مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار
شماره نوزدهم / تابستان ۱۳۹۳

ارائه مدلی بر مبنای میانگین– آنتروپی– چولگی برای بهینه‌سازی سبد سهام در محیط فازی

عادل بهزادی[۱]
مصطفی بختیاری[۲]

تاریخ دریافت: ۹۲/۹/۱۸ تاریخ پذیرش: ۹۳/۲/۲۵

چکیده

بازده اوراق بهادار در دنیای واقعی معمولا مبهم و نادقیق است. محققان رویکردهای گوناگونی را برای مدل کردن بازده بکار گرفته‌اند. یکی از رویکردهای بکار گرفته شده در این زمینه، استفاده از منطق فازی می‌باشد. در این میان، مطالعات زیادی در زمینه معرفی معیار ریسک در جهت بهینه‌سازی پرتفوی فازی صورت گرفته است. یکی از معیارهای جدید در این زمینه آنتروپی است که بر خلاف واریانس، وابسته به تقارن توزیع بازده دارایی‌ها نیست. در مقاله پیش‌رو مدلی بر مبنای میانگین- آنتروپی- چولگی برای حل مساله بهینه‌سازی پرتفوی ارائه شده است. از تئوری اعتبار برای محاسبه پارامترهای مورد نیاز استفاده شده است. برای مقایسه این مدل و مدل میانگین- واریانس از شاخص عملکرد اقتصادی استفاده شده است و در انتها با بکار بردن داده‌های بورس اوراق بهادار تهران نشان داده شده است، مدلی که بر مبنای میانگین- آنتروپی- چولگی دارای شاخص عملکرد اقتصادی بالاتری است.

واژه‌های کلیدی: بهینه‌سازی پرتفوی فازی، مدل میانگن – آنتروپی – چولگی، نظریه اعتبار، شاخص عملکرد اقتصادی.

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مالی دانشگاه تهران (مسئول مکاتبات) adel_behzadi@ut.ac.ir
۲- دانشجوی دکترای مدیریت مالی دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم تحقیقات Bakhtiari.msft@gmail.com

۱- مقدمه

توسعه‌ی سرمایه‌گذاری، از یک سو موجب جذب سرمایه‌های غیر کارا و هدایت آن‌ها به بخش های مولد اقتصادی می‌شود و از سوی دیگر با توجه به جهت‌گیری افراد به سرمایه‌گذاری در صنایعی هدایت خواهند شد که از سود بیشتر یا ریسک کمتری برخوردارند و در نهایت موجب تخصیص بهینه ی منابع خواهد شد.

در دنیای امروزی یکی از چالش‌های سرمایه‌گذاری در بازده دارایی‌ها، عدم‌اطمینان نسبت به وقایع آینده و پیامدهای آن‌ها می‌باشد. رویکرد سنتی در مدل کردن این عدم‌اطمینان، در نظر گرفتن بازده دارایی‌ها به صورت یک متغیر تصادفی است؛ اما این رویکرد از یک‌سو باعث تحمیل شدن فرضیات غیر واقعی در انتخاب پرتفوی بهینه می‌شود و از سوی دیگر مشکلات زیادی را در پیدا کردن توزیع احتمال و پارامترهای مربوطه در پی خواهد داشت.

به دلیل کارآیی منطق فازی برای لحاظ کردن نظرات کارشناسی و عدم اطمینان موجود در بازارهای مالی، استفاده از این منطق می‌تواند یکی از راه حل‌های مفید برای مدل کردن بازده دارایی‌ها در مسئله پرتفوی باشد. با توجه به این مسائل محققان به این نتیجه رسیدند که استفاده از منطق فازی، که بازده‌ها در آن به عنوان یک عدد فازی درنظر گرفته می‌شود می‌تواند مفید واقع شود[۱-۳].

بعد دیگر مساله انتخاب پرتفوی بهینه در نظر گرفتن معیارهای مختلف ریسک در مسئله پرتفوی است. انحراف معیار به عنوان اولین معیار ریسک بکار گرفته شده در این زمینه به‌وسیله مارکویتز معرفی گردید[۴]. اما این معیار دارای کاستی‌هایی بود که محققان را بر آن داشت تا با به‌کار بردن معیارهای مختلف، مدل‌های انتخاب سبد سهام را توسعه دهند[۵].

یکی از معیارهای ریسک مطرح‌شده در این زمینه، آنتروپی[۱] است که توسط محققان برای بیان مفهوم ریسک گرفته شده است[۶-۸]. از مزایای استفاده از آنتروپی، عدم وابستگی این معیار به تقارن تابع توزیع است به این معنی که برخلاف واریانس به دلیل عدم تقارن توزیع بازده دارایی، کارایی خود را ازدست نمی‌دهد. از طرفی برخی دیگر از محققان به این نتیجه رسیدند که سرمایه‌گذاران ترجیح می‌دهند که درجه بالاتری از چولگی را انتخاب کنند[۹].

در مقاله پیش‌رو سعی در نظر گرفتن مباحث مطرح شده در مدل کردن سبد سهام را دارد، به طور کلی روند انجام پژوهش به این صورت است که ابتدا پارامترهای عنوان شده از طریق نظریه اعتبار محاسبه و در مرحله بعد مدل ارائه شده و در انتها با استفاده از شاخص عملکرد اقتصادی دو مدل مقایسه شده است و برای مطالعه موردی از داده‌های بورس اوراق بهادار تهران استفاده شده است.

۲- مبانی نظری و مروری بر پیشینه پژوهش

۲-۱- پیشینه پژوهش

مارکویتز مدل پرتفوی بهینه خود را مبتنی بر واریانس به عنوان شاخص ریسک ارائه داد[۴]. بعد از این مدل، محققان مدل‌های انتخاب سبد سهام را با استفاده از معیارهای ریسک مختلف توسعه دادند. از جمله مارکویتز در مقاله دیگری نیمه‌واریانس را برای معیار ریسک بکار گرفت[۵]. کونو و یامازاکی قدر مطلق انحراف از میانگین را به عنوان معیار ریسک درنظر گرفتند و مدل میانگین- قدرمطلق انحراف از میانگین خود را ادائه دادند [۱۰]. جوریون مدل میانگین- ارزش در معرض خطر[۲] خود را در حوزه خدمات مالی ارائه کرد [۱۱] و روکافلر و یوراسر ریسک سرمایه-گذاری را برای بازده از پیش تعیین‌شده ارائه کردند و مدل میانگین- ارزش در معرض خطر شرطی[۳] را ارائه کردند[۱۲].

در مقالات ذکر شده بازده دارایی‌ها به عنوان متغیر تصادفی در نظر گرفته شده است. اما در واقع مقدار بازده دارایی‌ها مبهم است. این ابهام می‌تواند ناشی از اطلاعات کیفی، ناقص و غیرقابل دسترس باشد. به همین جهت برای مدل کردن این ابهام از منطق فازی و تئوری امکان که توسط لطفی‌زاده ارائه گردید استفاده می‌شود[۱۳, ۱۴]. مجموعه‌های فازی و نظریه امکان از جمله ابزارهای مفید برای مدل کردن ابهام و عدم‌قطعیت داده‌ها می‌باشند که دارای قدرت بالا و پیچیدگی پایین برای حل مسائل سرمایه‌گذاری هستند[۱۵-۱۷]. با ارائه این رویکرد محققان زیادی بهینه‌سازی پرتفوی را در محیط فازی مورد مطالعه قرار دادند که در ادامه به تعدادی از این تحقیقات اشاره شده است.

تاناکا و جیو از نظریه امکان برای مدل کردن عدم اطمینان بازده دارایی‌ها و شناسایی کمترین مقدار و بالاترین مقدار یک متغیر فازی با تابع توزیع امکان معلوم استفاده کردند[۱].

اینیگوچی و رامیک نحوه برنامه‌ریزی خطی ریاضی با رویکرد فازی را ارائه دادند مزایا و معایب این رویکرد را با ارائه کاربرد در مساله انتخاب پرتفوی مطرح کردند[۱۸].

آرناس و همکاران مدلی در قالب برنامه‌ریزی آرمانی را با توجه به سه معیار بازده، ریسک و نقد شوندگی برای سرمایه‌گذاران خرد ارائه دادند. در مدل ارائه شده توسط آنها محدودیت‌ها نیز فازی درنظر گرفته شد و در مرحله بعد با استفاده از الگوریتم ژنتیک این مساله حل شد[۲].

هوانگ در مقاله دیگری به جای واریانس از آنتروپی[۴] به عنوان معیار ریسک- که نسبت به تقارن تابع درجه اطمینان بی‌تفاوت است- در مسئله پرتفوی فازی استفاده کرد و در آخر آن را بوسیله الگوریتم ترکیبی هوشمند آن را حل کرد[۷].

باتاچاریا و همکاران با استفاده از اندازه اعتبار مدل خود را مبتنی بر میانگین، آنتروپی و چولگی ارائه دادند و بازده دارایی‌ها را عدد فازی مثلثی در نظر گرفتند و در انتها بوسیله شبیه‌سازی فازی و الگوریتم ژنتیک مسئله را حل کردند[۱۹].

ژانگ و همکاران مسئله تعدیل پرتفوی برای پرتفوی موجود را مورد بحث قرار دادند که در آن بازده دارایی‌ها متغیر فازی و مدل به صورت میانگین بازده با درنظر گرفتن هزینه تراکنش بر اساس اندازه امکان ارائه گردید[۱۹].

لی و همکاران به دلیل عدم تقارن و غیرنرمال بودن توزیع بازده دارایی‌ها، علاوه بر میانگین و واریانس، چولگی را نیز در نظر گرفتند و مسئله را با درنظر گرفتن بازده به عنوان یک عدد فازی مثلثی مدل کردند و با استفاده از الگوریتم ژنتیک و شبیه‌سازی فازی مدل خود را حل کردند[۲۰].

دستخان و همکاران سعی کردند مدل بهینه‌سازی پرتفوی را به واقعیت نزدیک کنند. به همین دلیل آنها ترجیحات سرمایه‌گذاران را که از طریق متغیرهای زبانی[۵] بیان می‌شود و هزینه‌های تراکنش را در مدل خود لحاظ کردند. در این مدل معیار ریسک را قدرمطلق انحراف از میانگین در نظر گرفته شد و در انتها مدل ارائه شده را بوسیله الگوریتم ژنتیک حل کردند[۲۱].

کوین و همکاران اندازه اعتبار قدرمطلق انحراف از میانگین را به عنوان معیار ریسک بکار بردند و مدل میانگین- قدرمطلق انحراف از میانگین را ارائه دادند و بوسیله الگوریتم ترکیبی مبتنی بر شبیه‌سازی فازی و الگوریتم ژنتیک مدل را حل کردند[۲۲].

هوانگ دو مدل بیشینه کمینه[۶] بازدهی و کمینه بیشینه[۷] واریانس را با استفاده از اندازه اعتبار ارائه داد که در یک مدل با درنظر گرفتن بیشینه مقدار واریانس در محدودیت، بازدهی در بدنرین شرایط بیشینه و در مدل دیگر با در نظر گرفتن حداقل بازدهی در محدودیت واریانس در بدترین شرایط مینیمم می‌شود و در انتها مدل ارائه شده را بوسیله الگوریتم ژنتیک حل کردند[۲۳].

گوبتا و همکاران با استفاده از اندازه اعتبار و در نظر گرفتن بازد کوتاه‌مدت، بازده بلندمدت، نیمه‌واریانس و نقدینگی در تابع هدف مسئله پرتفوی بهینه را مدل کردند و برای حل این مدل از برنامه‌ریزی آرمانی و ترکیبی از شبیه‌سازی فازی و الگوریتم ژنتیک استفاده کردند[۲۴].

شمس و دستخوان، مدل تعیین سبد بهینه ی سهام با سه هدف بازده کلی، ریسک سبد و نقد شوندگی سبد مورد مطالعه قرار دادند و کارایی مدل را با استفاده از داده‌های بورس اوراق بهادار تهران نشان دادند[۲۵].

یحیی‌زاده و همکاران با استفاده از عدد فازی تصادفی مدل انتخاب سبد سهان را ارائه دادند. در این مدل‌ها خوشبینی و بدبینی سرمایه‌گذار و نظر خبرگان در نظر گرفته شد و در انتها به این

نتیجه رسیدند که در حالت خوشبینی کامل، مرز کارای بدست آمده بالاتر از مرز کارای مدل مارکویتز است ولی در حالت بدبینی کامل مرز کارا پایین‌تر از مرز کاراب مدل مارکویتز است[۲۶].

صباغیان طوسی و مسعودی‌مقدم در شرایط فازی مدلی بر مبنای میاگین-واریانس – چولگی ارائه دادند و به منظور حل مدل از الگوریتم شبیه‌سازی فازی استفاده کردند[۲۷].

همتی و همکاران با استفاده از برنامه‌ریزی خطی فازی مسئله تنظیم مجدد پرتفوی را با در نظر گرفتن سه هدف حداکثر کردن سود، حداکثر کردن نقدشوندگی و حداقل کردن ریسک حل کردند[۲۸].

۲-۲- مروری بر مبانی نظری

تئوری فازی توسط پرفسور لطفی زاده در سال ۱۹۶۵ در مقاله ای بنام مجموعه های فازی معرفی گردید. یکی از مهمترین بخش‌های نظریه فازی که برای مواجهه شدن با اکثر پدیده های جهان واقع که در آنها عدم قطعیت وجود دارد مورد استفاده قرار می گیرد، تئوری امکان[۸] می‌باشد[۲۹]. این نظریه تا حدودی مشابه نظریه احتمال می باشد، با این تفاوت که در تئوری احتمال وقوع یک پیشامد بر اساس تعداد وقوع آن درگذشته می‌باشد درحالی‌که در نظریه امکان، امکان وقوع یک حادثه علاوه بر مطالعات آماری درباره آن، به امکان وقوع آن واقعه از لحاظ منطقی نیز وابسته می باشد. با اینکه میزان امکان یک رویداد فازی، بسیار مهم و پرکاربرد است اما به هر حال این فاکتور فاقد خاصیت خود -دوگانگی[۹] است.

عدم داشتن این خاصیت منجر به این خواهد شد که حداکثر امکان یک رویداد فازی(یعنی یک) نتواند وقوع قطعی این رویداد را تضمین نماید و در نتیجه نمی‌توان به این مقدار اعتماد نمود. در سال۲۰۰۲، لیو و لیو تئوری اعتبار را به عنوان یک گزینه رقیب برای امکان مجموعه فازی، ارائه کردند[۳۰]. امتیاز این معیار داشتن خاصیت خود-دوگانگی است. لذا نظریه اعتبار پس از ارائه براساس مفاهیم پایه ای مطرح شده به سرعت گسترش یافت[۳۱]. توجه شود که در این مقاله هرگاه نامی از اعتبار یک رویداد فازی برده شد، منظور میزان شانس وقوع یک رویداد فازی است.

برای فهم هر چه بیشتر مطالب مطرح شده در این مقاله، در ادامه مروری اجمالی بر دانستنی‌های مورد نیاز مرتبط با متغیر های فازی و تئوری اعتبار خواهد شد.

تعریف۱: فرض کنید ξ یک متغیر فازی با تابع عضویت μ، و u و r اعداد حقیقی باشند، میزان امکان یک رویداد فازی با مشخصه $\xi \geq r$ برابر است با:

$$pos\{\xi \geq r\} = \sup \mu(u)\ ,\quad u \geq r \qquad (۱)$$

تعریف ۲: فرض کنید ξ یک متغیر فازی با تابع عضویت μ، و u و r اعداد حقیقی باشند، میزان الزام[۱۰] یک رویداد فازی با مشخصه $\xi \geq r$ برابر است با:

$$Nec\{\xi \geq r\} = 1 - \mathrm{pos}\{\xi < r\} = 1 - sup_{u<r}\mu(u)\ ,\quad u \geq r \qquad (۲)$$

تعریف ۳: فرض کنید ξ یک متغیر فازی با تابع عضویت μ، و u و r اعداد حقیقی باشند، میزان اعتبار یک رویداد فازی با مشخصه $\xi \geq r$ برابر است با میانگین حسابی مقدار امکان و الزام آن رویداد فازی. یعنی:

$$cr\{\xi \geq r\} = \frac{1}{2}(Pos\{\xi \geq r\} + \mathrm{Nec}\{\xi \geq r\}) \qquad (۳)$$

محاسبه پارامترهای مورد نیاز

در این بخش نحوه محاسبه پارامترهایی که در مدل مورد استفاده قرار می‌گیرد توضیح داده شده است. برای این کار در جدول ۱ تعاریف پارامترهای موردنیاز با استفاده از نظریه اعتبار ارائه شده است. در این جدول ξ یک متغیر فازی مثلثی درنظر گرفته شده است و امیدریاضی، واریانس، نیمه‌واریانس، کشیدگی، چولگی، کشیدگی و نیمه‌انحراف قدرمطلق انحراف از میانگبن ارائه شده است.

جدول ۱-تعاریف پارامترها برای متغیر فازی ξ

پارامتر	پژوهش	تعریف
امید ریاضی	[۳۰]	$E[\xi] = \int_0^{+\infty} Cr\{\xi \geq r\}dr - \int_{-\infty}^{0} Cr\{\xi \leq r\}dr$
نیمه‌واریانس	[۱۰]	$SV[\xi] = E[((\xi - E(\xi))^-)^2] = \int_0^{+\infty} Cr\{[(\xi - E[\xi])^-]^2\} \geq r\}dr$ $(\xi - E(\xi))^- = \begin{cases} \xi - E(\xi) & \xi \leq E(\xi) \\ 0 & \xi > E(\xi) \end{cases}$
واریانس	[۳۰]	$V[\xi] = \int_0^{+\infty} Cr\{(\xi - E[\xi])^2\} \geq r\}dr$
چولگی	[۲۱]	$Sk[\xi] = \int_0^{+\infty} Cr\{(\xi - E[\xi])^3\} \geq r\}dr$
کشیدگی	[۳۲]	$K[\xi] = \int_0^{+\infty} Cr\{(\xi - E[\xi])^4\} \geq r\}dr$
آنتروپی	[۲۱]	$H[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} T(Cr\{\xi = r\})dr$ $T(t) = -t.ln(t) - (1-t).ln(1-t)$

در این مقاله چون از عدد فازی مثلثی استفاده می‌شود بنابراین باید پارامترهای موردنظر برای عدد فازی مثلثی محاسبه شود. به این منظور در جدول محاسبات لازم برای عدد فازی مثلثی با پارامترهای (a,b,c) با میانگین e ارائه شده است.

جدول ۲- محاسبات مربوط به عدد فازی مثلثی با پارامترهای (a,b,c) با میانگین e

مقدار	پژوهش	پارامتر
$E[\xi]=(a+2b+c)/4$	[۳۰]	امید ریاضی
$SV[\xi]=\frac{1}{6(b-a)}[(\frac{e-a}{4})^3)+\frac{1}{(b-c)}\left(\frac{b-e}{4}\right)^3\min(0,(b-e))]$	[۳۲]	نیمه‌واریانس
$V[\xi]=\frac{33\alpha^3+21\alpha^2\gamma+11\alpha\gamma^2-\gamma^3}{384\alpha}$ $\alpha=max\{b-a,c-b\},\gamma=min\{b-a,c-b\}$	[۳۰]	واریانس
$Sk(\xi)=\frac{(c-a)^2}{32}[(c-b)-(b-a)]$	[۳۳]	چولگی
$K[\xi]=\frac{253\alpha^5+395\alpha^4\gamma+17\alpha\gamma^4+290\alpha^3\gamma^2+70\alpha^3\gamma^3-\gamma^5}{10.240\alpha}$ $\alpha=max\{b-a,c-b\},\gamma=min\{b-a,c-b\}$	[۳۲]	کشیدگی
$H[\xi]=\frac{c-a}{2}$	[۲۱]	آنتروپی

۳- مدل پژوهش و نحوه آزمون آن

۳-۱- محاسبات پارامترهای برای پرتفوی در مدل

حال اگر ξ_i متغیر فازی نشان‌دهنده بازده دارایی i ام باشد آنگاه بازده پرتفوی برای n سهم با بردار وزنی $x_1,x_2,x_3,\dots,x_n$ پرتفوی موردنظر بر اساس اصل گسترش لطفی‌زاده عبارت $\xi=\sum_{j=1}^{n}x_j\xi_j$، نیز یک متغیر فازی است. پس برای بدست آوردن امید ریاضی، چولگی و آنتروپی، مشابه با یک متغیر فازی برخورد می‌کنیم. حال اگر فرض کنید اگر $\xi_j=(a_j,b_j,c_j)$ متغیر فازی مثلثی باشد. آنگاه پرتفوی مورد نظر یعنی $\xi=\sum_{j=1}^{n}x_j\xi_j$، متغیر فازی مثلثی با پارامترهای $(\sum_{j=1}^{n}x_ja_j,\sum_{j=1}^{n}x_jb_j,\sum_{j=1}^{n}x_jc_j)$ می‌باشد.

۳-۲- فرموله کردن مدل

ارائه مدل

جهت ارائه مدلی برای انتخاب پرتفوی، با درنظر گرفتن ξ_i به عنوان عدد فازی برای بازده هر یک از سهام و x_i متغیر تصمیم مرتبط با وزن (نسبت سرمایه‌گذاری) هر یک از سهام پرتفوی در نظر گرفته و عموما بازده (ξ_i) هر سهم به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\xi_i = \frac{P_i' + d_i - P_i}{p_i} \qquad (۴)$$

p_i، P_i' و d_i به ترتیب برابر با قیمت سهم i در زمان حال، قیمت تخمینی در طول دوره موردنظر هستند. از آنجایی که P_i' و d_i در زمان حال برای سرمایه‌گذار نامشخص هستند، اگر آنها به صورت متغیرهای فازی تخمین زده شوند، ξ_i نیز یک متغیر فازی است. بنابراین بازده یک پرتفلیو با n سهم با بردار وزنی $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ یعنی $\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i$، نیز یک متغیر فازی است.
بدلیل اینکه در مرحله بعد نیاز به مقایسه پرتفوهای تشکیل شده از این مدل‌ها با مدل میانگین واریانس هسستیم بنابراین ابتدا مدل میانگین-واریانس مربوط به این سهام ارائه می‌شود.

مدل(۱)

$$\boldsymbol{min\ var}\left[\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x_i \xi_i}\right] \qquad (۵)$$

St:

$$\boldsymbol{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x_i \xi_i}\right] \geq \boldsymbol{\alpha} \qquad (۶)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x_i = 1, x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n} \qquad (۷)$$

در مدل(۱)، رابطه (۵) نشان‌دهنده تابع هدف مربوط به کمینه‌کردن واریانس است. رابطه (۶) نشان‌دهنده حداقل مقدار بازده مورد انتظار سرمایه‌گذار است و رابطه (۷) نشان‌دهنده عدم وجود فروش استقراضی است.

حال اگر بخواهیم مدلی پیشنهاد دهیم که معیار ریسک به تقارن بازده دارایی‌ها وابسته نباشد و مقدار حداقل چولگی در مدل در نظر گذفته شده باشد، مدل پیشنهادی زیر مطرح می‌گردد:

مدل(۲)

$$\mathbf{min}\ \boldsymbol{H}\left[\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x_i \xi_i}\right] \qquad (۸)$$

St:

$$\boldsymbol{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x_i \xi_i}\right] \geq \boldsymbol{\alpha} \qquad (۹)$$

$$\boldsymbol{S}\left[\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x_i \xi_i}\right] \geq \boldsymbol{\beta} \qquad (۱۰)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x_i = 1, x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n} \qquad (۱۱)$$

در مدل (۲)، رابطه (۸)، تابع هدف مدل یعنی کمینه‌سازی آنتروپی را به عنوان معیار ریسک نشان می‌دهد. رابطه (۹) نشان‌دهنده محدودیت حداقل بازده قابل قبول سرمایه‌گذار(α) است. در محدودیت (۱۰) حداقل مقدار قابل قبول چولگی (β) نشان داده شده است و رابطه (۱۱) عدم وجود فروش استقراضی را نشان می‌دهد.

تبدیل مدل فازی به قطعی

برای حل مدل‌های ارائه شده، باید مدل‌های ارائه شده از حالت فازی به حالت قطعی تبدیل شده و سپس حل شوند. به منظور تبدیل این مدل‌ها از مطالب عنوان شده در بخش ۳-۱استفاده شده و پارامترهای فازی به پارامترهای قطعی تبدیل می‌شوند. پس مدل (۲) به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$\begin{aligned}
&\min\ \left[\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{33+21\alpha_i^2\gamma_i+11\alpha_i\gamma_i^2-\gamma_i^3}{38\ \cdot\alpha_i}\right], \alpha_i = max\{b_i-a_i, c_i-b_i\}, \gamma_i = min\{b_i-a_i, c_i-b_i\}\\
&\text{st:}\\
&\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{a_i+2b_i+c_i}{4} \geq \alpha\\
&\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x_i \geq 0 \quad i = 1,2,\dots,n
\end{aligned}$$

مدل(۳)

و مدل(۲) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\min \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{c_i-a_i}{2}\\
&\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{a_i+2b_i+c_i}{4} \geq \alpha\\
&\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{(c_i-a_i)^2(c_i-2b_i+a_i)}{32} \geq \beta\\
&\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x_i \geq 0 \quad i = 1,2,\dots,n
\end{aligned}$$

مدل(۴)

۳-۳- نحوه آزمون مدل‌ها

برای مقایسه دو مدل از لحاظ کارایی به معیار عملکرد متفاوتی نسبت به شاخص شارپ نیازمندیم زیرا معیارهای ریسک متفاوت هستند و این معیار باید بتواند کاستی‌های شاخص شارپ را برطرف کند. یکی از رویکردهای مورد استفاده برای بدست آوردن معیار عملکرد پرتفوی، استفاده از معیار ریسک عمومی‌تری نسبت به واریانس هستیم یعنی بنابه معادله زیر داریم:

$$ppm = \frac{r-r_f}{risk} \qquad (12)$$

r_f مقدار بازدهی بدون ریسک می‌باشد. در اینجا به برای $risk$ باید معیار کاراتری نسبت به واریانس در نظر گرفته شود. در این مقاله از معیار ریسک آموان-سارامون (AS) استفاده شده است[۳۵]. این شاخص را معیار عملکرد اقتصادی می‌نامیم که به صوورت زیر تعریف می‌شود:

$$ppm = \frac{E(r) - r_f}{AS(r - r_f)} \qquad (۱۳)$$

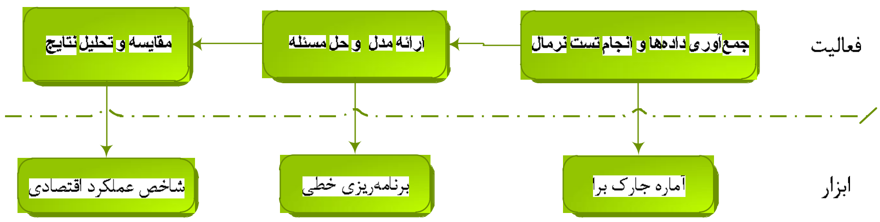
حال اگر بخواهیم برحسب گشتاورهای نوزیع ابن مقدار را بدست آوریم. شاخص عملکرد اقتصادی EPM شاخص عملکرد اقتصادی به صورت زیر بدست می‌آید[۳۶]:

$$EPM^{NIG}(\mu, \sigma^2, \chi, \kappa) = \frac{18\mu}{(3\kappa\mu - 4\mu\chi^2 - 6\chi\sigma + 9\sigma^2/\mu)} \qquad (۱۴)$$

که: μ, σ^2, χ و κ به ترتیب میانگین، واریانس، چولگی و کشیدگی بازده اضافی دارایی‌ها $(r - r_f)$ است که نحوه بدست آوردن هر یک از این پارامترها در بخش‌های قبل ارائه شده است.

۴- یافته‌های پژوهش(مطالعه موردی)

در این بخش قصد داریم مدل‌های ارائه شده در بخش قبل را بر روی داده‌های بورس اوراق بهادار تهران اجرا کنیم. در چارچوب انجام این کار توضیح داده شده است.



شکل ۱- چارچوب انجام پژوهش

۴-۱- جمع‌آوری داده‌ها و انجام آزمون نرمال

در این مقاله سعی شده است که از داده‌های پنجاه سهم برتر در بورس استفاده شود. بازه زمانی به صورت ماهانه از شهریورماه ۱۳۸۸ تا شهریورماه ۱۳۹۲ به صورت بازدهی ماهانه بکار گرفته شده است. به علت عدم وجود کامل داده‌های همه این شرکت‌ها در این بازه زمانی در انتها ۴۳ شرکت انتخاب شد.

در این پژوهش از عدد فازی مثلثی برای تخمین بازده دارایی‌ها استفاده شده است. همانطور که می‌دانیم عدد فازی مثلثی دارای سه پارامتر (a,b,c) است که برای برآورد این پارامترها از مینیمم، میانه و ماکزیمم این بازده در طول این دوره زمانی استفاده شده است. در جدول۳ فهرست شرکت-ها و بازده‌های فازی متناسب با هرکدام از شرکت‌ها ارائه شده است.

جدول۳- شرکت‌های مورد بررسی و مقادیر بازده به صورت عدد فازی مثلثی

ردیف	نماد	بازده فازی	ردیف	نماد	بازده فازی
1	اخابر	(0,.015,.128)	23	کساوه	(-0.1,.035,0.17)
2	بتراس	(-0.1,-0.034,0.1)	24	کسرا	(-0.0,0.01,0.02)
3	ثشاهد	(-0.1,0.05,0.129)	25	کسعدی	(-0.1,.018,0.184)
4	ثمسکن	(-0.05,-0.002,0.1)	26	کفرا	(-0.1,.018,0.158)
5	ثنوسا	(-0.1,.032,0.157)	27	کهرام	(-0.2,.023,0.236)
6	حفاری	(-0.109,0.01,0.129)	28	وبشهر	(-0.1,.022,0.142)
7	خاذین	(-0.141,-0.014,0.112)	29	وبهمن	(-0.2,0.02,0.2)
8	خپارس	(-0.113,-0.005,0.104)	30	وپارس	(-0.1,0.01,0.111)
9	خساپا	(-0.117,0.007,0.131)	31	وپترو	(-0.1,.005,0.16)
10	خودرو	(-0.1,.004,0.17)	32	وتجارت	(-0.0,0.01,0.074)
11	دجابر	(-0.157,-0.014,0.129)	33	وتوشه	(-0.1,.018,0.129)
12	درازک	(-0.18,-0.006,0.167)	34	وتوصا	(-0.1,.014,0.131)
13	درانفور	(-0.2,.006,0.256)	35	وساخت	(-0.1,.014,0.14)
14	رتکو	(-0.194,-0.021,0.152)	36	وسپه	(-0.0,.009,0.088)
15	سدور	(-0.05,-0.013,0.12)	37	وسینا	(-0.1,.024,0.121)
16	سفارس	(-0.125,-0.001,0.124)	38	وصنعت	(-0.1,.018,0.119)
17	غاذر	(-0.1,.006,0.196)	39	وغدیر	(-0.1,.023,0.163)
18	فاذر	(-0.1,.015,0.181)	40	ولسپا	(-0.1,.006,0.148)
19	فاسمین	(-0.2,.001,0.225)	41	ولغدر	(-0.093,-0.008,0.125)
20	فباهنر	(-0.095,-0.007,0.081)	42	ونفت	(-.03,0,.075)
21	کپشیر	(-0.1,0.02,0.122)	43	ونوین	(-0.1,.012,0.129)
22	کچینی	(-0.1,.018,0.154)			

برای اینکه نشان دهیم توزیع داده‌ها نرمال و متقارن نیست از آزمون جارک برا[۱۱] استفاده شده است. آماره این آزمون به صورت زیر است[۳۴]:

$$JB = \frac{n}{6}\left(s^2 + \frac{(k-3)^2}{4}\right) \qquad (۱۵)$$

در این رابطه n تعداد نمونه، s چولگی و k کشیدگی داده‌ها را نشان می‌دهد. توجه داشته باشید که این آماره از توزیع مربع کای با دو درجه آزادی پیروی می‌کند. نتایج آزمون برای شرکت‌های موردنظر در جدول ۴ ارائه شده است.

جدول ۴- شرکت‌های مورد بررسی و بررسی نرمال بودن با استفاده از آماره جارک برا

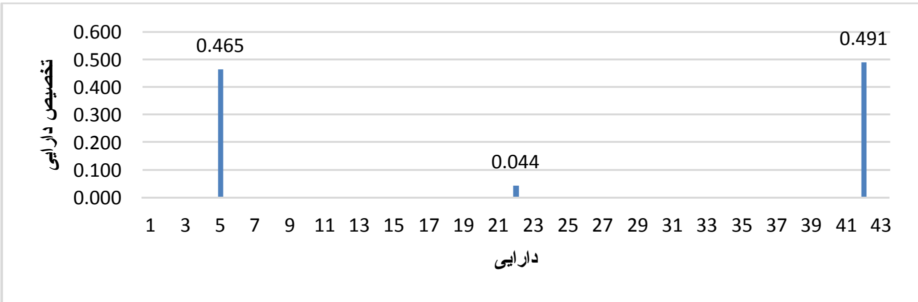
ردیف	شرکت	مقدار بحرانی	Pval	فرض مورد قبول	ردیف	شرکت	مقدار بحرانی	Pval	فرض مورد قبول
۱	اخابر	۸,۴۳۳۲۹۳۶۷۴	۰,۰۲۰۵۰۴	۱	۲۳	کساوه	۰,۰۹۹۵۴۲۱۷۲	۰,۵	۰
۲	بتراس	۶۶۷,۵۷۵۵۰۶۴	۰,۰۰۱	۱	۲۴	کسرا	۰,۴۰۳۱۲۴۷۶۸	۰,۵	۰
۳	ثتشاهد	۱,۲۷۹۸۷۸۵۰۱	۰,۳۹۳۳۷	۱	۲۵	کسعدی	۰,۷۲۶۲۳۹۴۸۸	۰,۵	۰
۴	ثمسکن	۰,۳۷۵۷۳۳۶۱۹	۰,۵	۰	۲۶	کفرا	۱,۶۰۹۶۶۱۵۵۹	۰,۳۰۵۷۱۸	۰
۵	ثنوسا	۹,۳۹۴۷۳۰۲۵۳	۰,۰۱۶۸۷۲	۱	۲۷	کهرام	۶,۰۵۰۳۴۹۷۹۱	۰,۰۳۶۰۶۸	۱
۶	حفاری	۱۰,۱۹۰۱۳۲۴۴	۰,۰۱۴۵۴۹	۰	۲۸	وبشهر	۳,۵۰۶۸۵۹۶۷۶	۰,۰۸۴۹۰۵	۰
۷	خاذین	۲۲,۶۷۴۹۰۵۶۱	۰,۰۰۲۶۵۲	۰	۲۹	وبهمن	۸,۳۷۳۲۹۱۹۷۸	۰,۰۲۰۰۵	۱
۸	خپارس	۲۱,۵۲۹۲۸۶۶۸	۰,۰۰۲۹۹۴	۱	۳۰	وپارس	۴,۱۵۳۷۸۸۲۹۷	۰,۰۶۵۱۹۴	۰
۹	خساپا	۰,۲۵۰۴۹۳۲۷۱	۰,۵	۱	۳۱	وپترو	۱,۹۴۹۸۳۶۶۸۱	۰,۲۲۶۸۶۹	۰
۱۰	خودرو	۳,۷۱۲۷۳۱۸	۰,۰۷۶۳۵۳	۱	۳۲	وتجارت	۲,۱۷۰۰۹۴۷۳۱	۰,۱۸۵۸۰۷	۰
۱۱	دجابر	۱۲۵,۶۵۶۶۱۰۲	۰,۰۰۱	۱	۳۳	وتوشه	۳۴,۳۰۷۲۹۳۶۳	۰,۰۰۱	۱
۱۲	دزارک	۶۲۲,۶۵۰۷۳۴۹	۰,۰۰۱	۰	۳۴	وتوصا	۰,۹۵۲۱۶۸۰۵۶	۰,۵	۰
۱۳	درانفور	۹۳۴,۴۱۷۵۰۲۹	۰,۰۰۱	۰	۳۵	وساخت	۰,۷۶۹۳۶۹۳۰۹	۰,۵	۰
۱۴	رتکو	۳۸,۳۰۲۸۸۵۷۲	۰,۰۰۱	۰	۳۶	وسپه	۰,۷۴۸۱۲۳۷۷۵	۰,۵	۰
۱۵	سدور	۳,۴۸۰۴۷۷۳۹۲	۰,۰۸۵۲۰۷	۱	۳۷	وسینا	۱۲۲,۶۲۷۱۵۰۳	۰,۰۰۱	۱
۱۶	سفارس	۱۷,۳۱۶۰۷۲۹۹	۰,۰۰۴۹۲۱	۱	۳۸	وصنعت	۲۰,۶۸۶۳۸۸۷۵	۰,۰۰۳۲۹۹	۱
۱۷	غاذر	۰,۲۱۸۲۵۲۰۸۵	۰,۵	۱	۳۹	وغدیر	۳۸,۶۸۶۲۱۴۷۳	۰,۰۰۱	۱
۱۸	فاذر	۱,۷۲۸۶۳۷۹۴۸	۰,۲۷۶۴۹۱	۱	۴۰	ولسپا	۱,۵۲۸۱۰۳۱۳۸	۰,۳۲۶۵۲۶	۰
۱۹	فاسمین	۶۶,۵۱۹۶۹۸۲۴	۰,۰۰۱	۰	۴۱	ولغدر	۵,۶۳۸۷۶۴۵۸	۰,۰۳۹۷۰۹	۱
۲۰	فباهنر	۱۴۵,۶۳۳۶۵۶	۰,۰۰۱	۱	۴۲	ونفت	۹,۵۸۶۰۴۶۷	۰,۰۱۶۱۶۸	۱
۲۱	کپشیر	۱۰,۶۷۳۷۸۹۳۸	۰,۰۱۳۰۳۱	۱	۴۳	ونوین	۰,۲۰۵۳۴۰۸۳	۰,۵	۰
۲۲	کچینی	۱۵,۴۳۲۶۰۳۸	۰,۰۰۶۳۱۹	۱					

در جدول ۴، فرض صفر به معنی پذیرش نرمال بودن دارایی‌ها و فرض یک به معنی عدم پذیرش فرض نرمال بودن بازده دارایی‌ها است. همانطور که مشاهده می‌کنید بازده دارایی‌ها همواره نرمال نیست. بنابراین باید از معیارهایی در مدل انتخاب سبد سهام استفاده کرد که نسبت به عدم تقارن بازده دارایی‌ها حساس نباشد.

۴-۲- ارائه مدل و حل مساله

همانطور که در مدل‌های ۳ و۴ مشاهده می‌کنید، محدودیت‌ها و توابع هدف بکار گرفته در این مدل‌ها به صورت خطی هستند. بنابراین با روش برنامه‌ریزی خطی مسئله قابل حل می‌باشد. به منظور حل مسئله برای پارامترهای α، β به ترتیب مقادیر 31×10^{-3}، 5×10^{-5} در نظر گرفته شد. وبا استفاده از دستور linprog در نرم‌افزار متلب مدل‌ها حل شدند که مقادیر مربوط به پرتفوی بهینه در شکل‌های ۲و ۳ ارائه شده است.

شکل ۲- پرتفوی بهینه با توجه به مدل ۳

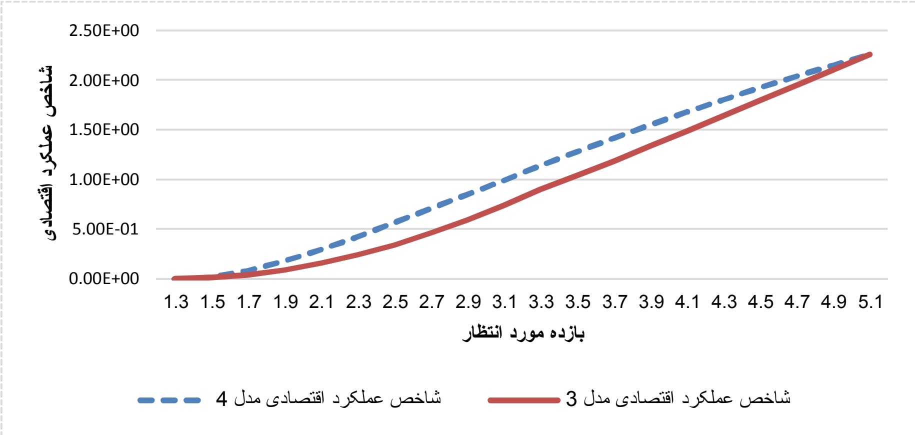


پرتفوی بهینه با توجه به مدل ۴-شکل ۳

۴-۳- مقایسه مدل‌ها

در این تحقیق بازدهی بدون ریسک ماهانه ۱,۳ درصد در نظر گرفته شده است. به منظور مقایسه دو مدل در دو مدل ذکر شده مقدار حداقل بازده مورد انتظار α در بازه .013 تا .051 برای بیست نقطه محاسبه شده است. در مدل(۴) حداقل مقدار چولگی 4×10^{-5} فرض شده

است.مقدار شاخص عملکرد اقتصادی متناسب با هریک از مقادیر بدست آمده محاسبه شده و نتایج در شکل **۴**(۴) ارائه شده است:



شکل ۴-مقایسه شاخص عملکرد اقتصادی مدل (۳) و (۴)

همانطور که مشاهده می‌کنید مقدار شاخص عملکرد اقتصادی در مدل (۴) که مبتنی بر میانگین، آنتروپی و چولگی است همواره بزرگتر مساوی شاخص عملکرد اقتصادی در مدل (۳) مبتنی بر میانگین و واریانس می‌باشد. همانطور که مطرح شد یکی از دلایل این امر عدم تقارن در بازده دارایی‌ها و عدم کارایی واریانس در مدل کردن ریسک در این شرایط است. بنابراین در نظر گرفتن معیار دیگری مانند آنتروپی که نسبت به عدم تقارن و غیرنرمال بودن بازده داریی‌ها است می‌تواند در مدل انتخاب سبد سهام مفید واقع شود.

۵- نتیجه‌گیری و بحث

بازده دارایی‌ها همواره با عدم‌اطمینان است و همواره در طی زمان نوسانات غیرمنتظره‌ای به لحاظ شرایط اقتصادی، اجتماعی و سیاسی و ... در بازدهی دارایی‌ها از جمله سهام روی می‌دهد. منطق فازی می‌تواند یکی از گزینه‌های مناسب برای مدل کردن بازده دارایی‌ها باشد. اما بعد دیگر مسائل بهینه‌سازی سبد سهام انتخاب معیار ریسک مناسب می‌باشد. معیارهای ریسک گوناگونی در این زمینه ارائه شده است. از طرفی می‌توان با توجه به عدم تقارن و غیرنرمال بودن تابع توزیع دارایی‌ها به این نتیجه رسید از معیارهای ریسکی استفاده کرد که بر خلاف واریانس نسبت تقارن بازده دارایی‌ها بی‌تفاوت است.

در این مقاله از داده‌های بورس اوراق بهادار تهران برای مطالعات تجربی استفاده شد ابتدا بوسیله آماره جارک برا به این نتیجه رسیدیم که بازده دارایی‌ها نرمال و متقارن نمی‌باشد. به این منظور مدلی بر مبنای میانگین، آنتروپی و چولگی ارائه گردید سپس به دلیل خطی بودن مدل، با استفاده از برنامه‌ریزی خطی مسئله حل شد. در مرحله بعد برای مقایسه مدل‌ها، بدلیل متفاوت بودن معیارهای ریسک از شاخص عملکرد اقتصادی استفاده شد. با مقایسه مقدار شاخص عملکرد اقتصادی دو مدل به این نتیجه رسیدیم مدل پیشنهادی دارای مقدار شاخص عملکرد اقتصادی بالاتری نسبت به مدل میانگین واریانس دارد. البته می‌توان از معیارهای دیگری نیز برای مقایسه استفاده کرد که طبیعتا ممکن است نتایج متفاوت باشد.

در انتها برای مطالعات آتی پیشنهاد می‌گردد که با بکار بردن محدودیت‌های مانند حداقل میزان سرمایه‌گذاری در هر سهم، محدودیت حداکثر تعداد سهام موجود در سبد اوراق بهادار و... مدل به فضای واقعی نزدیکتر گردد و در مرحله بعد پیشنهاد می‌شود که معیارهای دیگری مانند کمینه کردن هزینه‌های تراکنش، حداکثر کردن معیار نقدشوندگی و ...به مدل پیشنهادی اضافه گردد تا کارایی مدل در این شرایط نیز نشان داده شود.

فهرست منابع

[۱] H. Tanaka and P. Guo, "Portfolio selection based on upper and lower exponential possibility distributions," European Journal of Operational Research, vol. 114, pp. 115-126, 1999.

[۲] M. Arenas Parra, A. Bilbao Terol, and M. Rodrıguez Urıa, "A fuzzy goal programming approach to portfolio selection," European Journal of Operational Research, vol. 133, pp. 287-297, 2001.

[۳] C. Carlsson, R. Fullér, and P. Majlender, "A possibilistic approach to selecting portfolios with highest utility score," Fuzzy sets and systems, vol. 131, pp. 13-21, 2002.

[۴] H. Markowitz, "Portfolio selection*," The journal of finance, vol. 7, pp. 77-91, 1952.

[۵] H. Markowitz, Portfolio selection: efficient diversification of investments: Yale university press, 1959.

[۶] D. N. Nawrocki and W. H. Harding, "State-value weighted entropy as a measure of investment risk," Applied Economics, vol. 18, pp. 411-419, 1986.

[۷] X. Huang, "Mean-entropy models for fuzzy portfolio selection," Fuzzy Systems, IEEE Transactions on, vol. 16, pp. 10.۲۰۰۸ ,۱۱۰۱-۹۶

[۸] M. R. Simonelli, "Indeterminacy in portfolio selection," European journal of operational research, vol. 163, pp. 170-176, 2005.

[۹] P. A. Samuelson, "The fundamental approximation theorem of portfolio analysis in terms of means, variances and higher moments," The Review of Economic Studies, vol. 37, pp. 537-542, 1970.

[۱۰]H. Konno and H. Yamazaki, "Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market," Management science, vol. 37, pp. 519-531.۱۹۹۱ ,
[۱۱]P. Jorion, Value at risk: the new benchmark for controlling market risk vol. 2: McGraw-Hill New York, 1997.
[۱۲]R. T. Rockafellar and S. Uryasev, "Optimization of conditional value-at-risk," Journal of risk, vol. 2, pp. 21-42, 2000.
[۱۳]L. A .Zadeh, "Fuzzy sets," Information and control, vol. 8, pp. 338-353, 1965.
[۱۴]L. Zadeh, "Fuzzy Sets a Passes for a Theory of Possibility," Fuzzy Sets and Systems, Amsterdam, North-Holland, 1978.
[۱۵]A. Kaur and A. Kumar, "A new method for solving fuzzy transportation problems using ranking function," Applied Mathematical Modelling, vol. 35, pp. 5652-5661, 2011.
[۱۶]G. Sun, Y. Liu, and Y. Lan, "Fuzzy two-stage material procurement planning problem," Journal of Intelligent Manufacturing, vol. 22, pp. 31.۲۰۱۱ ,۳۳۱-۹
[۱۷]K. Maity, "Possibility and necessity representations of fuzzy inequality and its application to two warehouse production-inventory problem," Applied Mathematical Modelling, vol. 35, pp. 1252-1263, 2011.
[۱۸]M. Inuiguchi and J. Ramík" ,Possibilistic linear programming: a brief review of fuzzy mathematical programming and a comparison with stochastic programming in portfolio selection problem," Fuzzy sets and systems, vol. 111, pp. 3-28, 2000.
]19[X. Zhang, W.-G. Zhang, and R. Cai, "Portfolio adjusting optimization under credibility measures," Journal of computational and applied mathematics, vol. 234, pp. 1458-1465, 2010.
[۲۰]X. Li, Z. Qin, and S. Kar, "Mean-variance-skewness model for portfolio selection with fuzzy returns," European Journal of Operational Research, vol. 202, pp. 239-247, 2010.
[۲۱]H. Dastkhan, N. S. Gharneh, and H. Golmakani, "A linguistic-based portfolio selection model using weighted max–min operator and hybrid genetic algorithm," Expert Systems with Applications ,vol. 38, pp. 11735-11743, 2011.
[۲۲]Z. Qin, M. Wen, and C. Gu, "Mean-absolute deviation portfolio selection model with fuzzy returns," Iranian Journal of Fuzzy Systems, vol. 8, pp. 61-75, 2011.
[۲۳]X. Huang, "Minimax mean-variance models for fuzzy portfolio selection," Soft Computing, vol. 15, pp. 251-260, 2011.
[۲۴]P. Gupta, M. Inuiguchi, M. K. Mehlawat, and G. Mittal, "Multiobjective credibilistic portfolio selection model with fuzzy chance-constraints," Information Sciences, 2012.
[۲۵] شمس و دستخوان, "به کارگیری برنامه ریزی ریاضی فازی در مسئله ی تعیین سبد بهینه سهام," ششمین کنفرانس بین المللی مهندسی صنایع, ۱۳۹۰.
[۲۶] یحیی‌زاده و همکاران, "مقایسه مدلهای سبد سهام در حالت تصادفی و تصادفی فازی بودن بازده مورد انتظار," پیشرفت های حسابداری, شماره اول, صفحه ۱۹۶-۱۷۱, ۱۳۹۰.
[۲۷] صباغیان طوسی و مسعودی مقدم, "مدل میانگین – واریانس – چولگی برای انتخاب سبد سهام به وسیله ی منطق فازی " اولین همایش بین المللی اقتصاد سنجی، روشها و کاربردها ۱۳۹۱.
[۲۸] همتی و همکاران, "کاربرد برنامه ریزی خطی فازی در تنظیم مجدد سبد سهام با پارامترهای فازی,"

چهارمین کنفرانس بین المللی تحقیق در عملیات ایران ۱۳۹۰.
[۲۹]L. A. Zadeh, "Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility," Fuzzy sets and systems, vol. 100, pp. 9-34, 1999.
[۳۰]B. Liu and Y.-K. Liu, "Expected value of fuzzy variable and fuzzy expected value models," Fuzzy Systems, IEEE Transactions on, vol. 10, pp. 445-450, 2002.
[۳۱]B. Liu, Uncertainty theory: an introduction to its axiomatic foundations vol. 154: Springer, 2004.
[۳۲]L. A. Fono, J. S. Kamdem, and C. Tassak, "Moments and Semi-Moments for fuzzy portfolios selection," 2011.
[۳۳]L. A. Fono, J. S. Kamdem, and C. D. Tassak, "Kurtosis and Semi-kurtosis for Portfolios Selection with Fuzzy Returns," 2011.
[۳۴]C. M. Jarque and A. K. Bera, "A test for normality of observations and regression residuals," International Statistical Review/Revue Internationale de Statistique, pp. 163-172, 1987.
[۳۵]R. J. Aumann and R. Serrano, "An economic index of riskiness," Journal of Political Economy, vol. 116 ,pp. 810-836, 2008.
[۳۶]U. Homm and C. Pigorsch, "Beyond the Sharpe ratio: An application of the Aumann–Serrano index to performance measurement," Journal of Banking & Finance, vol. 36, pp. 2274-2284, 2012.

یادداشت‌ها

[1] Entropy
[2] Value-at-Risk (VaR)
[3] Conditional Value-at-Risk (CVaR)
[4] Entropy
[5] Verbal variable
[6] Max_min
[7] Min_max
[8] Possibility theory
[9] Self-Duality
[10] Necessity
[11] Jarque and Bera