مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار
شماره سی‌ودوم / پائیز ۱۳۹٦

# بررسی مدل بلک– شولز کسری با توان هرست روی اختیار معامله اروپایی با هزینه های معاملاتی

مرتضی رحمانی[۱]
ناهید جعفریان[۲]

تاریخ دریافت: ۹۵/۱۱/۰۸ تاریخ پذیرش: ۹۶/۰۲/۱۰

## چکیده

در تمام بورس های معروف دنیا ابزارهای مشتقه بطور قابل توجهی داد و ستد می شوند. اختیارات که در واقع امتیازی برای دارنده ی خود محسوب می شوند، از جمله مهمترین ابزارهای مشتقه هستند. در این پژوهش، قیمت گذاری اختیارخرید معامله اروپایی تحت مدل بلک- شولز کسری مورد بررسی قرار می گیرد. مدل بلک- شولز کسری متکی به حرکت براونی کسری با پارامتر هرست است. توان هرست یا شاخص خود تشابهی با بعد فراکتالی ارتباط دارد و به عنوان یک شاخص حافظه بلند مدت در روند قیمت های سهام مورد استفاده قرار می گیرد. هدف ارائه یک فرمول قیمت گذاری برای اختیار معامله اروپایی با هزینه های معامله می باشد. جواب تقریبی معادله قیمت گذاری کسری با هزینه های معامله به وسیله روش تکرار تغییرات بررسی می شود. هزینه های معامله شامل هزینه ثابت، هزینه متناسب با حجم معامله و هزینه متناسب با ارزش معامله می باشند. انتظار می رود، قیمت اختیار معامله اروپایی با افزایش توان هرست کاهش یابد. برای تحقق این هدف، با برآورد توان هرست (پارامتر سری های زمانی)، روی داده های واقعی بازار سهام تهران به نتیجه موردنظر یعنی کاهش قیمت اختیار خرید دست می یابیم. برای محاسبه داده ها از نرم افزار متلب ۲۰۱۳ استفاده می شود. نتایج مقایسه نشان می دهند که ارزشگذاری توسط مدل بلک- شولز کسری به نتایج واقعی قیمت اختیار خرید نزدیک تر است و تئوری قیمت گذاری اختیار معامله بلک –شولز(۱۹۷۳) با نوسان ثابت و نادیده گرفتن هزینه های معاملاتی نمی تواند قیمت واقعی اختیار خرید اروپایی را نشان دهد.

**واژه‌های کلیدی:** اختیار معامله اروپایی، توان هرست، حرکت براونی کسری، روش تکرار تغییرات، مدل بلاک–شولز کسری.

---

۱- استاد ریاضی دانشگاه علم و فرهنگ و پژوهشکده توسعه تکنولوژی
۲- دانشجوی ارشد ریاضیات مالی دانشگاه علم و فرهنگ (نویسنده مسئول) nahidjafarian2@gmail.com

**۱- مقدمه**

در سال های اخیر، بازارهای مالی به عنوان سیستم های دینامیکی غیر خطی و پیچیده در نظر گرفته می شوند. تحقیقات نشان می دهند که بسیاری از سری های زمانی بازار مالی، دارای فرآیند حرکت براونی کسری[۱] با وابستگی و دامنه بلند مدت[۲] هستند. این ویژگی مهم بیانگر وجود پایداری نوسانات[۳] است (وانگ ،۲۰۱۰). مدل بلک- شولز کسری از حرکت براونی کسری با توان هرست[۴] پیروی می کند (لازم به ذکر است مقدار توان هرست $H \in (\frac{1}{2},1]$، تعیین کننده نوع فرآیند حرکت براونی کسری است). وجود حافظه بلند مدت (که آن را وابستگی با دامنه بلند مدت نیز می نامند) در بازده دارایی ها، بیانگر وجود خود همبستگی میان مشاهدات با فاصله زمانی زیاد است. بنابراین می توان از بازده های گذشته به منظور پیش بینی بازده آینده استفاده نمود. حافظه بلند مدت در بازده دارایی ها، جنبه های تئوریک و کاربردی مهمی دارد. نخست از آنجایی که حافظه بلند مدت شکل خاصی از دینامیک غیر خطی است، مدل سازی آن با استفاده از روش های خطی امکان پذیر نیست و توسعه استفاده از مدل های قیمت گذاری غیر خطی را ترغیب می کند. ثانیاً با وجود حافظه بلند مدت، قیمت گذاری اوراق مشتقه با استفاده از روش های سنتی مناسب نخواهد بود(یاجیما ،۱۹۸۵). در نهایت از آن جایی که حافظه بلند مدت موجب وابستگی بازده آینده دارایی با بازده های قبلی آن می شود، لذا نشان دهندهٔ وجود پارامتری قابل پیش بینی در دینامیک سری زمانی است. فرض اساسی در مدل بلک- شولز کسری این است که تغییرات قیمت دارایی پایه در یک دوره زمانی دارای توزیع لاگ نرمال[۵] است. این مدل تاثیر زیادی در نحوه ی قیمت گذاری و پوشش ریسک اختیار معامله دارد. فرمول قیمت گذاری اختیار خرید اروپایی در این مدل تابعی از متغیرهای، نرخ بهره بدون ریسک، زمان تا سررسید، قیمت دارایی، قیمت اعمال، متغیر نوسان پذیری و سه نوع هزینه معاملاتی است. در این مدل $\tilde{\sigma}$ با توان هرست متفاوت بیشتر از ۰/۵، تخمینی از $\sigma$ می باشد که باعث کم شدن نوسان سهام می شود. در این تحقیق نشان می دهیم که وجود پارامتر هرست باعث قوی شدن مدل بلک- شولز کسری شده است و با افزایش توان هرست قیمت اختیار خرید کاهش می یابد و به قیمت واقعی نزدیک تر می شود. فرمول اختیار خرید اروپایی تحت مدل بلک- شولز کسری بر روی داده های واقعی بازار سهام تهران توانسته است با برآورد پارامتر $H$ به نتایج واقعی یعنی کاهش قیمت اختیار خرید دست یابد.

## ۲- مبانی نظری و مروری بر پیشینه پژوهش

### ۲-۱- پیشینه تحقیق

تحقیقات انجام شده را می توان به دو دسته تقسیم و بررسی نمود:

- دسته ی اول تاریخچه انتگرال تصادفی و ریاضیات مالی (۱۸۸۰ تا ۱۹۷۰).
- دسته ی دوم تاریخچه مدل بلک شولز کسری و قیمت گذاری اختیار (۱۹۷۰ تا ۲۰۱۳).

تاریخ انتگرال گیری تصادفی و یافتن الگویی برای قیمت گذاری قراردادهای بازار بورس، هر دو به حرکت براونی باز می گردد، بنابراین بحث را از حرکت براونی آغاز می کنیم. تلاش های اولیه برای ارائه

الگوی ریاضی حرکت براونی از سه منبع مختلف سرچشمه می گیرد که هیچکدام ارتباطی با دیگری نداشته است: اولی ت. ن. تیله[۶] در کپنهاگ[۷] ( ۱۸۸۰) بود که هنگام مطالعه سری های زمانی، الگوی هوشمندانه ای برای حرکت براونی ابداع کرد . دومی به کارهای بشیلیه[۸] (۱۹۰۰ و ۱۹۹۰ )مربوط می شود که هنگام مطالعهٔ رفتار پویایی بازار بورس پاریس، الگویی برای حرکت براونی ارائه داد. بالاخره منبع سوم، الگویی بود که آلبرت انیشتین[۹] در سال ۱۹۰۵برای حرکت ذرات ریز معلق در یک مایع ارائه کرد تا فیزیک دانان دیگر را درباره ماهیت مولکولی ماده، متقاعد سازد (پایز ،۱۹۸۲). از این سه الگو، الگو تیله و بشیلیه در طولانی مدت بروز چندانی نداشتند، لکن الگوی انیشتین تاثیر خود را بلافاصله نشان داد. از آنجا که بسیاری، بشیلیه را بنیان گذار ریاضیات مالی می دانند، اما او نتوانست به جمع نخبگان ریاضی پاریس بپیوندد (کورتولت ،۲۰۰۰). انیشتین حرکت براونی را فرآیندی تصادفی معرفی کرد که مسیرهای پیوسته و نموهای مستقل دارد. با این حال انیشتین نتوانست نشان دهد که این فرآیند به عنوان یک شی ریاضی واقعاً وجود دارد که البته این مطلب قابل درک است، زیرا ایده های بُرل و لبگ در ساختن نظریه اندازه طی دهه نخست قرن بیستم شکل گرفت در حالی که انیشتین فرآیند مزبور را در سال ۱۹۰۵ ارائه کرده بود. در سال ۱۹۱۳، رویکرد پرسی جان دانیل[۱۰] درباره نظریه اندازه (که در آن انتگرال بیش از اندازه تعریف می شود) به صحنه آمد و نوربرت وینر[۱۱] توانست در سال ۱۹۲۳ به کمک این رویکرد همراه با سری های فوریه، حرکت براونی را بسازد و دیدگاه فیزیکی انیشتین را جامعه ریاضی بپوشاند. قدم بعدی را برای انتگرال تصادفی، آندری نیکلایویچ کلموگورف[۱۲] برداشت. در واقع، کلموگورف در سال ۱۹۳۱، درست دو سال پیش از آن که در کتاب مشهورش مبانی ریاضی نظریه احتمال را با استفاده از نظریه اندازه پایه گذاری کند، اشاراتی مختصر به روش بشیلیه در ساختن حرکت براونی داشته است (کلموگورف ،۱۹۳۱ صفحات ۶۴ و ۱۰۲-۱۰۳). حرکت براونی کسری (fBm)، ابتدا توسط کلموگورف (۱۹۴۰) معرفی گردید. وینر و دیگران، بسیاری از ویژگی های مسیرهای حرکت براونی را ثابت کردند که این کار، تا به امروز نیز ادامه یافته است. وینر یک انتگرال چندگانه نیز ساخت اما این موضوع ارتباطی به آنچه امروزه «انتگرال چند گانهٔ وینر» می نامیم ندارد، در واقع کیوشی اتیو[۱۳] (۱۹۵۱) ضمن تلاش برای درک مقالات وینر که کار چندان ساده ای هم نبود، اندیشه های ونیر را منظم کرد و اصلاحات زیادی در آن ها انجام داد.

مندلبروت بنیان گذار هندسه فراکتال بود. پارامتر H از حرکت براونی کسری به نام متخصص آب شناسی هارولد ادوین هرست[۱۴] (1951) نام گذاری شد که یک بررسی آماری سالانه براساس ورودی و خروجی رود نیل انجام داد، (بررسی حافظه سری آن). در سال ۱۹۶۷ روبرت کاسوف[۱۵] (هال ، ۲۰۰۲) با برازش منحنی به قیمت های واقعی اختیار خرید سهام به یک فرمول تجربی ارزشگذاری دست می یابد. بعضی از خواص فرآیند حرکت براونی کسری توسط مندلبروت[۱۶] و ون نس[۱۷] (۱۹۶۸) ارائه گردید. ساموئلسون[۱۸] (هال ، ۲۰۰۲) به این واقعیت پی برد که تنزیل ارزش مورد انتظار توزیع مقادیر احتمالی اختیار خرید سهام به هنگام اعمال آن رویه درستی نیست. مندلبروت (۱۹۷۱)، اولین کسی بود که ایده وجود حافظه بلند مدت را در بازده دارایی ها مطرح کرد . فیشر بلک[۱۹]، مایرون شولز[۲۰]، رابرت مرتون[۲۱]

(۱۹۷۳) با ارائه دادن مدل بلک- شولز برای قیمت گذاری اختیار، دنیای مالی را تغییر دادند. محاسبات کسری یا سیستم های شامل مشتق و انتگرال های کسری توسط کارسلا[۲۲] و اولد هامند اسپانیر[۲۳] در سال ۱۹۷۴ مورد مطالعه قرار گرفت. گرین[۲۴] و فیلیتز[۲۵] (۱۹۷۷) ، با استفاده از آماره $\frac{R}{S}$ کلاسیک، بازده روزانه شاخص بورس نیویورک را مطالعه کردند و شواهدی قوی مبنی بر وجود حافظه بلند مدت در آن یافتند. مدل های حافظه بلند مدت در سال ۱۹۸۰ با عنوان یکپارچگی کسری در اقتصادسنجی توسط گرانجر[۲۶] و جویکس[۲۷] معرفی شد. لیلاند[۲۸] (۱۹۸۵) فرض نمود که پوشش ریسک در فواصل مجزا و معین رخ می دهد، و یک فرمول برای قیمت گذاری اختیار بیان کرد. اولین تعریف از مهندسی مالی را جان فینرتی[۲۹] ( ۱۹۸۸) ارائه داد. در سال ۱۹۹۳، میلر[۳۰] و راس[۳۱] تحقیقاتی در زمینه محاسبات کسری و انتگرال های کسری انجام دادند. با فرض سیاست پوشش ریسک با زمان مجزا، هوگارد[۳۲] و همکاران (۱۹۹۴) ، فرضیه تحدب قیمت اختیار بدست آمده را ارائه نمودند و یک معادله بلک- شولز غیر خطی را از طریق تعمیم معادله بلک- شولز برای تلفیق هزینه های معامله استنتاج کرده اند. هزینه های معامله متناسب با ارزش معامله، حجم معامله وهزینه های ثابت هستند. اولین نسخه مدل بلک- شولز کسری در سال ۱۹۹۵ توسط نیگل[۳۳] و همکارانش ارائه شد. رابرت مرتون و میرن شولز در سال ۱۹۹۷ به خاطر اهمیت مدل قیمت گذاری بلک- شولز موفق به دریافت جایزه نوبل اقتصادی شدند. در خلال توسعه کاربردی محاسبات کسری کارل لورنزو[۳۴]، مطالعاتی انجام داد. بارلز[۳۵] و سونر[۳۶] (۱۹۹۸) ثابت کردند که در بازار، پورتفویی وجود ندارد که بازده و نتیجه نهایی یک اختیار معامله اروپایی را تکرار می کند. تعداد قابل ملاحظه ای از استراتژی آربیتراژی برای مدل های fBm، توسط راجرز[۳۷] (۱۹۹۷) ، شیریاو[۳۸] و سالوپک[۳۹] (۱۹۹۸) ارائه شده است. روش تکرار تغییرات، توسط دانشمند چینی جی هوان هی[۴۰] (۱۹۹۹) به عنوان اصلاحیه ای بر روش ضرایب لاگرانژ کلی ارائه گردید. جان کمبل (۱۹۹۹)، تحقیقاتی در زمینه مهندسی مالی و کارکرد آن به عمل آورد. چریدتیو[۴۱] (۲۰۰۳) استراتژی آربیتراژ را برای مدل های fBm ارائه داد. با کشف ساختار فراکتالی برای بازار مالی، مدل بلک شولز کسری (باجروک و هالت ۲۰۰۵ لیانگ و وانگ و همکاران ۲۰۱۰ ) به عنوان یک مدل تعمیم یافته مدل بلک- شولز کلاسیک ارائه شد (بیاجینی[۴۲] و همکاران ۲۰۰۲، الیوت[۴۳]، ون درهوک[۴۴]، ۲۰۰۳). گواسونی[۴۵] (۲۰۰۶) نشان داد با در نظر گرفتن هزینه های معامله متناسب فرصت های آربیتراژی در مدل بلک- شولز کسری کاهش می یابد . مدل تعمیم یافته لیلاند (ایشیمورا ۲۰۱۰ ) نقش مهمی در قیمت گذاری اختیار با هزینه های معامله، ایفا می کند. تحت معیار غیر آربیتراژی گواسونی، مدل هزینه معامله لیلاند به مدل بلک- شولز کسری با هزینه های معامله تعمیم یافت (وانگ ،جوماری ،ایکسیو و همکاران ۲۰۱۰ ، وانگ ۲۰۱۲). کولیو[۴۶] و چانگ[۴۷] (۲۰۱۳) یک تخمین فرم بسته ، برای مدل بلک – شولز کسری با هزینه های معامله را اثبات کردند.

### ۲-۲- توان هرست (پیترز ۱۹۹۴)

توان هرست ابزاری مناسب برای تشخیص یک سری زمانی غیر تصادفی از یک سری تصادفی، بدون در نظر گرفتن نوع توزیع آن است. روش مطالعه و آزمون هرست به تدریج به پدیده های دیگری نیز، که در ظاهر تصادفی به نظر می رسند، ولی ممکن است از یک الگوی منظمی برخوردار باشند، تعمیم داده شد.

هرست با استفاده از قاعده نصف[۴۸] در آمار، رابطه زیر را تعریف کرد:

$$(\frac{R}{S})_n = a.n^H \qquad (۱-۲)$$

که در آن $R$ دامنه تجدید مقیاس شده[۴۹] (کیان و رشید ۲۰۰۴)، $S$ انحراف معیار سری زمانی، $a$ عدد ثابت، $n$ تعداد مشاهدات و $H$ توان هرست است. فرمول بالا را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathrm{Log}(\frac{R}{S})_n = \mathrm{Log}\,a + H\,\mathrm{Log}(n) \qquad (۲-۲)$$

توان هرست همانندی دو پیشامد پیاپی را نشان می دهد و به کمک محاسبه شیب منحنی $\frac{\mathrm{Log}(\frac{R}{S})}{\mathrm{Log}\,n}$ و با استفاده از روش رگرسیون در حوزهٔ تغییرات $n$ بدست می آید. مقدار بدست آمده نمایانگر میانگین دوره گردش متناوب الگو است. در عمل، می توان با انجام یک رگرسیون، ضریب توان هرست $H$ را برآورد کرد. طبق نتایج هرست اگر مقدار توان هرست برابر با ۰/۵ باشد دلالت بر یک فرآیند مستقل دارد. همچنین بعد فراکتالی سری های زمانی میزان ناهمواری و نوسانات آن را نشان می دهد (مندلبروت ۲۰۰۴). بعد فراکتالی یک خط برابر ۱ و برای یک صفحه برابر ۲ است، بنابراین بعد فراکتالی یک سری زمانی بین ۱ و ۲ قرار دارد. رابطه بعد فراکتالی و توان هرست یک سری زمانی از رابطه (۲-۳) بدست می آید.

$$D = 2 - H \qquad (۳-۲)$$

D، بعد فراکتال و H توان هرست

اگر توان هرست بین ۰/۵ و ۱ قرار گیرد، دلالت بر یک سری زمانی پایدار[۵۰] با حافظه بلند مدت دارد و در نهایت اگر، توان هرست برابر با یک مقدار مثبت ولی کمتر از ۰/۵ شد، دلالت بر ناپایداری[۵۱] فرایند دارد.

### ۲-۳- مروری بر قراردادهای اختیار معامله[52] (شوییـنگ و جانسون ۱۹۸۹)

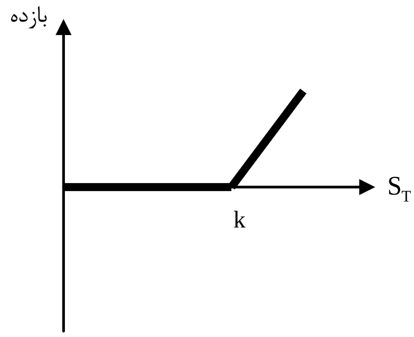
ابزارهای مشتقه[۵۳] نوعی ابزار مالی هستند که ارزش آنها از ارزش سایر اوراق بهادار مشتق می شود. به عنوان مثال اوراق اختیار خود ارزش مشخصی ندارند بلکه ارزش خود را از طریق بهاداری که به واسطه این

اختیار معامله قابل خرید و فروش خواهند بود، بدست می آورند. علت نامگذاری این ابزارها به عنوان مشتقه نیز همین امر می باشد که ارزش خود را از سایر اوراق بهادار، نرخ سود، نرخ ارز، شاخص های سهام و حتی کالاهای اساسی دارند. انواع ابزارهای مشتقه، قرارداد آتی[۵۴]، قرارداد سلف (پیمان آتی)[۵۵] ، اختیارات معامله و معاوضه[۵۶] (تاخت) می باشند. یک ورقه اختیار معامله به دارنده آن حق یا «اختیار» انجام کاری را می دهد، نه اینکه او را ملزم به انجام کاری کند. این ویژگی وجه تمایز ورقه اختیار معامله از قراردادهای آتی است. انعقاد یک قرارداد آتی هیچ هزینه ای در برندارد (به جز الزاماتی که درباره «حساب ودیعه[۵۷]» وجود دارد). ولی یک سرمایه گذار باید هزینه حق اختیار معامله با «قیمت قرارداد اختیار[۵۸]» را بپردازد. خرید اوراق اختیار معامله مانند نوعی خرید بیمه است. قرارداد اختیار خرید[۵۹] به دارنده ی آن، این حق را می دهد تا دارایی را در تاریخ معینی و با قیمت مشخصی خریداری نماید.

تاریخی را که قرارداد معین می کند به تاریخ انقضا، تاریخ اعمال، یا سررسید[۶۰] معروف است. اما اختیار معامله اروپایی، به دارندهٔ اختیار، خرید یا فروش دارایی را، فقط در تاریخ سررسید می دهد. اگر $k$ را قیمت اعمال و $S_T$ را قیمت دارایی پایه در زمان سررسید بدانیم، بازده[۶۱] حاصل از موقعیت خرید در یک اختیار خرید اروپایی عبارت است از:

$$\max(S_T - k, 0)^+ \qquad (۲-۴)$$

این رابطه نشان می دهد که اگر $S_T > k$ باشد، اختیار معامله اعمال خواهد شد و در غیر این صورت اگر $S_T < k$ باشد، اختیار معامله اعمال نخواهد شد. نمودار (۲-۳)، موقعیت خرید در اختیار خرید[۶۲] را نشان می دهد.




**نمودار (۲-۳) بازده خرید اختیار خرید**

## ۲-۴- بررسی مدل بلک- شولز کسری با هزینه های معاملاتی روی اختیار معامله اروپایی

- **مدل بلک- شولز**

مدل بلک- شولز در نحوه قیمت گذاری در پوشش ریسک اختیار معامله نقش اساسی و محوری در مهندسی مالی داشته است. اساس مدل بلک- شولز بررسی این است که نوسانات قیمت سهام در طول زمان های آتی چگونه حرکت خواهد کرد. فرض اساسی در این مدل این است که قیمت سهام از گشت تصادفی پیروی می کند و تغییرات قیمت سهام در یک دوره زمانی کوتاه مدت دارای توزیع لاگ نرمال می باشد. تحت مدل قیمت گذاری اختیار بلک- شولز، ارزش اختیار تابع حرکت براونی[۶۳] است. حرکت براونی فاقد حافظه است و گذشته خود را فراموش می کند. به همین دلیل مدل بلک- شولز با رفتار بازارهای مالی ایده آل مطابقت دارد. زیرا در فرض مدل بلک- شولز یعنی،

$$ds_t = \mu s_t\, dt + \sigma\, d B_t \qquad (۲-۵)$$

ضرایب $\mu$ و $\sigma$ ثابت هستند. شواهد تجربی بررسی آماری بازدهی سهام حاکی از عدم پیروی این متغیر تصادفی از توزیع نرمال است. به عبارت دقیق تر، در بازده سهام پدیده هایی مانند چولکی مثبت و کشیدگی ناهماهنگ با توزیع نرمال و دنباله های پهن[۶۴] مشاهده شده است. این مساله در حالی بوده است که استفاده از مدل حرکت براونی هندسی دال بر فرض توزیع نرمال برای متغیر تحت بررسی (شوتنس ۲۰۰۳)، با وجود معایب حرکت براونی و فرضیات مدل بلک- شولز، ارزش اختیار خرید و فروش سهام تنها به بهای سهام، زمان و متغیرهایی بستگی خواهد داشت که به عنوان مقادیر ثابت در نظر گرفته می شوند.

- **بررسی مدل بلک- شولز کسری (کولیو و چانگ ۲۰۱۳)**

نام حرکت براونی کسری (fBm) به خاطر نمایش انتگرال تصادفی برحسب حرکت براونی استاندارد می باشد. مدل بلک- شولز کسری از حرکت براونی کسری پیروی می کند و fBm یک ابزار مفید برای در نظر گرفتن وابستگی دوربرد سری زمانی بازده سهام محسوب می شود. فرض کنید $(\Omega, F, (F_t)_{0\le t\le T}, p)$ یک فضای احتمال فیلتر شده کامل تعریف می شود. حرکت براونی کسری $B_t^H$ با توان هرست $H \in (0,1]$ پیوسته است. تابع کوواریانس این فرآیند عبارت است از (رکیینی ۲۰۰۸):

$$Cov(B_t^H, B_s^H) = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^H - |t-s|^{2H}) \qquad s,t \in R \qquad (۲-۶)$$

واریانس حرکت براونی کسری

$$E[(B_t^H)^2] = t^{2H}$$

طبق رابطه (۲-۶) داریم:

$$E[(B_t^H - B_s^H)^2] = |t-s|^{2H} \qquad (۲-۷)$$

علاوه بر این حرکت براونی کسری یک افزایش ثابت دارد[۶۵] و با پارامتر هرست H خود تشابه است. حرکت براونی کسری دارای نموهای مانا، حافظه بلند مدت است، که با واقعیت بازار سازگار است. وجود این فرآیند در مدل بلک- شولز کسری سبب می شود که قیمت اختیار معامله اروپایی واقعی تر باشد. مدل بلک- شولز کسری عبارت است از:

$$S_t = S_\circ \exp(rt + \sigma B_t^H)\ ,\ t \in [\circ, T] \qquad (۲-۸)$$

در مورد انتگرال مسیر[۶۶] مدل بلک- شولز کسری داریم:

$$dS_t = rS_t\,dt + \sigma S_t\,dB_t^H \qquad (۲-۹)$$

به ازای $H \neq \frac{1}{2}$، $B_t^H$ یک نیمه مارتینگل[۶۷] نیست. در این حالت می تواند از اطلاعات گذشته و حال برای پیش بینی آینده استفاده کند. این مطلب نشان می دهد که در مدل بلک- شولز کسری، شکل ضعیفی از آربیتراژ وجود دارد (دلبائن و شاچرمایر ۱۹۹۴). مدل بلک- شولز کسری دارای ساختار هزینه[۶۸] می باشد. پارامترهای $\alpha_1$ و $\alpha_2$ و $\alpha_3$ به ترتیب برابر با هزینه ثابت[۶۹]، هزینه متناسب با حجم معامله[۷۰] و هزینه متناسب با ارزش معامله[۷۱] می باشند. ساختار هزینه به صورت زیر است :

$$R(s,v) = \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3 s)|\,v\,| \qquad (۲-۱۰)$$

از طرف معادله دیفرانسیل جزیی، قیمت گذاری غیر خطی در مدل بلک- شولز کسری با هزینه های معامله عبارت است از:

$$\frac{1}{2}\tilde{\sigma}s^2\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + rs\frac{\partial v}{\partial s} - rv - \frac{\partial v}{\partial t} = F(s,|\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}|)\quad \circ < s < \infty\ ,\ \circ < \tau < T \qquad (۲-۱۱)$$

جزئیات ساخت معادله دیفرانسیل جزیی (۲-۱۱)، در مقاله [۴۲] یافت می شود.

- **روش تکرار تغییرات[۷۲] (VIM) (هی ۱۹۹۹)**

روش تکرار تغییرات اولین بار توسط ریاضیدان چینی جان هوان هی[۷۳] به عنوان اصلاحیه ای بر روش ضرایب عمومی لاگرانژ برای مسایل غیر خطی ارائه گردید. در این روش یک تابع شامل ضرایب عمومی لاگرانژ ساخته می شود که ضرایب لاگرانژ در تابع تصحیح را تعیین می نماید. این روش ابزاری قوی برای حل دسته وسیعی از معادلات دیفرانسیل معمولی، معالات دیفرانسیل با مشتقات جزیی، معادلات انتگرال می باشد و از دقت و سرعت بالایی برخوردار است. برای نشان دادن ایده اصلی روش تکرار تغییرات، معادله دیفرانسیل زیر را در نظر می گیریم :

$$Lu(x) + Nu(x) = g(x) \qquad (۲-۱۲)$$

که در آن $L$ عملگر خطی و $N$ عملگر غیر خطی است و $g(x)$ باعث ناهمگن شدن معادله شده است. با فرض اینکه $u_{\circ}(x)$ جواب سیستم $Lu=\circ$ باشد. با توجه به مقاله اینکوتی[۷۴] و همکاران ( ۱۹۷۸)، برای تصحیح جواب مثلاً در $x=1$ به صورت زیر عمل می کنیم:

$$u_{cor}(1)=u_{\circ}(1)+\int_{\circ}^{x}\lambda\{Lu_{\circ}+Nu_{\circ}-g\}dx \qquad (۲-۱۳)$$

که $\lambda$ ضریب لاگرانژ و قسمت دوم رابطه فوق، مقدار تصحیح نامیده می شود. اگر رابطه بالا را به صورت روش تکراری بنویسیم خواهیم داشت:

$$u_{n+1}(x_{\circ})=u_n(x_{\circ})+\int_{\circ}^{x_{\circ}}\lambda(Lu_{\circ}+Nu_{\circ}-g)dx \qquad (۲-۱۴)$$

که $u_{\circ}(x)$ حدس اولیه است و $u_n$ تغییرات محدود[۷۵] می باشد و $\delta u_n=\circ$ حال برای هر $x_{\circ}$ دلخواه رابطه را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$u_{n+1}(x)=u_{\circ}(x)+\int_{\circ}^{x}\lambda\{Lu_n(\xi)+Nu_n(\xi)-g(\xi)\}d\xi \qquad (۲-۱۵)$$

معادله (۲-۱۵) همان تابع همبستگی[۷۶] است و می تواند تحت یک شرایط ثابت معین، معین شود. $u_n(\xi)$ به عنوان تغییرات محدود در نظر گرفته می شود که این بدین معناست که $u_n(\xi)=\circ$. حال با اعمال تغییر فوق خواهیم داشت:

$$\delta u_{\circ}(x)=\delta u_{\circ}(x)+\int_{\circ}^{x}\lambda[Lu_{\circ}(\xi)+N\tilde{u}_n(\xi)-g(\xi)d\xi] \qquad (۲-۱۶)$$

چون تغییرات محدودکننده صفر $\delta\tilde{u}_n(\xi)=\circ$ است، پس معادله انتگرالی (۲-۱۶) به شکل زیر کاهش می یابد و خواهیم داشت:

$$\delta u_{n+1}(x)=\delta u_n(x)+\delta\int_{\circ}^{x}\lambda Lu_n(\xi)d\xi \qquad (۲-۱۷)$$

$$\delta u_{n+1}(x)=\delta u_{\circ}(x)+\lambda\int_{\circ}^{x}L\delta u_{\circ}(\xi)d\xi]_{\xi=\circ}^{\xi=x}$$

سپس تحت یک شرایط ثابت برای معادله فوق، مقدار بهینه ضرایب لاگرانژ به راحتی قابل تشخیص است. با ضرایب لاگرانژ بدست آمده و جایگزینی در (۲-۱۵)، راه حل تقریبی برای یافتن $u_n(x)$ پیدا می شود، که خواهیم داشت:

$$u(x)=\lim_{n\to\infty}u_n(x) \quad \text{یا} \quad u(x)\approx u_n(x) \qquad (۲-۱۸)$$

- **قیمت گذاری یک اختیار معامله اروپایی با هزینه های معامله**

در این بخش با استفاده از روش تکرار تغییرات (VIM)، فرمول زیر را بدست می آوریم. جزئیات اثبات فرمول (۲-۱۹) در مقاله کولیو و چانگ (۲۰۱۳) یافت می شود.

$$V_1(x,\tau) = SN(d_1) - k\,e^{-r\tau}\,N(d_2) - \frac{\beta_1}{r}(1-e^{-r\tau}) - (\beta_2 + \beta_3 s)\,f(s,\tau) \qquad (۲-۱۹)$$

❋ فرمول های پارامتر هزینه ها

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1}{\Delta x} \quad , \quad \beta_i = \sigma\alpha_i \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{(\Delta t)^{1-H}} \quad , \quad i = 2,3$$

❋ نوسان مدل بلک- شولز کسری

$$\tilde{\sigma} = \sigma^2\,(\Delta t)^{2H-1}$$

❋ فرمول پارامترهای $d_1$ و $d_2$

$$d_1(x,\tau) = \frac{\mathrm{Ln}(\frac{s}{k}) + (r + \frac{\tilde{\sigma}^2}{2})\tau}{\tilde{\sigma}\sqrt{\tau}}$$

$$d_2(x,\tau) = d_1(x,\tau) - \tilde{\sigma}\sqrt{\tau}$$

❋ تابع توزیع نرمال تجمعی

$$N(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{\xi^2}{2}}\,d\xi$$

❋ همچنین $f(s,\tau)$ تابعی برحسب تابع خطا که به صورت زیر تعریف می شود:

$$f(s,\tau) = \frac{e^{-r\tau}}{\sqrt{2}\,\tilde{\sigma}}\left(\frac{K}{S}\right)^{\frac{k_1}{\tilde{\sigma}^2}} \times$$

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{\frac{k_1^2}{2\tilde{\sigma}^2} - r}}\left[\left(\left(\frac{S}{K}\right)^{\sqrt{\frac{(\frac{k_1^2}{\tilde{\sigma}^2} - 2r}{\tilde{\sigma}}}}\left(\mathrm{erf}\left(\sqrt{\left(\frac{k_1^2}{2\tilde{\sigma}^2} - r\right)\tau} + \frac{\mathrm{Log}(\frac{S}{K})}{\sqrt{2\tau}\,\tilde{\sigma}} + \frac{\log(\frac{S}{K})}{\sqrt{2\tau}\,\tilde{\sigma}} - i\right)\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \left(\frac{S}{K}\right)^{-\sqrt{\frac{(\frac{k_1^2}{\tilde{\sigma}^2} - 2r)}{\tilde{\sigma}}}}\left(\mathrm{erf}\left(\sqrt{\left(\frac{k_1^2}{2\tilde{\sigma}^2} - r\right)\tau} - \frac{\log(\frac{S}{K})}{\sqrt{2\tau}\,\tilde{\sigma}}\right) + i\right)\right]\right) \qquad (۲-۲۰)$$

که در آن:

$$i = 1 \text{ اگر } \log(\frac{S}{K}) > 1$$

$$i = -1 \text{ اگر } \log(\frac{S}{K}) < 1$$

$$i = 0 \text{ اگر } \log(\frac{S}{K}) = 0$$

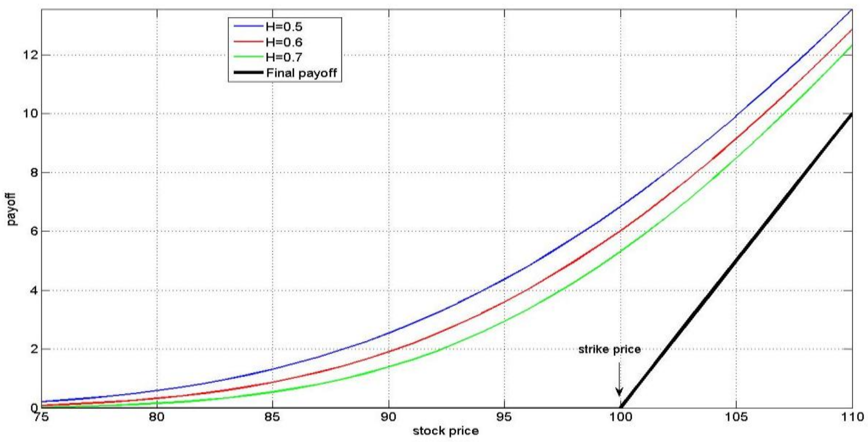
زمانی که تنها هزینه های ثابت را در نظر بگیریم، یعنی $\alpha_1 \neq 0$ و $\alpha_3 = \alpha_2 = 0$ مدل بلک- شولز کسری به صورت زیر بدست می آید.

نتیجه: هرگاه $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ و $\alpha_1 \neq 0$ باشد، مدل بلک- شولز کسری به صورت زیر بدست می آید:

$$v(s,t) = SN(d_1) - Ke^{-r\tau} N(d_2) - \frac{\beta_1}{r}(1 - e^{-r\tau}) \qquad (۲-۲۱)$$

(۲-۱۹) فرمول قیمت گذاری یک اختیار خرید اروپایی با هزینه های معاملاتی در مدل بلک- شولز کسری است. با یک مثال مدل را شبیه سازی می کنیم.

**مثال (۲-۴):** خرید اختیار خرید[۷۷] با قیمت توافقی (اعمال) ۱۰۰ در مدت ۱۲ ماه تحت حرکت براونی کسری با توان هرست $H = 0.5$، $H = 0.6$ و $H = 0.7$ منقضی می شود. بطوریکه قیمت سهام ۷۵، $\beta_1$ هزینه ثابت ۰/۰۲، $\beta_2$ هزینه متناسب با حجم معامله صفر و $\beta_3$ هزینه متناسب با ارزش معامله ۰/۰۱ در نظر می گیریم. نرخ بهره بدون ریسک ثابت ۱۰ درصد و یک نوسان ثابت ۴۰ درصد، گام زمانی $\Delta t = 0.5$. شکل (۲-۴) نشان می دهد که با افزایش توان هرست H، قیمت گذاری اختیار خرید اروپایی در حال کاهش است.




**شکل (۲-۴) قیمت اختیار خرید با توان های مختلف هرست**

## ۳- روش شناسی پژوهش

نوع تحقیق حاضر، از نقطه نظر هدف، کاربردی است. هدف تحقیق کاربردی توسعه دانش کاربردی در یک زمینه خاص است. جامعه آماری این تحقیق، سهام های، بورس اوراق بهادار تهران طی سال های ۹۴-۱۳۹۳ می باشد. برای جمع آوری اطلاعات مربوط به ادبیات تحقیق از روش کتابخانه ای ، مقالات ، کتب انگلیسی و پایان نامه های لاتین مرتبط با این موضوع استفاده گردید. در این تحقیق از آزمون هرست $H \in (\frac{1}{2},1]$ استفاده شده است. داده های مورد نیاز از سایت سازمان بورس تهران توسط نرم افزار اکسل دریافت و به فرمت نرم افزار متلب ۲۰۱۳ بارگذاری شد.

## ۴- پیاده سازی فرمول قیمت گذاری تقریبی اختیار خرید اروپایی تحت مدل بلک- شولز کسری با داده های واقعی

فرمول (۲-۱۹) یعنی قیمت اختیار خرید اروپایی با هزینه های معاملاتی را بر روی داده های واقعی سهام داخلی انجام دادیم و نتایج بدست آمده نشان می دهند که با افزایش توان هرست، قیمت اختیار خرید اروپایی کاهش می یابد. داده های واقعی را از سایت بورس اوراق بهادار تهران[۷۸] توسط نرم افزار اکسل (۲۰۱۳) دریافت و در محیط نرم افزار متلب ۲۰۱۳ بارگذاری شد.

در این مدل نرخ بهره، یک عدد ثابت حقیقی است، نرخ بهره $r = 0.048$ ثابت فرض شده است. با استفاده از تغییرات قیمت دارایی پایه می توان میزان نوسان پذیری را تخمین زد. در این مرحله با استفاده از داده های سری زمانی روزانه برای روزهایی که سهام مورد معامله قرار گرفته است و قیمت دارایی پایه در پایان $i-$امین دوره و با استفاده از فرمول های (۴-۱) تا (۴-۴) اقدام به برآورد نوسان پذیری قیمت سهام می کنیم هرگاه $n+1$ تعداد مشاهدات باشد، داریم:

$$u_i = Ln(\frac{S_i}{S_{i-1}}) \qquad (۱-۴)$$

$u_i$، بازده روزانه و $S_i$، قیمت دارایی پایه در پایان $i$امین دوره زمانی $(i = 1,...,n)$، می توانیم مقدار تقریبی انحراف معیار بازده روزانه را به صورت ذیل برآورد می کنیم:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \bar{u})^2} \qquad (۲-۴)$$

که در آن $\bar{u}$، میانگین بازده روزانه است. به این ترتیب:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}u_i^2 - \frac{1}{n(n-1)}(\sum_{i=1}^{n}u_i)^2} \qquad (۳-۴)$$

با استفاده از رابطه:

$$Ln\frac{s_T}{s} \sim \phi[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T\, ,\, \sigma\sqrt{T}] \qquad (۴-۴)$$

انحراف معیار بازده روزانه برابر $\sigma\sqrt{\tau}$ است؛ بنابراین متغیر S برآوردی از $\sigma\sqrt{\tau}$ است. در نتیجه می توان گفت که $\hat{\sigma}$ تخمینی از $\sigma$ به صورت زیر است:

$$\hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{\tau}} \tag{۵-۴}$$

$\tau$، معکوس تعداد روزهای مبادلاتی و s، انحراف معیار بازده روزانه است.

اگر نوسان پذیری برای قیمت گذاری یک اختیار معامله دو ساله استفاده شود، لازم است از داده های تاریخی دو سال اخیر استفاده کنیم. موضوع قابل بحث دیگری که وجود دارد این است که دوره زمانی را براساس تعداد روزهای تقویم یا روزهای کاری، که در آن روزهای معامله صورت می گیرد، اندازه گیری نماییم تا بتوانیم پارامتر نوسان پذیری را بطور صحیح برآورد کنیم (هال ۲۰۰۹).

### ۴-۱- نحوه محاسبه داده های واقعی در فرمول قیمت گذاری اختیار خرید اروپایی تحت مدل بلک- شولز کسری با توان هرست

* s، انحراف معیار قیمت سهام با استفاده از فرمول های بخش (۴-۱) تا (۴-۴) انجام می شود، دوره ی زمانی یک ساله است.
* S قیمت سهام: فقط آخرین قیمت روزانه سهام را در نظر می گیریم.
* k قیمت اعمال: میانگین کمترین قیمت و بیشترین قیمت روزانه را محاسبه کرده و بعد یک میانگین کلی می گیریم.

میانگین روزانه $A = (S_{Min} + S_{Max})/2$

قیمت اعمال (قیمت توافقی) $K = \sum_{i=1}^{n} A/n$

r نرخ بهره: بطور ثابت ۰/۰۴۸ فرض می شود.

* محاسبه توان هرست (H): لگاریتم دامنه تغییرات قیمت سهام تقسیم بر انحراف معیار قیمت های ماهیانه سهام، حساب شده است. هر ۱۲ ماه، مقادیر H تقریبا بهم نزدیک بودند. بنابراین چند H با مقادیر متفاوت انتخاب شدند.
* محاسبه هزینه های معاملاتی: $\alpha_1$، هزینه ثابت طبق عرف بازار سهام ۰/۰۵ در نظر گرفته می شود. این مقدار در فرمول $\beta_1 = \frac{\alpha_1}{\Delta x}$ (کولیو و چانگ ۲۰۱۳)، جایگزین شده و محاسبه می گردد.
* $\alpha_2$، یک هزینه متناسب با حجم معامله به صورت زیر است:

$\alpha_2 =$ میانگین [ ۰/۰۲ × حجم معامله شده در روز ] ÷ تعداد داده های واقعی

مقدار $\alpha_2$ در $\beta_2$ جایگزین شده و محاسبه می گردد.

* $\alpha_3$، یک هزینه متناسب با ارزش معامله بدین شکل محاسبه شده:

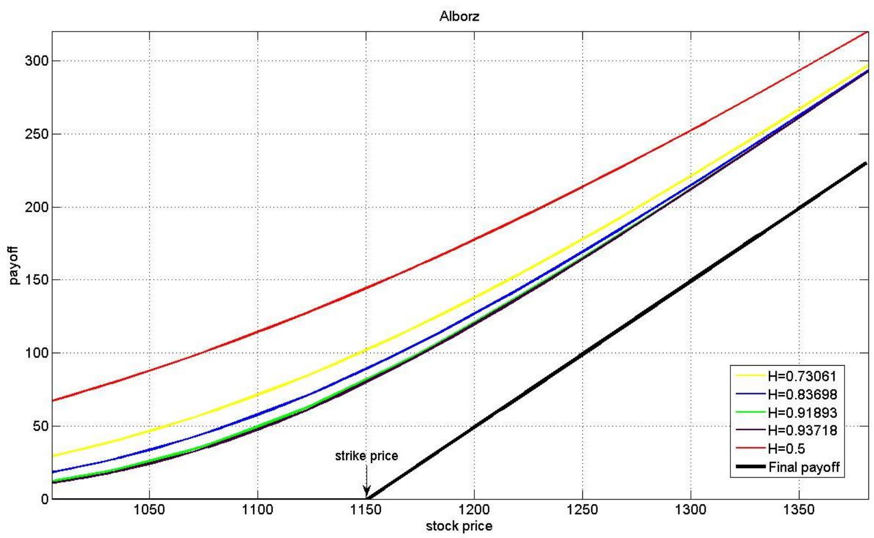
$\alpha_3 =$ میانگین [ ۰/۰۲ × ارزش معامله شده در روز ]÷ تعداد داده های واقعی

مقدار $\alpha_3$ در $\beta_3$ جایگزین شده و محاسبه می گردد.
این مدل روی سه سهام البرز، ایران ترانسفو و پارس سوئیچ پیاده سازی و در جدول ذیل مشخص شده است:

**جدول ۴-۱- اسامی سهام های بورس تهران**

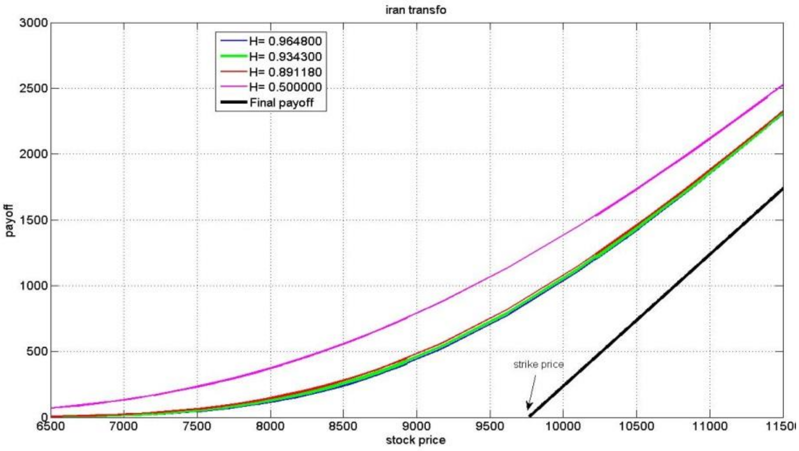
| داده های واقعی از تاریخ ۱۳۹۳/۱۲/۱ تا ۱۳۹۴/۱۲/۱ |
|---|
| ۱- سهام البرز |
| ۲- ایران ترانسفو |
| ۳- پارس سوئیچ |

* در سهام البرز پارامتر H با مقادیر $H = 0.5$، 1، $H = 0.7361$، $H = 0.83698$، $H = 0.91893$، $H = 0.93718$، به ترتیب با افزایش توان هرست، قیمت اختیار رو به کاهش است.



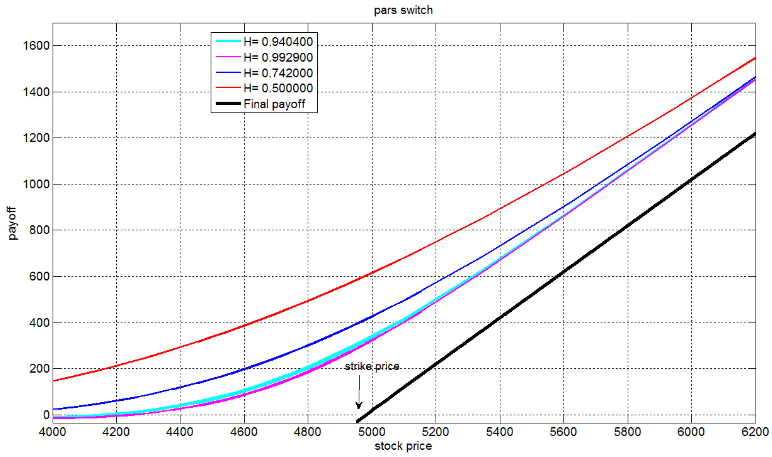

**نمودار ۴-۱- قیمت اختیار خرید با توان هرست متفاوت برای سهام البرز**

* در سهام ایران ترانسفو پارامتر H با مقادیر $H=0.5$ ، $H=0.89118$ ، $H=0.9343$ ، $H=0.9648$ به ترتیب با افزایش توان هرست، قیمت اختیار خرید بطور محسوسی پایین آمده است و تقریباً همگرایی مشاهده می شود.




نمودار ۴-۲- قیمت اختیار خرید با توان هرست متفاوت برای سهام ایران ترانسفو

* در سهام پارس سوئیچ پارامتر H با مقادیر $H=0.5$ ، $H=0.742$ ، $H=0.9404$ ، $H=0.9929$ به ترتیب با افزایش توان هرست، قیمت اختیار خرید نزدیک به قیمت اعمال کاهش یافته است ولی بعد از قیمت اعمال کاملاً نمودار روی همدیگر منطبق شده اند و همگرایی به وضوح آشکار است.




نمودار ۴-۳- قیمت اختیار خرید با توان هرست متفاوت برای سهام پارس سوئیچ

### ۴-۲- نتایج عددی

جواب تقریبی معادله (۲-۱۹) به محاسبات عددی در داده های واقعی نزدیک است. با استفاده از روش تکرار تغییرات (VIM) فرمول مناسبی برای ارزشگذاری اختیار معامله اروپایی تحت مدل بلک- شولز کسری با توان هرست بدست آمده است که بیانگر کارآمدی روش است. در این مدل توان هرست در بازه $(\frac{1}{2},1]$ بررسی می شود. یک مزیت دیگر VIM این است که اگر فقط هزینه ثابت، $\alpha_1 \neq 0$ و $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ باشد، باز هم جواب دقیق نزدیک به نتایج واقعی به دست می آید. این تحقیق نشان می دهد، شاخص قیمت و بازده نقدی بورس اوراق بهادار در تهران از اسفند ۹۳ تا اسفند ۹۴ دارای حافظه بلند مدت است.

## ۵- نتیجه گیری و بحث

### ۵-۱- نتایج تحقیق

۱) فرمول قیمت گذاری اختیار خرید تحت مدل بلک شولز کسری سبب می شود ،تا بـا افـزایش تـوان هرست قیمت اختیار خرید اروپایی کاهش یابد و دارنده برگ اختیار خرید در صورت اعمال نکـردن قرارداد ، ضرر کمتری کند.

۲) کاهش قیمت اختیار خرید اروپایی، بدین معنی است که اگر صـاحبان سـهام بخواهنـد خـود را در مقابل ریسک قیمتی، کمتر پوشش دهند ، نیاز به هزینه کمتری دارند .

### تحلیل کاهش اختیار خرید (مدل بلک- شولز کسری)

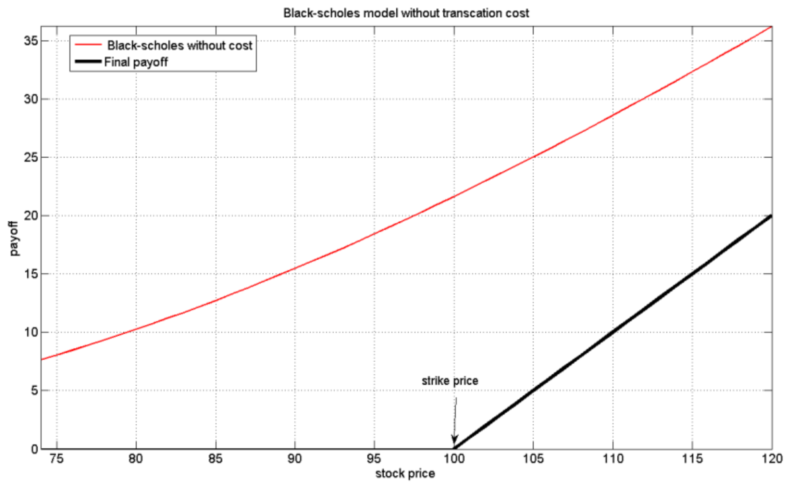
اما مدل مورد پژوهش، بیان می کند، که با افزایش توان هرست، قیمت اختیار خرید معامله اروپایی کاهش می یابد. هرچه قیمت اختیار واقعی تر باشد، مبلغی که بابت حق خرید اختیار می پردازیم کمتر خواهد بود. اگر قیمت توافق شده در برگه اوراق اختیار خرید، کاهش یابد، خریدار برگ اختیار خرید، قرارداد را اعمال نمی کند و تنها ضررش، هزینه ای است که بابت خریدن اوراق اختیار خرید پرداخته است. فرمول قیمت گذاری اختیار خرید اروپایی تحت مدل بلک- شولز کسری باعث می شود که با افزایش توان هرست، قیمت اوراق اختیار خرید پایین بیاید تا در شرایطی که دارنده تمایل به اجرای قرارداد اختیار خرید را نداشت، ضرر کمتری متحمل شود. در حقیقت حداقل قیمت اختیار، یک حالت تعدیل شده برای نوسان فرمول بلک- شولز کسری با استفاده از نوسان اصلاح شده می باشد تا جایگزین سیگما $(\sigma)$ گردد. فرمول $\sigma$ اصلاح شده در قیمت گذاری اختیار اروپایی تحت مدل بلک- شولز کسری در بخش (۲-۴) بیان شد [فرمول $\tilde{\sigma} = \sigma^2 (\Delta t)^{2H-1}$]. این نوسان اصلاح شده $(\tilde{\sigma})$ نشان می دهد که مقیاس بندی کسری $(\Delta t)$ تاثیر زیادی بر روی کاهش قیمت گذاری اختیار معامله دارد. قیمت حداقل یک اختیار معامله تحت هزینه های معاملاتی بدست آمده است که می تواند به عنوان قیمت واقعی یک اختیار معامله استفاده شود. از طرفی کاهش قیمت اختیار خرید اروپایی، بدین معنی است که اگر صاحبان سهام بخواهند خود را در مقابل ریسک قیمتی، کمتر پوشش دهند، نیاز به هزینه کمتری دارند.

## مقایسه مدل بلک- شولز و مدل بلک- شولز کسری

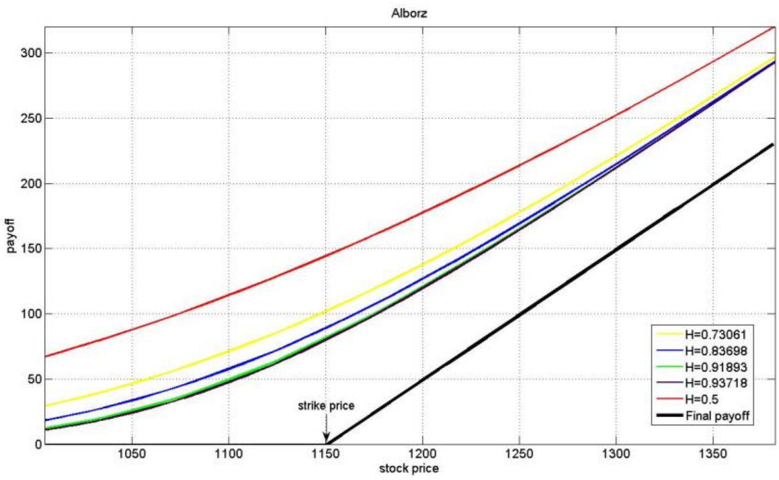
در این تحقیق نتیجه می گیریم که مدل بلک- شولز بسیار غیر واقعی عمل کرده است زیرا فاقد هزینه ی معاملاتی، نرخ بهره ثابت و نوسان ثابت در تمام طول دوره است و با این نقاط ضعف نمی تواند قیمت واقعی قیمت گذاری اختیار خرید اروپایی را مشخص کند. اما با جایگزین شدن حرکت براونی کسری به جای حرکت براونی در مدل بلک شولز و تبدیل شدن آن به مدل بلک- شولز کسری قیمت گذاری اختیار خرید با هزینه های معاملاتی به قیمت واقعی تر، نزدیک می شود. افزایش توان هرست نقش بسیار مهمی در پایین آمدن قیمت اختیار خرید دارد. کاهش قیمت اختیار خرید سبب می شود وقتی قیمت سهام پایین آمد، خریدار اختیار خرید ضرر کمتری بدهد. وجود توان هرست در مدل بلک- شولز کسری فرمول قیمت گذاری اختیار خرید اروپایی را به قیمت های واقعی نزدیکتر کرده است. مهمتر اینکه این مدل را توانستیم روی داده های واقعی بازار بورس تهران انجام دهیم و به نتیجه واقعی برسیم و قیمت اختیار با افزایش توان هرست کاهش یافت و فرمول قیمت گذاری اختیار تحت مدل بلک- شولز کسری در مورد اختیار خرید اروپایی بصورت فرم بسته[۷۹] (رابطه مشخص) عمل می کند زیرا اختیارات اروپایی فقط در تاریخ سررسید قابل اجرا هستند.

نمودار (۵-۱) قیمت اختیار خرید اروپایی تحت مدل بلک – شولز بدون هزینه معاملاتی را ، نشان می دهد که قیمت اختیار خرید به حداکثر رسیده است.

نمودار (۵-۲) قیمت اختیار خرید اروپایی را تحت مدل بلک – شولز کسری نشان می دهد ، که با پارامترهای هزینه و با افزایش توان هرست قیمت اختیار خرید رو به کاهش است .




**نمودار ۵-۱- قیمت اختیار خرید اروپایی با مدل بلک - شولز بدون هزینه**




نمودار ۵-۲- قیمت اختیار خرید با توان هرست متفاوت برای سهام البرز

## فهرست منابع


* Bachelier, L. (1990). Théorie de La Spéculation, Annales Scientifiques de L'E'cole Normale supérieure, 21-36.
* Bachelier, L., (1900). Théorie de La Spéculation: Gauthier-Villars, paris.
* Barles, G., and Soner, H. M., (1998). Option pricing with transaction costs and a nonlinear Black-Scholes equation, Finance stock. vol 2,369-397.
* Bjork, T., and Hult, H., (2005). A note on wick products and the fractional Black-Scholes model, Finance and Stochastics, 197-209.
* Black, F., Scholes, M., (1973). The pricing of option and corporate Liabilities, J., polit. Econ. vol 81,637-654.
* Campbell,J.,(1999). Financial Engineering, The Economics of Financial Markets.
* Cheridito, P., (2003). Arbitrage in fractional Brownian motion models, Finance stock. vol 7,533-553.
* Courtault, J.M., et al.,(2000). Bachelier, L., on the Centenary of Théorie de La Spéculation,
* Delbaen,F., Schachermayer, W., (1994). A general version of the fundamental theorem of asset pricing, Math. Ann. 300,463-520.
* Finnerty,J.,(1988). Financial Engineering in corporate Finance, An overview of financial Management.
* Greene,M., Fielitz,B.,(1997). Long term dependence in Common Stock returns, Journal of Financial Economics.
* Guasoni,P.,(2006). No arbitrage under transaction costs with fractional Brownian motion and byond, Math Finance, vol.16, No.3.569-582.
* He, J.-H,(1999). Variational iteration method: a kind of nonlinear analytical techniques: Some examples, Int.J. Nonlinear Meck. vol 34,699-708.
* Hoggard,T.,et al,(1994). Hedeging option portfolio in the presence of transaction costs: Adv. Futures Opt. Res vol 7,21-35.

* * Hull,J.C.,(2002), Fundamentals of futures and options Markets, Edit4, University of Toronto
* Hull,J.C.,(2009). Fundamentals of Futures and options Markets. 7th Edition, prentice-Hall International Inc, 1-417.
* Hurst,H.E.,(1951). Long-term storage capacity in reservoirs. Trans.Amer.Soc.Civil Eng. vol 116,400-410.
* Inokuti ,M., et al. (1978), General use of the Lagrange multiplier in non-linear mathematical physics, in: S. Nemat-Nasser (Ed), Variational Method in the Mechanics of Solids, Pergamon Press, Oxford, pp.156-162.
* Ishimura,N.,(2010). On the nonlinear partial differential equation of Black-Scholes type with the effects of transaction costs, working paper,Issn: 13872834.
* Itô,k.(,1951). Multiple Wiener integral,J. Math society of Japan vol 3,157-169.
* Jumarie,G.,(2010). Derivation and Solutions of some fractional Black-Scholes equations in coarse,grained space and time. Application to Merton's optimal portfolio,Comput. Math.Appl. vol 59.1142-1164.
* kolmogorov,A.N.,(1931). On Analytic Methods in probability Theory, in Shiryaev,A.N.,ed.,Selected works of kolmogorov,A.N; volumeII: probability Theory and Mathematical Statistics, kluwer, Dordrecht, 62-108.
* Kolmogorov,A.N.,(1940). Wienersche spiralen and einige andere interessante kurven in the Hilbertschen Raum, Comptes Rendus (Doklady), vol 26, 115-118.
* Kuliu, H., Chang,J.,Ja.,(2013). A closed form approximation for the fractional Black-Scholes model with transaction costs, computers and mathematics with application vol 65, 1719-1726.
* Leland, H.E.,(1985). Option pricing and replication with transaction costs, J.Finance vol 40,1283-1301.
* Liang,J.R., Wang,W.J.and et al,(2010). Option pricing of a bi-fractional Black-Merton-Scholes model with the Hurst exponent H in (1/2,1), Applied Mathematics letters vol 23,859-863.
* Mandelbrot,B.B.,(1971). When can price be arbitraged efficiently? A limit to the validity of the random walk, Page 542-43.
* * Mandel brot.B.B.and Van Ness,J.W.,(1968). Fractional Brownian motion, frational noises and applications, SIAM Rev.,vol 10,422-437.
* Mandel brot.B.B.,(2004). The (Mis) Behavior of markets,p.187.
* Pais,A.,(1982). 'Subtle is the Lord…',The Science and life of Albert Einstein, Oxford University press.
* Peters,E.,(1994). Fractal Market Analysis Applying chaos Theory to Investment and Economic, by John Wiley and Sons,Inc.
* Qian,B.,Rasheed,K.,(2004). Hurst exponent Financial Market predictability, Iasted conference on Financial Engineering and Applications EFA,p.p.203-209. Cite Seerx:10.1.1.137.207.
* Recchioni,Ch.Ma.,(2008). Numerical Methods and Calibration to index option Prof. thesis, university politecnica Delle Marche.
* Rogers,L.C.G.,(1997). Arbitrage with fractional Brownian motion,Math.Finance, vol 7,95-105.
* Salopek,D.M.,(1998). Tolerance to arbitrage, Stochastic process, Appl. vol 76,217-230.
* Scheuing,E.E., Johnson,E.M.,(1989). A proposed for New Services Marketing. Spring,pp:25-34.
* Schoutnes,W.,(2003). Levy processes in Finance: pricing Financial Derivatives, John Wiley and sons Ltd.

* Shiryaev,A.N.,(1998). On arbitrage and replication for fractal models, Research Report 20, Maphysto, Department of Mathematical Sciences, University of Arhus, Denmark.
* Thiele,T.N.,(1880). Sur La compensation de quelques erreurs quasisystématiques par La method des moindres carrés, Reitzel, Copenhangen.
* Wang,X.-T.,et al,(2012). Pricing European option with transaction costs under the fractional Long memory stochastic volatility model, physica A 391,1469-1480.
* Wang,X.-T.(2010). Scaling and Long-range dependence in option pricing I: pricing European option with transaction costs under the fractional Black-Scho model,physica A 389,438-444.
* Wang,X.-T.,(2010), Scaling Long-range dependence in option pricing III: A fractional version of the Merton model with transaction costs, physica A389,452-458.
* Xiao,W.L.,et al,(2010). Pricing currency options in a fractional Brownian motion with Jumps,Economic Modelling vol 27,935-942.
* Yajima,Y.,(1985). On estimation of long memory time Series models. Australian, Newzland Journal of statistics, 303-320