می‌شود تا سرمایه‌گذار سود بیشتری نسبت به حالت قبل از سرمایه‌گذاری خود کسب کند.

مثال ذکر شده در بالا نمونه‌ای بود که نشان از برتری روش بازگشتی نسبت به روش تک‌دوره‌ای پیش‌رونده دارد و این برتری به دلیل استفاده از اطلاعات مازاد نسبت به آینده سهام در روش برنامه‌ریزی پویا می‌باشد. گرچه در مثال‌های کوچک ذهن انسان قادر خواهد بود با محاسباتی ساده استراتژی بهینه را برای هر دوره با توجه به هر دیدگاه به‌دست آورد اما در زمانی که مساله وسعت یابد و به شرایط واقعی در بازار نزدیک شود این امر امکان‌پذیر نخواهد بود. مدل ارائه شده در این مقاله با در نظرگیری پارامترها، شرایط و ابعاد هر مساله قادر خواهد بود با بهینه‌سازی پرتفو در زمانی بسیار کوتاه استراتژی مناسب را به دست آورد.

حال مساله را با مدل‌های تک دوره‌ای و همچنین الگوریتم پیشنهادی در این مقاله حل می‌نمایم. مشاهده می‌شود عملکرد و جواب حاصله در مورد هر دو مدل دقیقا با آنچه که در مورد تصمیم‌گیری سرمایه‌گذار در بحثی که گذشت مطرح شد، یکسان خواهد بود و این نیز خود صحت مدلسازی و محاسبات مدل را نشان می‌دهد. البته باید خاطر نشان کرد مدلسازی با این رویکرد به‌گونه‌ای انجام گرفته است که حالات مختلف دیگر را در نظر گرفته و مسائل بزرگتر را نیز به خوبی پوشش دهد.

شکل ۱ این امکان را فراهم خواهد آورد که نمودارهای مربوط به تغییرات دارایی دو رویکرد تک دوره‌ای و پویای پیشنهادی را در کنار هم داشته باشیم. طبق این نمودار نیز می‌توان تفاوت در استراتژی ها و در نتیجه مقدار ثروت در انتهای دوره به طور مشخص ملاحظه نمود.



شکل ۱: مقایسه تغییرات ثروت با دو روش تک دوره‌ای پیش‌رونده و پویا

در دوره اول و دوم که دو نمودار بر هم منطبق شده‌اند نشان از یکسان بودن استراتژی در این دوره ها و تغییرات یکسان در دارایی و ثروت سرمایه گذار است و از مرحله بعد با ایجاد تفاوت در استراتژی، نتایج حاصله نیز متفاوت شده است و در نهایت مدل برنامه‌ریزی پویا برتری خود را نسبت به مدل تک دوره‌ای پیش‌رونده نشان می‌دهد. در ادامه مثال جامع‌تری مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

۴-۲- مثال ۲: سه دارایی ریسک دار و یک دارایی بدون ریسک، در دوره بلند مدت

در این قسمت مدل پیشنهادی با سه دارایی ریسک‌دار و یک دارایی بدون ریسک برای دوره بلندمدت در ۵ دوره زمانی مختلف و البته در هر دوره با هزینه معامله‌ی متفاوتی حل خواهد شد. پارامترها و داده‌های در نظر گرفته شده برای حل این مثال در جدول زیر ذکر شده‌اند.

جدول ۶: پارامترهای ورودی مثال ۲ برای دوره زمانی بلند مدت

دارایی های ریسک دار	قیمت سهام شرکت مایکروسافت در بازه زمانی مورد بررسی
	قیمت سهام شرکت ای بی ام در بازه زمانی مورد بررسی
	قیمت سهام شرکت اپل در بازه زمانی مورد بررسی
دارایی بدون ریسک	دارای بازده ثابت و برابر ۰/۰۲٪ روزانه
هزینه معامله	از میزان ۰٪ تا ۸٪ متغیر با فواصل ۰/۲٪
دوره های زمانی	بازه ۴۲ روزه ، ۳۰ ژوئن تا ۳۰ آگوست سال ۲۰۰۹
	بازه ۴۲ روزه ،۳۰ ژوئن تا ۳۰ آگوست سال ۲۰۱۰
	بازه ۴۲ روزه ، ۳۰ ژوئن تا ۳۰ آگوست سال ۲,۱۱
	بازه ۴۲ روزه ، ۳۰ ژوئن تا ۳۰ آگوست سال ۲۰۱۲
	بازه ۴۲ روزه ، ۳۰ ژوئن تا ۳۰ آگوست سال ۲۰۱۳

با حل مدل‌های پویا و تک دوره ای پیش رونده در هر هزینه معامله و در هر دوره زمانی، با توجه به شرایط، استراتژی خاصی برای سبد سرمایه گذاری فرد ارائه می‌شود. جواب مربوط به ثروت نهایی، پس از حل مدل به هر یک از روش‌های پویا و تک دوره‌ای پیش رونده در ادامه آورده می‌شود. در جدول زیر، مواردی که با رنگ تیره مشخص شده‌اند، حالاتی را نشان می‌دهند که روش پویا به ثروتی بالاتر و یا مساوی با مدل تک دوره‌ای دست یافته است. همانطور که در جدول ۷ مشاهده می‌شود، در اکثر موارد مدل پویا توانسته است نسبت به مدل تک‌دوره‌ای پیش‌رونده جواب بهتری ارائه دهد.

جدول ۷: نتایج حاصل از حل مثال ۲

دوره		30-jun,30-aug 2009,42		30-jun,30-aug 2010,42		30-jun,30-aug 2011,42		30-jun,30-aug 2012,42		30-jun,30-aug 2013,43	
No.	Tran*	work	single	work	Single	work	single	work	Single	Work	single
1	0	1.444	1.444	1.514	1.514	1.518	1.518	1.368	1.368	1.566	1.566
2	0.002	1.336	1.339	1.386	1.384	1.397	1.400	1.272	1.273	1.435	1.429
3	0.004	1.248	1.256	1.292	1.273	1.337	1.331	1.205	1.209	1.336	1.325
4	0.006	1.225	1.208	1.220	1.186	1.267	1.267	1.163	1.142	1.282	1.253
5	0.008	1.204	1.170	1.136	1.084	1.226	1.224	1.142	1.088	1.233	1.197
6	0.01	1.185	1.103	1.107	1.105	1.203	1.193	1.129	1.093	1.214	1.170
7	0.012	1.167	1.110	1.105	1.071	1.170	1.170	1.115	1.084	1.195	1.101
8	0.014	1.148	1.133	1.102	1.050	1.142	1.134	1.102	1.025	1.181	1.068
9	0.016	1.134	1.124	1.087	1.026	1.164	1.115	1.089	1.032	1.171	1.035
10	0.018	1.120	1.113	1.043	0.996	1.169	1.141	1.076	1.016	1.161	1.017
11	0.02	1.107	1.045	1.039	0.993	1.155	1.128	1.065	1.014	1.152	1.022
12	0.022	1.094	1.034	1.035	0.964	1.141	1.114	1.057	1.012	1.143	1.010
13	0.024	1.081	1.024	1.030	0.956	1.128	1.101	1.048	1.010	1.134	1.034
14	0.026	1.067	1.014	1.048	0.983	1.115	1.088	1.040	1.008	1.125	1.026
15	0.028	1.058	1.004	1.043	0.979	1.110	1.110	1.032	1.006	1.116	1.007
16	0.03	1.049	0.912	1.039	0.975	1.106	1.105	1.023	1.005	1.107	1.063
17	0.032	1.041	0.909	1.035	0.971	1.101	1.101	1.008	1.003	1.098	1.061
18	0.034	1.037	0.901	1.031	0.967	1.097	1.096	1.008	1.001	1.090	1.059
19	0.036	1.033	0.894	1.026	0.963	1.092	1.092	1.008	0.999	1.081	1.058
20	0.038	1.029	0.887	1.022	1.008	1.088	1.087	1.008	0.997	1.075	1.056
21	0.04	1.024	0.880	1.018	1.008	1.083	1.043	1.008	0.995	1.071	1.054
22	0.042	1.020	0.873	1.014	1.008	1.079	1.038	1.008	0.993	1.066	1.052
23	0.044	1.016	0.888	1.010	1.008	1.075	1.034	1.008	0.991	1.062	1.050
24	0.046	1.012	0.969	1.018	1.008	1.070	1.030	1.008	1.008	1.058	1.048
25	0.048	1.008	0.967	1.013	1.008	1.066	1.022	1.008	1.008	1.054	1.046
26	0.05	1.008	0.965	1.009	1.008	1.061	1.020	1.008	1.008	1.050	1.044

Transaction Cost *

به منظور بررسی دقیق‌تر مثال فوق، آمار توصیفی مربوط به آن را در جدول (۸) مورد بررسی قرار می‌دهیم.

جدول ۸: آمار توصیفی نتایج مثال ۲ در حالت بلند مدت

حالات ممکن	تعداد	درصد
عملکرد بهتر مدل دینامیک	۱۱۵	٪۸۸
عملکرد مساوی در دو مدل	۹	٪۷
مساوی و یا بهتر عمل کردن مدل دینامیک	۱۲۴	٪۹۵
عملکرد بهتر مدل تک دوره ای	۶	٪۵

* تعداد کل حالات ۱۳۰ مورد

طبق آمار، مشخص می‌شود که در ۸۸٪ حالات مدل پویا می‌تواند جواب بهتری نسبت به مدل تک دوره‌ای پیشنهاد دهد.

در قسمت قبل برای بررسی موردی و دقیق‌تر عملکرد دو مدل با مثالی برای دوره کوتاه مدت و با سه دارایی ریسک دار و یک دارایی بدون ریسک به حل مسئله پرداختیم و در این قسمت برای دوره طولانی‌تر سرمایه‌گذاری و بازه بزرگتری برای هزینه معامله متفاوت مدل را حل کردیم. تا کارایی مدل بیشتر نمود یابد.

۴-۳- آزمون من- ویتنی

آزمون من-ویتنی[۳۲] یک آزمون ناپارامتری است که به بررسی تفاوت بین دو گروه مستقل در خصوص یک متغیر دارای داده‌های رتبه‌ای یا ترتیبی می‌پردازد. در واقع این آزمون معادل ناپارامتری آزمون t مستقل[۳۳] است، اما با این تفاوت که آزمون t از نوع پارامتری و داده های آن از نوع پیوسته است، در حالیکه آزمون من- ویتنی از نوع ناپارامتری بوده و با داده‌های رتبه‌ای انجام می‌شود. البته در صورتیکه متغیر مورد مطالعه پیوسته باشد ولی سایر شرایط آزمون‌های پارامتری برقرار نباشد، می‌توان این آزمون را مورد استفاده قرار داد.

آزمون من ویتنی برای محاسبه تفاوت های بین دو گروه مورد بررسی، مقادیر مربوط به هر دو گروه یا توزیع را به صورت یک مجموعه‌ی واحد در نظر می‌گیرد و بدون توجه به اینکه هر مقدار به کدام گروه تعلق دارد، از بیشترین تا کمترین، رتبه‌بندی می‌کند. اگر در زمان رتبه‌بندی، مقادیر یکسان یا تکراری وجود داشته باشد، رتبه‌های مربوط به آن مقادیر با یکدیگر جمع شده و مجموع بدست آمده بر تعداد آن‌ها تقسیم می‌شود و رتبه‌بندی مشترکی برای تمام آن ها لحاظ می‌گردد. آماره آزمون من-ویتنی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$U_1 = \mathrm{R}_1 - \frac{\mathrm{n(n+1)}}{2} \qquad (۸)$$

$$U_2 = \mathrm{R}_2 - \frac{\mathrm{m(m+1)}}{2} \qquad (۹)$$

حجم گروه های ۱ و ۲ به ترتیب با n و m نشان داده می شوند و مجموع رتبه ها با R_1 و R_2 مشخص می‌گردند. مقدار کوچک‌تر بین U_1 و U_2 برای مقایسه در مرحله آزمون استفاده می‌شود. بنابراین U به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$U = \min\ (U_1, U_2) \qquad (۱۰)$$

برای آزمون معناداری آماره U در صورتیکه حجم گروه کوچکتر ۲۰ مورد یا کمتر و حجم نمونه بزرگتر ۴۰ مورد یا کمتر باشد، از جدول مقادیر بحرانی من ویتنی استفاده می‌شود. در صورتیکه آماره U در سطح

اطمینان $1-\alpha$ بزرگتر از مقدار حاصل از جدول باشد، فرضیه صفر پذیرفته نمی‌شود. اما در حالتی‌که حجم هر دو گروه بزرگتر از ۲۰ و یا حجم یکی از آن ها بزرگتر از ۴۰ باشد، جدول مقادیر بحرانی من-ویتنی نمی‌تواند مورد استفاده قرار گیرد و در این صورت توزیع آماره U به توزیع نرمال گرایش پیدا می‌کند. در این حالت با محاسبه میانگین و انحراف معیار، U محاسبه شده و آماره Z را محاسبه می کنیم.

آزمون فرض مورد بررسی با آزمون من ویتنی برای سه قسمت مثال دوم به شرح زیر خواهد بود.

H_0 : میانگین عملکرد مدل پویا از مدل تک دوره ای پیش‌رونده بدتر و یا برابر است.

H_1 : میانگین عملکرد مدل پویا از مدل تک دوره ای پیش‌رونده بهتر است.

جواب مربوط به این آزمون برای هر قسمت از مثال دوم در ادامه آورده خواهد شد.

۴-۳-۱- سه دارایی ریسک دار و یک دارایی بدون ریسک، در دوره بلند مدت

با توجه به جدول شماره ۹، می‌توان مشاهده کرد که میانگین ثروت های نهایی حاصل از سرمایه گذاری بر اساس استراتژی پیشنهادی داینامیک تقریبا ۴٪ بیشتر از مدل تک دوره ای است. حال با استفاده از آزمون من ویتنی در پی یافتن پاسخ این سوال هستیم که آیا از نظر آماری می توان عملکرد مدل پیشنهادی را برتر از روش سرمایه گذاری تک‌دوره ای دانست و یا خیر.

جدول ۹: آمار توصیفی حاصل از نرم افزار SPSS، مثال دوم

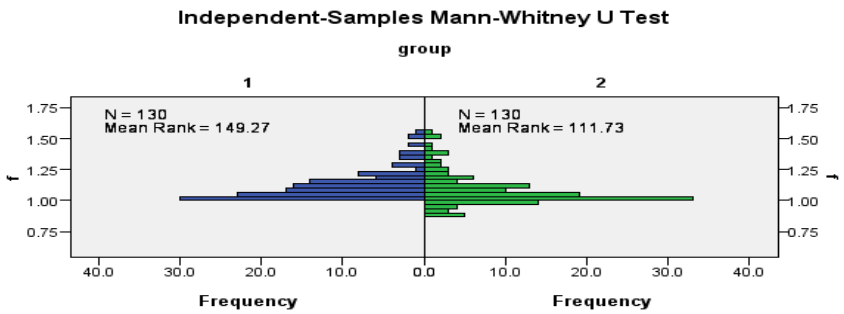
Descriptive Statistics						
	N	**Minimum**	**Maximum**	**Mean**	**Std. Deviation**	**Variance**
Dynamic	130	1.01	1.57	1.1210	.11675	.014
Single	130	.87	1.57	1.0815	.13323	.018

جواب مربوط به آزمون من- ویتنی برای مثال دوم در جدول شماره ۱۰ و شکل شماره ۲، آورده می‌شود که به رد فرض صفر منجر شده است و این بدین معنی است که مدل پیشنهادی در این پژوهش توانسته است نسبت به مدل تک دوره‌ای با پرتفوای متشکل از سه دارایی ریسک دار و یک دارایی بدون ریسک بهتر عمل کند. سطح معناداری این آزمون ۹۵٪ فرض شده است.

جدول ۱۰: نتایج آزمون من ویتنی برای مثال دوم

Hypothesis Test Summary				
	Null Hypothesis	**Test**	**Sig.**	**Decision**
1	The distribution of f is the same across categories of group.	Independent-Samples Mann-Whitney U Test	.000	Reject the null hypothesis.
Asymptotic significances are displayed. The significance level is .05.				

در شکل ۲ نشان داده می شود که مقدار .Asymptotic Sig برابر با ۰/۰۰۰ است که این مقدار به قطع کمتر از سطح α (۰/۰۵) است و می توان چنین نتیجه گرفت که فرض صفر ما رد خواهد شد.



Total N	260
Mann-Whitney U	6,010.000
Wilcoxon W	14,525.000
Test Statistic	6,010.000
Standard Error	606.069
Standardized Test Statistic	-4.026
Asymptotic Sig. (2-sided test)	.000

شکل ۲: نتایج آزمون من ویتنی برای مثال دوم

۵- نتیجه‌گیری و بحث

در این پژوهش به مساله بهینه سازی پویای سبد سرمایه‌گذاری با توجه به هزینه معاملات پرداخته شده و مدلی کاربردی برای بهینه سازی پویای سبد سرمایه گذاری ارائه گردیده است. در الگوریتم پیشنهادی، ایده اصلی بر اساس این فکر شکل گرفته است که ما قصد داریم تا مطلوبیت نهایی سرمایه‌گذار را در کل طول دوره سرمایه‌گذاری حداکثر کنیم. لذا می‌توانیم درصدهای بهینه را برای دوره‌ی آخر سرمایه‌گذاری بیابیم و سپس برای بهینه‌سازی دوره قبل به‌گونه‌ای عمل کنیم تا مطلوبیت آن دوره با توجه به g بازگشتی از دوره قبل حداکثر شود. باید توجه داشت مدلسازی انجام گرفته در این مقاله قادر بوده است با استفاده از شکستن تابع بهینه بازگشتی از زیرمساله ها به دو تابع، بدون استفاده از تخمین ها و معادلات ریاضی پیچیده استراتژی مناسب سرمایه گذاری را پیشنهاد دهد که آن را می توان به عنوان برتری مدل پیشنهادی نسبت به سایر روش‌ها و تحقیقات انجام گرفته در این زمینه دانست.

به منظور اعتبارسنجی مدل از مثال‌هایی استفاده شد و ضمن شرح روند و عملکرد مدل در مواردی کارایی مدل پویا در مقابل مدل تک دوره ای پیش رونده مورد سنجش قرار گرفت. در این مثال‌ها از

اطلاعات قیمت سهام شرکت‌های بورسی برای بازه‌های مختلف زمانی استفاده شد و این اطلاعات از سایت یاهو فایننس استخراج شد. برای نوشتن مدل از برنامه متلب و در نهایت به منظور اعتبار سنجی مدل از نرم افزارهای Excel و SPSS استفاده گردیده است. در مثال اول به طور مفصل به چگونگی رفتار سرمایه‌گذار در استفاده از هر دو رویکرد تک دوره ای و پویا پرداخته شد و با توجه به نتایج و تطابق جوابهای حاصل و پاسخ‌های ارائه شده توسط مدل، صحت روند مدلسازی تایید می‌شود. در مثال دوم به بررسی عملکرد مدل پرداخته شده است و با توجه به نتایج آزمون آماری من ویتنی می‌توان به این جمع بندی رسید که مدل پویای پیشنهادی نتایج قابل قبول و مناسب‌تری نسبت به دیگر مدل مرسوم، بهینه‌سازی تک دوره‌ای، ارائه می‌دهد.

قدردانی

مطالعات مربوط به این مقاله تحت حمایت شرکت ملی گاز ایران انجام گرفته است.

فهرست منابع

* Akian, M. and Sulem, A. 1996. Dynamic Optimization of Long-Term Growth Rate for a Portfolio with Transaction Costs and Logarithmic Utility. Mathematical Finance, vol. 11, pp. 153-188.
* Balduzzi, P., and Lynch, A. W. 1999. Transaction Costs and Predictability: Some Utility Cost Calculations. The Journal of Financial Economics, vol. 52, pp. 47–78.
* Barberis, N. 2002. Investing for the Long Run When Returns are Predictable. The Journal of Finance, pp 225-264.
* Brandt, M., Goyal A., Santa-Clara P., and Stroud. R. 2005. A Simulation Approach to Dynamic Portfolio Choice with an Application to Learning about Return Predictability. Review of Financial Studies, vol. 18, pp 831-873.
* Brennan, M., Schwartz, E., and Lagnado, R. 1997. Strategic Asset Allocation. The Journal of Economic Dynamics and Control, pp 1377-1403.
* Brown, D. B., and Smith, J. E. 2011. Dynamic Portfolio Optimization with Transaction Costs: Heuristics and Dual Bounds. Management Science, pp. 1752-1770
* Butt N. 2012. Dynamic Portfolio Allocation under transaction costs, PhD Thesis, University of Western Ontario, London, Canada
* Cai Y., Judd K. L., and Xu R. 2013) .Numerical Solution of Dynamic Portfolio Optimization with Transaction Costs, National Bureau of Economic Research, pp 137-213.
* Dammon, R. M., Spatt, C. S., and Zhang, H. H. 2001. Optimal consumption and investment with capital gains taxes. Review of Financial Studies, vol. 14, pp 583–616.
* Davis, M.H.A., and Norman, A.R. 1990. Portfolio Selection with Transaction Costs. Mathematics of Operations Research, pp. 676-713.
* Harrison, H., and Waldron, P., 1998. Risk aversion and portfolio composition, Mathematical Economics and Finance, pp. 88-107
* Kim, T., and Omberg E. 1986. Dynamic Nonmyopic Portfolio Behavior. Review of Financial Studies. pp 141-61.
* Liu, H. 2004. Optimal consumption and investment with Transaction Costs and Multiple Risky Assets. The Journal of Finance, vol. 59, pp. 289-338.

* Lynch, A., and Tan, S. 2010. Multiple risky assets, Transaction Costs and Return Predictability: Implications for Portfolio Choice. Cambridge University Press.
* Markowitz, H.M. 1952. Portfolio Selection. The Journal of Finance, pp 77-91.
* Merton, R. C. 1969. Lifetime Portfolio Selection Under Uncertainty: The Continuous-Time Case". The Review of Economics and Statistics, 247–257.
* Mutharaman, K., and Kumar, S. 2006. Multidimensional Portfolio Optimization with Proportional Transaction Costs. Mathematical Finance, vol.16, pp. 301-335.
* Samuelson, P. A. 1969. Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming, Review of Economics and Statistics, pp 239–46.
* Shreve, S.E., and Soner, H.M. 1994. Optimal Investment and Consumption with Transaction Costs. The Annals of Applied Probability, pp. 609-692.
* Uppal, R. and Wang T. 2003. Model Misspecification and Under-Diversification, The Journal of Finance, American Finance Association, vol. 58, pp 2465-2486
* Wachter, J. 2002. Portfolio and Consumption Decisions under Mean-Reverting Returns: An Exact Solution for Complete Markets. The Journal of Financial and Quantitative Analysis, pp 63-91

یادداشت‌ها

[1] Markowitz
[2] Efficient Frontier
[3] Merton
[4] Nonlinear Partial Differential Equations
[5] Utility Function
[6] Samuelson
[7] Kim
[8] Omberg
[9] Liu
[10] Wachter
[11] Brennan
[12] Kogan
[13] Uppal
[14] Balduzzi and Lynch
[15] Barberis
[16] Damon
[17] Brandt
[18] Harrison
[19] Brown
[20] Butt
[21] Mutharaman and Kumar
[22] Not Trading Region
[23] Akian and Sulem
[24] Lynch and Tan
[25] Thompson and Davison
[26] Yahoo Finance
[27] Close
[28] Grid Optimization Method
[29] Microsoft
[30] Apple
[31] IBM
[32] Mann-Whitney
[33] Independent T-Test