فصلنامه مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار
شماره چهل و هشتم / پائیز ۱۴۰۰

ارائه الگوی بهینه پایدار سبد سهام با رویکرد امگا

فاطمه پورعسکری جورشری[۱]
محسن خدادادی[۲]
سید رضا سید نژاد فهیم[۳]

تاریخ دریافت مقاله : ۹۹/۱۱/۲۶ تاریخ پذیرش مقاله : ۱۴۰۰/۰۱/۰۹

چکیده

ازجمله مسائل عمده‌ای که سرمایه‌گذاران بازارهای سرمایه با آن مواجه هستند، تصمیم‌گیری جهت انتخاب اوراق بهادار مناسب برای سرمایه‌گذاری و تشکیل سبد بهینه سهام است. ازآنجاکه پارامترهای مسئله انتخاب سبد سهام را، به دلیل نوسان بازار و قیمت نمی‌تواند ثابت در نظر گرفت، باید از روشی بهره برد که عدم قطعیت داده‌ها در آن لحاظ شود. بهینه‌سازی پایدار راه‌حلی علمی برای مسائلی به شمار می‌رود که در آن با عدم قطعیت داده‌ها روبرو خواهیم بود. پژوهش حاضر در جهت بهینه‌سازی پایدار پرتفوی بر اساس رویکرد امگا بررسی‌شده است. مقاله حاضر به معرفی مدل خطی امگا، به‌عنوان معیار محاسبه ریسک و ارائه مدل بهینه پایدار امگا پرداخته است. رویکرد پایدار استفاده‌شده در این پژوهش، رویکرد برتسیماس و سیم است در این رویکرد همتای پایدار ارائه‌شده برای یک مدل برنامه‌ریزی خطی همچنان خطی باقی می‌ماند که باعث می‌شود مزایای مدل برنامه‌ریزی خطی در مدل بهینه حفظ شود. مدل توسعه داده‌شده در این پژوهش توسط داده‌های واقعی ۲۰ سهم از شاخص S&P ۵۰۰ به مدت سه سال به‌صورت تصادفی انتخاب‌شده که نتایج آن نشان‌دهنده کارایی بالای مدل در توسعه مدل‌های تحت شرایط عدم قطعیت است همچنین نتایج نشان می‌دهد، درصورتی‌که سطح محافظه‌کاری افزایش یابد، مقدار تابع هدف افزایش خواهد یافت.

کلمات کلیدی

بهینه‌سازی پایدار، رویکرد امگا، مدل خطی، عدم قطعیت

گروه مهندسی مالی، واحد رشت، دانشگاه آزاد اسلامی، رشت، ایران. Pouraskari۸۹@gmail.com
گروه حسابداری، واحد رودسر و املش، دانشگاه آزاد اسلامی، رودسر، ایران. (نویسنده مسئول) Mkhodadadil@yahoo.com
گروه حسابداری، واحد لاهیجان، دانشگاه آزاد اسلامی، لاهیجان، ایران. s.rezafahim@liau.ac.ir

مقدمه

حضور در بازار سرمایه با توجه به بازده‌ی مناسب نسبت به سایر بازارها، عدم نیاز به سرمایه زیاد، قابلیت نقدینگی سرمایه و خریدوفروش سهام در همه‌جا و هر زمان، یکی از گزینه‌های جذاب برای سرمایه‌گذاران محسوب می‌شود. دلایلی مانند پر ریسک بودن این بازار و امکان مسدود شدن طولانی‌مدت سرمایه، افراد را از ورود به این بازار منع می‌کنند. این در حالی است که همه‌ی افراد می‌توانند با کسب دانش و تجربه‌ی کافی سرمایه‌گذاری پرسودی در بازار سرمایه داشته باشند و بایستی سرمایه‌گذاران را با کنترل و کاهش ریسک سرمایه‌گذاری تشویق نمود. ازجمله دلایل وجود ریسک تغییرات در سطح قیمت‌ها، قوانین اقتصادی و سایر عوامل مؤثر بر عرضه و تقاضا را می‌توان نام برد. تشکیل پرتفوی به‌عنوان یکی از راه‌های کنترل ریسک سرمایه‌گذاری می‌تواند موردتوجه قرار گیرد. با افزایش تعداد سهام در پرتفوی، ریسک مجموعه کاهش می‌یابد چون تأثیرپذیری شرکت‌ها از شرایط مختلف اقتصادی، سیاسی و اجتماعی متفاوت است. ریسک و بازده مورد انتظار برای سرمایه‌گذاران موضوع مهمی است و آن‌ها با برقراری تعادل بین ریسک و بازده تالش می‌کنند تا کار خود را به سر حد مطلوب برسانند. ازاین‌رو تالش‌های عمده‌ای جهت ارائه روش‌های نوین تجزیه‌وتحلیل بازارهای مالی در کنار روش‌های گذشته برای تشکیل پرتفوی بهینه انجام‌شده است (سرچشمی و همکاران، ۱۳۹۹).

مدیران مالی همواره در پی آن هستند که با به‌کارگیری روش‌های مناسب بهینه‌سازی و نیز در نظر گرفتن شرایط دنیای واقعی به پاسخ‌هایی علمی و کاربردی دست یابند. در مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی کلاسیک عمدتاً از داده‌های اسمی در محدودیت‌ها و یا تابع هدف استفاده می‌شود، درصورتی‌که یکی از ویژگی‌های بازار مالی عدم قطعیت داده‌ها و پارامترهاست که باید در مدل‌سازی مسئله انتخاب سبد سهام به آن توجه شود. این عدم قطعیت می‌تواند بر بهینگی و موجه بودن مدل تأثیر بگذارد. روش‌های گوناگونی برای مواجه با عدم قطعیت وجود دارد ازجمله برنامه‌ریزی تصادفی، بهینه‌سازی فازی، بهینه‌سازی پایدار که هر یک دارای مزایا و معایبی هستند. همان‌طور که گفته شد یکی از رویکردهای موردبررسی برای بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری در شرایط عدم قطعیت داده‌ها، استفاده از بهینه‌سازی پایدار است. در این شیوه که یکی از رویکردهای نسبتاً نوین بهینه‌سازی است، تلاش می‌شود که محدودیت‌های شامل پارامترهای غیرقطعی با همتاهای پایدار آن‌ها جایگزین شود و بدین‌وسیله توازن میان بهینگی و شدنی بودن مسئله حفظ گردد.

توجه به بهینه‌سازی سبد سهام و پرتفوی برای سرمایه‌گذاران در بورس اوراق بهادر مورد اهمیت است. پرتفوی در عبارت ساده به ترکیبی از دارایی‌ها گفته می‌شود که توسط یک سرمایه‌گذار برای

سرمایه‌گذاری تشکیل می‌شود. این سرمایه‌گذار می‌تواند شخصی حقیقی یا یک شخصیت حقوقی داشته باشد. ازنظر تکنیکی، یک پرتفوی دربرگیرنده مجموعه‌ای از دارایی‌های واقعی و مالی سرمایه‌گذاری است. بااین‌حال در این پژوهش تأکید بر دارایی‌های مالی است. مطالعه تمام جنبه‌های پرتفوی، مدیریت پرتفوی نام دارد. این واژه جامع دربرگیرنده مفاهیم پرتفوی است (رهنمای رودپشتی و همکاران، ۱۳۹۶).

انتخاب پرتفوی بهینه یکی از مسائلی است که ذهن بسیاری از فعالان بازار سرمایه را به خود درگیر کرده است. آنچه مدل‌های مختلف بهینه‌سازی پرتفوی را از یکدیگر متمایز می‌سازد، معیار محاسبه ریسک است. ریسک سرمایه‌گذاری یکی از مهم‌ترین مسائلی است که سرمایه‌گذار در بورس با آن مواجه است؛ به‌طورکلی، سرمایه‌گذاران در پی کسب بیشترین بازدهی با حداقل ریسک هستند؛ بنابراین یکی از چالش‌های مهم در تشکیل پرتفوی، تعیین نسبت یا وزن بهینه‌ای از سهام موجود، در سبد سهام برای کاهش ریسک است.

علی‌رغم تأثیری که مدل پرتفوی مدرن بر توسعه دانش مالی بر جای نهاد، بسیاری از مدیران نهادهای مالی چندان رغبتی به آن نشان ندادند؛ زیرا از دید نهادهای مالی مدل پرتفوی مدرن در عمل چندان قابل‌اطمینان نبود. دلیل این عدم اطمینان را می‌توان در عدم قطعیت متغیرهای مدل، یعنی بازده مورد انتظار و واریانس دانست. پیشرفت در علوم ریاضی و فیزیک تأثیر غیرقابل‌انکاری بر دانش مالی داشته است. به‌خصوص شاخه‌های مختلف علم ریاضی از قبیل مدل احتمالات، آمار، اقتصادسنجی و پژوهش عملیاتی ابزارهای لازم برای توسعه اقتصاد مالی مدرن را به وجود آورده‌اند. یکی از پیشرفت‌های عمده در این زمینه را می‌توان توسعه نظریه برآورد پایدار و بهینه‌سازی پایدار[1] در دهه (۱۹۹۰) دانست که به‌کارگیری آن تأثیر مهمی در بالا بردن قابلیت اطمینان مدل‌های مدیریت پرتفوی در عمل داشته است (رهنمای رودپشتی و همکاران، ۱۳۹۶).

نظریه فرا مدرن پرتفوی[2] بر اساس رابطه بازدهی و ریسک نامطلوب به تبیین رفتار سرمایه‌گذاران و معیار انتخاب پرتفوی بهینه می‌پردازد (شیخ[3]، ۲۰۱۴). در این نظریه، ریسک نامطلوب به‌عنوان شاخص اندازه‌گیری ریسک، ((احتمال نوسانات منفی بازدهی درآیندِ)) تعریف‌شده است. نظریه فرا مدرن پرتفوی بین نوسانات مطلوب و نامطلوب یک وجه تمایز واضح ایجاد می‌کند؛ به‌عبارت‌دیگر، تنها نوسانات پایین‌تر از نرخ بازده هدف سرمایه‌گذار، مشمول ریسک هستند و این در حالی است که تمامی نوسانات بالاتر این هدف به‌عنوان فرصت‌های سرمایه‌گذاری به‌منظور دستیابی به نرخ بازده مطلوب به‌حساب می‌آیند. مهم‌ترین نوآوری نظریه فرا مدرن پرتفوی نسبت به نظریه مدرن پرتفوی این شناخت جدید است که معیارهای سنتی ریسک همانند انحراف معیار و بتا نماینده مناسبی برای آنچه تجربه انسانی به‌عنوان

ریسک درک می‌کند، نیست. ریسک به‌عنوان یک وضعیت احساسی بیشتر مبین ترس از یک پیشامد نامطلوب همانند ضرر یا عملکرد پایین‌تر از سطح توقع یا عدم دسترسی به هدف مطلوب است؛ بنابراین معیارهای ریسک نامطلوب به شکل بهتری می‌تواند آن را به‌صورت ریاضی تبیین کنند. همچنین برایان ام. رام، معتقد است که در نظریه فرا مدرن پرتفوی دو پیشرفت اساسی نسبت به نظریه مدرن پرتفوی دیده می‌شود:

۱. به‌کارگیری ریسک نامطلوب به‌جای انحراف معیار (SD) به‌عنوان ابزار سنجش ریسک.
۲. نظریه فرا مدرن پرتفوی توزیع‌های بازده غیر نرمال را نیز در برمی‌گیرد.

بنابراین سرمایه‌گذارانی که به ریسک نامطلوب خیلی اهمیت می‌دهند یک صرف ریسکی را برای نگهداری دارایی‌هایی که بازده‌های رو به پایین بیشتری نسبت به بازده‌های رو به بالا دارند، تقاضا می‌کنند. درنتیجه دارایی‌های که دارای چولگی منفی هستند؛ یعنی احتمال ایجاد زیان برای آن‌ها بیشتر است و به عبارتی بازده‌های رو به پایین آن‌ها اندازه مطلق بیشتری نسبت به بازده‌های رو به بالا آن‌ها دارند، جذابیت کمتری برای سرمایه‌گذاران خواهند داشت و بازدهی بیشتری را طلب می‌کنند و کمتر قیمت‌گذاری می‌شوند. برعکس دارایی‌های با چولگی مثبت ازآنجاکه ظرفیت سود بیشتری نسبت به زیان‌های متحمل دارند، جذابیت بیشتری دارند و صرف ریسک کمتری را می‌طلبند و کاربرد این نظریه را در ارزیابی عملکرد، بهینه‌سازی پرتفوی و تخصیص دارایی‌ها می‌داند (رم و همکاران[۴]، ۱۹۹۳).

به‌طورکلی رویه‌های بهینه‌سازی هم در نظریه مدرن و هم در نظریه فرا مدرن پرتفوی مطرح می‌شود که نیازمند تعیین توزیع آماری نرخ بازدهی دارایی است. برخلاف نظریه مدرن پرتفوی که تنها توزیع‌های متقارن دو پارامتری را مجاز می‌داند، نظریه فرا مدرن پرتفوی طبقه وسیع‌تری از توزیع‌های نامتقارن را دربر می‌گیرد. به‌طورکلی مطالعات بهینه‌سازی نظریه فرا مدرن پرتفوی، نتایج دقیق‌تری را تأمین می‌کند؛ چراکه نماینده دقیقی را برای شکل صحیح توزیع بازدهی هر دارایی در نظر می‌گیرد (رستمی و همکاران، ۱۳۹۴). سرمایه‌گذاران همواره باید به‌گونه‌ای تصمیم‌گیری کنند که بهترین نتایج را در بازارهای مالی کسب نمایند. آن‌ها به دنبال دستیابی به بیشترین بازدهی و کمترین ریسک هستند. بی‌شک ارائه مدل‌هایی که بیشترین انطباق را با دنیای واقعی و بازارهای مالی داشته باشند از اهمیت خاصی برخوردار خواهد بود؛ زیرا این امکان را برای مدیران حوزه مالی و تصمیم گیران سبد سرمایه‌گذاری فراهم می‌کنند که تصمیم‌های قابل اتکایی اخذ نمایند. درواقع اهمیت این موضوع با گسترش رقابت روزافزون در بازارهای مالی بیشتر پدیدار می‌گردد.

در ایران درزمینهٔ بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری با استفاده از معیارهای ریسک نامطلوب پژوهش‌های چندانی صورت نگرفته است و معیارهای ارزیابی نسبت امگا ناشناخته مانده است. دلیل انتخاب این متغیرها در این پژوهش این است که؛ نسبت امگا خود به‌عنوان رویکردی جدید و اساسی در رویکردهای ریسک پست‌مدرن و ریسک کاهشی است، همچنین پیش‌ازاین در هیچ‌یک از پژوهش‌ها به‌طور مستقیم به تبیین مدل ریاضی انتخاب پرتفوی بهینه سرمایه‌گذاری در چارچوب بهینه‌سازی پایدار با رویکرد امگا پرداخته نشده است، ازاین‌رو در شرایطی که تصمیم‌گیری درست مدیران و سرمایه‌گذاران به بررسی و به‌تبع آن درک دقیق آن‌ها از پرتفوی بهینه موردتوجه است، در این راستا با درک ضرورت پژوهش در موضوع الگوی بهینه پایدار سبد سهام با رویکرد امگا که از دیدگاه پست‌مدرن در حوزه مدیریت سرمایه‌گذاری و تئوری‌های مالی است به پژوهش پرداخته‌شده است.

مرور ادبیات و پیشینه پژوهش

بهینه‌سازی پایدار

به‌عنوان پیشتاز در عرصه بهینه‌سازی پایدار، سویستر (۱۹۷۳) یک روش برنامه‌ریزی پایدار بدبینانه برای برخورد با مسائل برنامه‌ریزی خطی غیردقیق توسعه داد. یک جواب برای یک مسئله بهینه‌سازی، یک جواب پایدار است اگر دارای پایداری شدنی بودن[۵] و پایداری بهینگی[۶] باشد. پایداری شدنی بودن به این معناست که جواب باید برای تمامی (بیشتر) حالات ممکن پارامترهای دارای عدم قطعیت شدنی باقی بماند. پایداری بهینگی نیز بدین معناست که مقدار تابع هدف به ازای جواب پایدار باید برای تمامی (بیشتر) حالات ممکن پارامترهای دارای عدم قطعیت، نزدیک به مقدار بهینه خود بوده و یا به‌عبارت‌دیگر حداقل انحراف را از مقدار بهینه خود داشته باشد. از این منظر که برای مدل‌سازی عدم قطعیت در مدل‌های پایدار به دانستن توزیع عدم قطعیت و یا وجود خبره نیازی نیست و تنها کافی است حدود پارامتر غیرقطعی را بدانیم. در بهینه‌سازی پایدار، به بهینه‌سازی در هنگام رخ دادن بدترین اتفاق‌ها پرداخته می‌شود که ممکن است به تابع هدف مینیمم کردن ماکزیمم (min-max) منجر شود. در این رویکرد به دنبال جواب‌های نزدیک به بهینه‌ای هستیم که با احتمال زیادی موجه باشند (حنفی زاده و همکاران، ۱۳۸۳).

ازجمله پژوهش‌هایی که در سالیان اخیر بر بهینه‌سازی پایدار در مدیریت پرتفوی انجام‌گرفته‌اند، به شرح زیر می‌باشند: هاگز[۷] (۱۹۹۸) و زاکومولین[۸] و کوکبکر[۹] (۲۰۰۹) نسبت شارپ کلی (عمومی) را تعریف کردند. این نسبت چولگی (مولفهٔ سوم) و کشیدگی (مولفهٔ چهارم) مشاهده‌های توزیع بازدهٔ تاریخی را در محاسبه وارد می‌کند. لو[۱۰] (۲۰۰۲) رفتار آماری نسبت شارپ مشاهده‌شده را تحت این

فرض که توزیع بازدهی‌ها نرمال است، نتیجه گرفت. مرتنز[۱۱] (۲۰۰۲) نتیجه لو را با ضعیف نشان دادن فرض نرمال بودن توزیع بازدهی‌ها گسترش داد. مسئله انتخاب پرتفوی با استفاده از VARSR (نسبت شارپ تعدیل‌شده باارزش در معرض ریسک) به‌عنوان یک نمونه از مسئله بهینه‌سازی پرتفوی ارائه می‌شود. بهینه‌سازی پایدار پرتفوی این اطمینان را می‌دهد که توزیع بازدهی تحت بررسی در هرلحظه توسط بازدهی‌های تاریخی تخمین‌زده می‌شود. گلدفارب[۱۲] اینگار[۱۳] در سال ۲۰۰۳ مفهوم ساختارهای نامطمئن (ساختارهای عدم قطعیت) را برای تخمین واریانس و بازدهی مورد انتظار تعریف کردند و چگونگی کارایی تخصیص پایدار پرتفوی در یک سطح اطمینان معین را نشان دادند. ماکزیمم سازی، بدبینانه‌ترین نسبت شارپ یکی از مدل‌های بهینه‌سازی پایدار پرتفوی است که توسط گلدفارب و اینگار در سال ۲۰۰۳ ارائه شد. کوئینی[۱۴] و تاچنکو[۱۵] (۲۰۰۴) این روش را تعمیم داده و به حمایت از این برنامه ⟨⟨انتخاب پرتفوی محافظه‌کارانه که منجر به حداکثر شدن بازدهی پرتفوی در بدبینانه‌ترین سناریو می‌شود⟩⟩ پرداختند. این دو نویسنده به‌طورمعمول مجموعه‌های عدم اطمینان از پارامترهای ورودی را برای توزیع بازدهی مدل‌سازی کرده و نیز با استفاده از مجموعه‌های عدم اطمینان مجزا برای توزیع برآورد کننده‌های میانگین و واریانس استفاده می‌کردند. کریستی[۱۶] (۲۰۰۵) و اوپدیک[۱۷] (۲۰۰۷) فرض نرمال و مستقل (i.i.d)[۱۸] بودن بازدهی را به ایستا و ارگودیک[۱۹] بودن بازدهی تغییر دادند. این دو پژوهشگر نشان دادند که نسبت شارپ برآورد کننده حتی زمانی که بازدهی‌های موردنظر به‌طور سری همبسته هستند و یا نوسان‌های شرطی متغیر بازمان دارند، دارای توزیع نرمال است. این نتایج به‌طور مستقیم ساختار VARSR را تشکیل می‌دهند. در سال (۲۰۰۹) دی‌میگوئل[۲۰] و نوگلاس[۲۱] بجای استفاده از روش بدبینانه‌ترین سناریو، از برآورد کننده‌های پایدار، برآورد کننده M و برآورد کننده S استفاده کرده و ویژگی‌های خارج از نمونه آن‌ها را نشان دادند. به‌منظور آشنایی بیشتر در این زمینه در پژوهش‌های اخیر، می‌توان به پژوهش عملیاتی انتخاب پرتفوی پایدار توسط فابوزی در سال (۲۰۱۰) نگاهی انداخت. اخیراً زیملر[۲۲] (۲۰۱۱) یک تضمین بیمه‌ای پرتفوی به پرتفوی‌های بهینه با استفاده از اوراق مشتقه در ساختار استاندارد بهینه‌سازی پایدار پرتفوی به‌عنوان پوششی برای حوادث ناگوار بازار اضافه کرده است.

برتسیماس[۲۳] در سال (۲۰۱۱) یک مرور کلی بر مبانی نظری بهینه‌سازی پایدار ارائه کرد؛ درحالی‌که بن تال[۲۴] و نمیروسکی[۲۵] در سال ۲۰۰۷ به‌طور ویژه به مبحث بهینه‌سازی پایدار محدب در یک نگاه اجمالی پرداختند.

فابوزی و همکاران[۲۶] (۲۰۱۴) با نگاهی عمیق‌تر به سبدهای سرمایه‌گذاری پایدار، رفتار این سبدهای شکل‌گرفته با کمک بهینه‌سازی پایدار را مورد تحلیل قراردادند، تحقیق آن‌ها نشان داد با افزایش پایداری

سبد سرمایه‌گذاری سبد بهینه به سمت سبد سبدی که واریانس آن در بالاترین حد توسط فاکتور های مشخص توضیح داده می‌شود حرکت می‌کند.

ایوب و همکاران[۲۷] (۲۰۱۵) بر مبنای تحقیقی که بر روی بورس کراچی و در حوزه استفاده از شاخص پایداری ریسک نامطلوب انجام دادند نشان دادند که استفاده از این آماره به‌ویژه در ارتباط با دارایی‌های که نمودار تغییرات قیمتی آن‌ها دارای کشیدگی بیشتری است، عملکرد بسیار بهتری نسبت به مدل میانگین و واریانس مارکویتز دارد.

فخار و همکاران[۲۸] (۲۰۱۷) به پژوهش پیرامون مدل بهینه‌سازی پایدار چندهدفه سبد سهام محدب پرداختند و مفهوم جدیدی از تحدب تعمیم‌یافته در یک نقطه معین برای توابع حقیقی ارائه نمودند همچنین، یک مدل چندهدفه پایدار برای یک مسئله بهینه‌سازی چندهدفه نا قطعی ارائه نمودند؛ که نتیجه تحقیق کارایی مفهوم جدید تحدب تعمیم‌یافته برای بهینه‌سازی پایدار و بهینه‌سازی پورتفولیو را نشان داد.

پلاچل[۲۹] در سال (۲۰۱۹) یک مدل برای بهینه‌سازی پایدار پورتفولیو ارائه دادند که دو بخش بهینه‌سازی پایدار و منظم سازی از طریق دست‌کاری‌های سیستماتیک مقادیر ماتریس همبستگی حاصل می‌گردد. همچنین، مدل ارائه‌شده از چهارچوبی برای واردکردن انتظارات ریسک سیستماتیک در مسئله انتخاب پورتفولیو به‌صورت سازگار و منطقی و بالتبع تکمیل مدل‌های مشابه برای انتظارات برگشت فردی، نظیر مدل بلک و لیترمن متشکل گردید.

روسادی و همکاران[۳۰] (۲۰۲۰) به ارائه مدل کوواریانس پایدار برای بهینه‌سازی متوسط-واریانس پورتفولیو پرداختند. این پژوهش، بهبودی در مدل بهینه‌سازی پورتفولیوی متوسط-واریانسی، از طریق دسته‌های تراکنش صحیح و یک برآوردگر پایدار ماتریس‌های کوواریانس ارائه می‌کند. این پژوهش بر اساس مطالعات شبیه‌سازی و نتایج تجربی نشان می‌دهد که عملکرد مدل پایدار در صورت وجود داده‌های پرت در میان داده‌ها و متوسط بودن اندازه سفارش‌ها، بهتر از روش کلاسیک است.

روچیکا و آپارانا[۳۱] (۲۰۲۰) به ارائه مدلی در راستای بهینه‌سازی پورتفولیوی پایدار با قیدهای غلبه تصادفی مرتبه دوم پرداختند. نتایج تحقیق نشان می‌دهد که پورتفولیوهای بهینه حاصل از مدل پیشنهادی بر اساس معیارهای عملکردی متعددی من‌جمله نسبت شارپ، نسبت استارا، انحراف معیار، بدترین برگشت، مقدار شرطی در ریسک، بهترین عملکرد را مقدار شرطی در ریسک نشان می‌دهد.

اشرفی و دیلی[۳۲] (۲۰۲۱) به مطالعه بهینه‌سازی پایدار پورتفولیو با استفاده از مجموعه‌های عدم قطعیت چندوجهی پرداختند. نتایج پژوهش به ارائه مدل پایدار با ایجاد تنوع در سبد سهام پرداخته.

پورتفولیوی پایدار تحقیق با چندین معیار مقایسه شد که نتایج پژوهش نشان‌دهنده کارایی بالای، مدل بهینه پایدار ارائه‌شده تحقیق می‌باشد.

رضازاده (۱۳۸۵) ارزیابی عملکرد با استفاده از شاخصه‌ای شارپ، ترینر، جنسن، نسبت ارزیابی و M^2 را برای ۱۴ شرکت سرمایه‌گذاری در سال‌های ۱۳۸۱ تا ۱۳۸۳ محاسبه و تحلیل نموده است.

عباسی و همکاران (۱۳۸۸) ارزش در معرض ریسک را با استفاده از روش پارامتریک، برای ۱۰۰ شرکت فعال در بورس اوراق بهادار تهران محاسبه نمودند، نتایج این پژوهش نشان داد که افزودن محدودیت ارزش در معرض ریسک به مدل مارکویتز، ممکن است مرز کارا را محدود کرده، آن را به یک نقطه تبدیل کند و یا از بین ببرد.

قدیری مقدم و رفیعی دارانی (۱۳۸۹) با استفاده از معیار ارزش در معرض ریسک به تعیین و بررسی پرتفوی بهینه در خصوص سهام شرکت‌های فعال صنایع غذایی بورس اوراق بهادار تهران پرداختند؛ ازجمله نتایج قابل‌توجه این مطالعه وجود ارتباط مستقیم بین ارزش در معرض ریسک و بازده مورد انتظار سرمایه‌گذاران است؛ همچنین ارتباط مستقیمی بین ارزش در معرض ریسک و تنوع پرتفوی وجود نداشت.

فرید و همکاران (۱۳۸۹) در پژوهشی با استفاده از معیار ارزش در معرض ریسک و با بهره‌گیری از روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو به ارائه الگویی برای انتخاب پرتفوی بهینه پرداختند. در این پژوهش ابتدا با استفاده از تکنیک شبیه‌سازی مونت‌کارلو، میزان ارزش در معرض ریسک چند سهم محاسبه شد و در پایان با به‌کارگیری مدل ترکیبی وزن بهینه سرمایه‌گذاری در سهم تعیین شد.

همائی فر و روغنیان (۱۳۹۵) در پژوهش خود به بهینه‌سازی پایدار سبد سرمایه‌گذاری با در نظر گرفتن افق چند دوره‌ای مدل میانگین-ارزش و هزینه مبادلات پرداختند، نتایج حاصل از حل مدل در این تحقیق حاکی از آن است که در نظر گرفتن فرض عدم قطعیت داده‌ها، در کنار سایر فروض عنوان‌شده، مقدار تابع هدف نهایی را بدتر می‌کند که نشان‌دهنده منطقی بودن جواب‌های حاصل تحقیق می‌باشد.

رهنمای رودپشتی و همکاران (۱۳۹۶) دریافتند که بازده واقعی در مدل شارپ پایدار با بازده واقعی در مدل مارکویتز (مدرن) تفاوت معناداری ندارد؛ ولی ریسک واقعی در مدل شارپ پایدار در مقایسه با ریسک واقعی در مدل مارکویتز (مدرن) تفاوت معناداری باهم دارند.

رهنمای رودپشتی و همکاران (۱۳۹۷) پژوهشی در راستای کمک به شرکت‌های سرمایه‌گذاری جهت دستیابی به ترکیب بهینه‌ای از دارایی‌ها متشکل از سهام شرکت‌های خصوصی زیرمجموعه خود و انواع دیگری از دارایی‌ها که ریسک کمتری را به همراه دارند انجام دادند که نتایج پژوهش به‌دست‌آمده حاکی

از آن است که یک سبد بهینه سبدی است که ترکیبی از دارایی‌های کم ریسک و پر ریسک را درون خود داشته باشد.

امیری و حیدی (۱۳۹۹) یک مدل برنامه‌ریزی ریاضی غیرخطی مختلط برای مسئله‌ی انتخاب سبد سهام جهت بیشینه‌سازی نسبت‌های شارپ سهام با رویکر بهینه سازی پایدار پیشنهاد و آزمون کردند که نتایج محاسباتی کارایی مدل پیشنهادی، کیفیت بالای عملکرد و کاربردی بودن مدل برنامه‌ریزی امکانی پایدار پیشنهادی را نشان می‌دهد.

رویکردهای بهینه‌سازی پایدار

سویستر (۱۹۷۳) مدلی را پیشنهاد کرد که به ازای تمام مقادیری که به مجموعه محدبی تعلق داشت. جواب بهینه شدنی باقی بماند. مدل حاصل جواب‌های تولید می‌کرد که بسیار محافظه‌کارانه بود؛ به‌طوری‌که تا حد زیادی از جواب بهینه مسئله اسمی فاصله می‌گرفت. درواقع مدل سویستر بسیار محافظه‌کارانه بود (شارما و مهرا[۳۳]،۲۰۱۳).

از آنجایی مدل سویستر بسیار محافظه‌کارانه است بن تال و نمیروفسکی در سال ۲۰۰۰ مدلی را ارائه کردند که مشکلات مدل سویستر را برطرف کرد و توانایی کنترل محافظه‌کاری را دارا بود. در مسئله آن‌ها عدم قطعیت به‌صورت بیضوی در نظر گرفته شد و بنابراین یک مسئله برنامه‌ریزی خطی تبدیل به یک مسئله برنامه‌ریزی مخروطی می‌شود (بن تا و نمیروسکی[۳۴]، ۲۰۰۰)

برتسیماس و سیم (۲۰۰۴) مدلی را برای مسائل بهینه‌سازی ارائه کردند که مشکلات مدل‌های پیشین را مرتفع ساخت. مهم‌ترین ویژگی این روش این است که همتای پایدار مسئله برنامه‌ریزی خطی به‌صورت خطی باقی می‌ماند و تضمین احتمالی برای شدنی بودن جواب ارائه کرد. در مدل برتسیماس و سیم به‌منظور پایدار بودن جواب پارامتر Γ_i تعریف می‌شود. نقش این پارامتر در محدودیت‌ها این است که سطح محافظه‌کاری مدل را تنظیم می‌کند.

به عبارتی این پارامتر نشان می‌دهد که تحلیل کر به پارامترهای مدل تا چه حدی اجازه انحراف از مقدار مرکزی خود را می‌دهد هر چه این مقدار بیشتر باشد، مدل در حالت بدبینانه‌تری موردبررسی قرار می‌گیرد زیرا امکان اینکه پارامترهای مدل (بازده دارایی‌ها) مقدار کمتری را به خود تخصیص دهند، بیشتر می‌شود نکته مهم اینجاست که اگر مقدار Γ_i را برابر صفر قرار باشد به پارامترها اجازه هیچ نوسانی داده نشده است.

حال محدودیت i ام مسئله اسمی، $\acute{a}_i x \leq b$ را در نظر بگیرید. فرض کنید J_i مجموعه ضرایب $j \epsilon J_i$، a_{ij} در بازه $[a_{ij} - \hat{a}_{ij}, a_{ij} + \hat{a}_{ij}]$ می‌گیرند. به نظر می‌رسد کمتر احتمال دارد که همه a_{ij}، $j \epsilon J_i$ هم‌زمان تغییر کنند. در اینجا هدف این است که در همه حالاتی که حداکثر $\lfloor \Gamma_i \rfloor$ تا از این ضرایب مجاز به تغییرمی باشند و یک ضریب a_{it} نیز حداکثر به‌اندازه $(\Gamma_i - \lfloor \Gamma_i \rfloor) a_{it}$ تغییر می‌کنند، موجه بودن جواب تضمین شود (برتسیماس و سیم[۳۵]، ۲۰۰۴).

به‌عبارت‌دیگر رفتار طبیعت محدود می‌شود به اینکه تنها یک زیرمجموعه‌ای از ضرایب برای متأثر کردن نامطلوب جواب تغییر می‌کنند، سپس تضمین می‌شود که اگر رفتار طبیعت بدین شکل باشد، جواب بهینه پایدار قطعات موجه خواهد بود. همچنین نشان داده می‌شود که با توجه به توزیع متقارن متغیرها، حتی اگر بیش از $\lfloor \Gamma_i \rfloor$ تا از ضرایب تغییر کنند، جواب بهینه پایدار با احتمال بسیار بالایی موجه خواهد ماند؛ بنابراین Γ_i سطح حفاظت برای محدودیت i ام نامیده می‌شود.

مدل پایدار برتسیماس سیم به‌صورت زیر فرموله می‌شود:

$$Max\acute{c}x$$

$$St.$$

$$\sum_j a_{ij} x_j + z_i \Gamma_i + \sum_{j \in J_i} p_{ij} \leq b_i \qquad \forall_i$$

$$z_i + p_{ij} \geq \hat{a}_{ij} x_j \qquad \forall_i, \forall_j \in J_i$$

$$-y_j \leq x_j \leq y_j \qquad \forall_i$$

$$l_j \leq x_j \leq u_j \qquad \forall_i$$

$$p_{ij} \geq ۰ \qquad \forall_i \ , j \in J_i$$

$$y_j \geq ۰ \qquad \forall_j$$

$$z_i \geq ۰ \qquad \forall_i$$

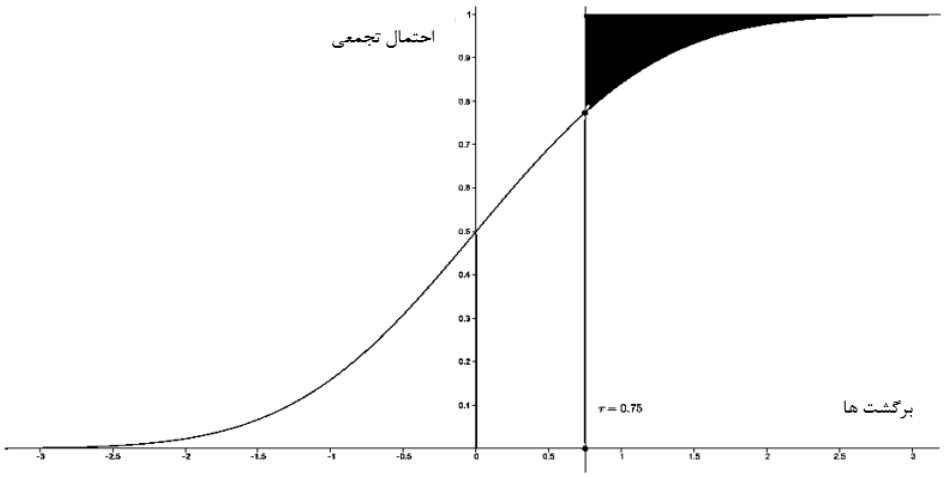
مهم‌ترین ویژگی این روش این است که همتای پایدار مسئله خطی باقی می‌ماند و هم‌چنین تضمین‌های احتمالی برای شدنی بودن جواب مسئله پایدار ارائه می‌گردد. در ارتباط با محافظه‌کاری جواب‌های پایدار می‌توان به این نکته اشاره کرد که در این متدولوژی قابلی کنترل درجه پایداری جواب وجود دارد. اگر $\Gamma_i = ۰$ باشد، هیچ محافظتی در برابر عدم اطمینان وجود ندارد و به عبارتی محدودیت‌ها همانند مسئله قطعی است. $\Gamma_i = |j_i|$ باشد، محدودیت i ام بیشترین سطح حفاظت را در برابر عدم قطعیت دارد و مدل تبدیل به مدل سویستر خواهد شد.

در این پژوهش از داده‌های گذشته برای بهینه‌سازی سبد سهام استفاده‌شده است؛ اما هدف بهینه‌سازی برای آینده است بنابراین عملاً فرض شده است که مقادیر با احتمالی متناسب با تکرارشان درگذشته احتمال وقوع درآیندِ رادارند؛ بنابراین رویکرد بهینه‌سازی پایدار این فرصت را به ما می‌دهد که فرض کنیم مقادیر با احتمال وقوعشان درگذشته، حدوداً در آینده تکرار می‌شوند؛ بنابراین با استفاده از رویکرد برتسیماس و سیم مدل بهینه‌سازی سبد سهام ارائه می‌شود که بر مبنای رویکرد امگا است.

رویکرد امگا

نسبت امگا یک معیار عملکردی است که توسط کیاتینگ و شادویک[۳۶] (۲۰۰۲) ارائه‌شده است که خطر بازگشت اندازه‌گیری عملکرد یک دارایی سرمایه‌گذاری، نمونه کارها و یا استراتژی است. اساس اصلی نسبت امگا این است که با احتساب یک آستانه از پیش تعیین‌شده τ، برگشت پورتفولیو بالاتر از هدف τ را به‌عنوان سود در نظر می‌گیرد، درحالی‌که برگشت‌های کمتر از آستانه، زیان محسوب می‌شوند. نسبت امگا را می‌توان به‌صورت نسبت بین مقدار چشم‌داشتی سودها و مقدار چشم‌داشتی زیان‌ها تعریف کرد. انتخاب مقدار برای هدف τ، بر عهده تصمیم‌گیرنده است و به‌عنوان‌مثال می‌تواند برابر با نرخ برگشت بدون ریسک در نظر گرفته شود.

شکل (۱)، یک توضیح تصویری از نسبت امگا را به ازای یک آستانه مشخص $\tau = ۰/۷۵$ را، با احتساب کل توزیع احتمال نمایش می‌دهد. نسبت امگا به‌صورت نسبت مساحت خاکستری تیره (در سمت راست آستانه و بالای خط توزیع تجمعی) تقسیم‌بر مساحت خاکستری روشن (در سمت چپ آستانه و زیرخط توزیع تجمعی) محاسبه می‌گردد. درنتیجه اگر آستانه τ به یک برگشت بسیار کوچک باشد (یعنی سمت چپ توزیع)، آنگاه نسبت امگا مقدار بزرگی خواهد داشت. در مقابل اگر τ نزدیک به یک برگشت بسیار بزرگ باشد (سمت راست توزیع)، نسبت امگا مقداری نزدیک به صفر خواهد داشت. کیاتینگ و شادویک اظهار داشته‌اند که صرف‌نظر از نوع توزیع برگشت‌ها، وقتی τ برابر متوسط برگشت توزیع باشد، نسبت امگا مقدار یک خواهد داشت. به‌علاوه، کیاتینگ و شادویک (۲۰۰۲) اذعان داشته‌اند که به ازای یک آستانه مشخص τ، قانون ساده ترجیح بیشتر نسبت به کمتر، ایجاب می‌کند که سرمایه‌گذاری‌ای با نسبت امگای بالاتر، از سرمایه‌گذاری دیگر با یک مقدار نسبت امگای کمتر مناسب‌تر است.



شکل (۱): یک توضیح تصویری نسبت امگا

معمولاً نسبت امگا برای ارزیابی و مقایسه استراتژی‌های مختلف سرمایه‌گذاری در پوشش ریسک به کار می‌رود (پریجینت[۳۷]، ۲۰۰۷).

پژوهش‌های محدودی پیرامون بهینه‌سازی امگا انجام‌شده است. علت اصلی آن است که بیشینه‌سازی نسبت امگا تا همین اواخر، قابلیت محاسباتی نداشت و لذا اغلب پژوهش‌های محدود صورت گرفته، بر طراحی الگوریتم‌های ابتکاری متمرکز بوده‌اند. تا جایی که اطلاع داریم، اولین پژوهشانی که استفاده از نسبت امگا را به‌عنوان اساس انتخاب پورتفولیوی بررسی نموده‌اند، کانی و همکاران[۳۸] (۲۰۰۹) بوده‌اند که بیشینه‌سازی نسبت امگا، به شکل مسئله بهینه‌سازی غیر محدب و غیر هموار که بهینه‌های موضعی بسیاری دارد را نشان دادند. آن‌ها از مجموعه از روش‌ها مربوط به بهینه‌سازی غیرخطی جهت حل مدل استفاده کرده و چند آزمایش‌های محاسباتی را ارائه نموده‌اند. جیلی و سچومان[۳۹] (۲۰۱۰) یک روش ابتکاری به نام پذیرش آستانه را به یک مدل بهینه‌سازی غیر محدب برای بهینه‌سازی نسبت امگا اعمال کرده‌اند. مدل آن‌ها دربردارنده آستانه‌های خرید روی وزن‌های امنیت و قیدهای کاردینال هستند که یک کران بالا و یک کران پایین را برای تعداد امنیت‌های تشکیل‌دهنده پورتفولیوی ایجاد می‌کند جیلی و همکاران[۴۰] (۲۰۱۱)، مدل بهینه‌سازی ارائه‌شده در پژوهش جیلی و سچومان[۴۱] (۲۰۱۰) را باهدف امکان‌پذیر نمودن فروش‌های کوتاه اصلاح‌کرده و عملکرد تجربی پورتفولیوی‌های انتخاب‌شده را بررسی نموده‌اند. مدل اصلاح‌شده بازهم با استفاده از یک روش ابتکاری پذیرش آستانه حل می‌شود. ماسیر[۴۲] (۲۰۱۳) نحوه حل یک مدل بهینه‌سازی نسبت امگا با استفاده از برنامه‌نویسی خطی به کمک یک تبدیل

ساده متغیرهای مسئله را نشان داده‌اند. این تبدیل تنها هنگامی کارآمد است که برگشت چشم‌داشتی پورتفولیوی بهینه بزرگ‌تر از معیار باشد (حالتی که نسبت امگای بهینه بزرگ‌تر از یک باشد). مؤلفان، مسئله را با جداسازی متغیرهای صعودی و نزولی برای هر سناریو مدل‌سازی کرده‌اند و مقرر کرده‌اند که ضرب دو متغیر در هر سناریو، صفر باشد (قیدهای مکملیت). برای دست‌یابی به مدل خطی، محققان قیدهای مکملی که باید تضمین‌کننده صفر بودن متغیر صعودی یا نزولی هر سناریو باشند را کنار گذاشته‌اند. حذف این قیدها، به این دلیل امکان‌پذیر است که این قیدها، در صورتی برقرارند که متوسط برگشت پورتفولیوی بزرگ‌تر از معیار باشند. همچنین نحوه مواجهه با بهینه‌سازی در صورت عدم برقراری این شرط نیز در پژوهش خود تشریح داده‌اند (کاپوس و همکاران[۴۳]، ۲۰۱۴).

نحوه فرمول‌بندی مجدد مسئله بیشینه‌سازی نسبت امگا به‌صورت یک مسئله بهینه‌سازی شبه مقعر و بالطبع قابلیت حل آن در زمان چندجمله‌ای، از طریق حل تعدادی مسئله مقعر را نشان داده‌اند. بوید و واندینبرگ[۴۴] (۲۰۰۴) به بیان دقیق‌تر، مؤلفان دو روش جایگزین را برای حل یک مدل بهینه‌سازی ارائه کرده‌اند که نسبت امگا را بیشینه می‌سازد. آن‌ها استفاده از یک روش جبهه بهینه برای حل دنباله‌ای از مسئله‌های بهینه‌سازی را برای حالت‌های توزیع احتمال پیوسته پیشنهاد کرده‌اند. ازآنجاکه جبهه حاصله، غیر نزولی و مقعر است، مماس رسم شده از مبدأ به جبهه، پورتفولیوی دارای بالاترین نسبت امگا را نتیجه می‌دهد. از سوی دیگر، مؤلفان نشان داده‌اند که وقتی توزیع احتمال حاکم، گسسته باشد (دارای تعدادی متناهی از نمونه‌ها باشد)، مسئله به یک برنامه خطی تقلیل می‌یابد. به بیان دقیق‌تر، مسئله به‌صورت یک برنامه خطی-کسری فرمول‌بندی می‌گردد که در آن، انحراف نزولی پورتفولیوی از آستانه، به‌صورت یک متغیر پیوسته برای هر نمونه مدل‌سازی شده و در قیدها، مقید می‌گردد. درنهایت، پیرو مقاله ارائه‌شده توسط کاپوس و همکاران[۴۵] (۲۰۱۴) یک نسخه قدرتمند از مدلی برای بیشینه‌سازی نسبت امگا، در پژوهش خود ارائه دادند، تحت سه نوع عدم قطعیت برای توزیع احتمال برگشت‌ها بررسی گردیده است.

آمیتا و آپارنا[۴۶] (۲۰۱۵) بیان داشتند که پورتفولیوهای بهینه حاصل از بهینه‌سازی بسط یافته نسبت امگا، نسبت به پورتفولیوهای بهینه حاصل از بهینه‌سازی نسبت امگا، ازلحاظ ریسک مربوطه کمتر، برتری دارند و به‌واسطه داشتن یک نسبت امگای بالاتر، بهتر از پورتفولیوهای بهینه حاصل از مدل ریسک متوسط متناظر می‌باشند.

وای[۴۷] (۲۰۱۶) نشان می‌دهد که برخلاف نسبت شارپ رایج، نسبت امگا با تسلط تصادفی مرتبه دوم، سازگار است. بالدر و اسکویزی[۴۸] (۲۰۱۷) وضعیت‌های سازگاری و وضعیت‌های عدم سازگاری نسبت امگا

و معیارهای عملکردی مربوطه با تسلط تصادفی مرتبه دوم را مشخص تشریح کردند و نشان دادند که معیارهای عملکردی مرتبط به هم دارای ویژگی‌های سازگاری بهترو هم‌چنین انعطاف‌پذیری بالاتر می‌باشند.

برنارد و همکاران[۴۹] (۲۰۱۸) نشان دادند که استراتژی بیشینه‌سازی نسبت امگا همچنان ریسک بالایی دارد و می‌تواند با انتخاب صورت گرفته توسط سرمایه‌گذاران خنثی نسبت به ریسک، منطبق شود درنتیجه در هنگام استفاده از نسبت امگا در اتخاذ تصمیمات تخصیص دارایی، باید احتیاط شود.

کاپورین و همکاران[۵۰] (۲۰۱۸) نشان دادند که نسبت امگا با غلبه تصادفی مرتبه دوم، ناسازگار است. همچنین‌پورتفولیوهای بهینه‌مبتنی برامگا می‌توانند بسته به‌کاررفته درامگا، ارتباط نزدیکی با پارادایم‌های بهینه‌سازی کلاسیکی داشته باشند.

گول و میرا[۵۱] (۲۰۲۰)، شایستگی استراتژی فیلترینگ را نشان دادند و عملکرد پورتفولیوهای امگا کاپیولای پایدار را موردبررسی قراردادند. پورتفولیوهای بهینه حاصل از مدل امگای کاپیولای بدترین حالت، به‌واسطه داشتن نسبت اطلاعات بالاتر، نسبت ارزش در ریسک بالاتر و نسبت راچف بالاتر در مقایسه با پورتفولیوی‌های حاصل از مدل نسبت امگای کاپیولای گاؤسی، بهتر است.

مدل بهینه‌سازی پایدار سبد سهام با رویکرد امگا

در این قسمت مدل خطی سبد سهام با رویکرد امگا در شرایط قطعی معرفی می‌شود، ابتدا متغیرهای مربوطه معرفی می‌شود سپس مدل خطی سبد سهام با رویکرد امگا که نتیجه پژوهش گواستاروبا و همکاران[۵۲] (۲۰۱۶) است تشریح و در انتها مدل بهینه‌سازی پایدار امگا سبد سهام با رویکرد برتیسیماس و سیم ارائه‌شده است، در این تحقیق دو سناریو داریم که α (بازده اضافی معین) و t (دوره زمانی) را نشان می دهد

متغیرهای مدل بهینه سازی امگا در شرایط قطعی به شرح است:

مجموعه اوراق سرمایه گذاری	j
میانگین نرخ بازده	μ_j
سهام پرتفوی	x_j
احتمالات عمومی	p_t
متغیر غیر منفی	d_t
میانگین نرخ بازده در سناریوی tو α که $\mu^\alpha = \sum_{t=1}^{T} r_t^\alpha p_t$	μ^α

r_t^α نرخ بازده پرتفوی تصادفی در سناریوی tو α

r_{jt} متغیر تصادفی نرخ بازده تحت سناریو t

با توجه به نمادهای فوق مدل بهینه‌سازی امگا با رویکرد ریسک منفی به‌صورت زیر ارائه می‌شود

$$maximize\ \ \upsilon - \mu^\alpha \upsilon. \qquad (۱)$$

با این فرض که؛

$$z_۱ = \sum_{t=۱}^{T} d_t p_t \qquad \upsilon. = ۱/z_۱$$

$$Z = \sum_{j=۱}^{n} \mu_j x_j \qquad \upsilon = z/z_۱$$

$$\sum_{j=۱}^{n} \tilde{x}_j = \upsilon., \qquad \upsilon. \le M, \qquad \tilde{x}_j \ge ۰ \qquad for\ j = ۱, \dots, n \qquad (۲)$$

با این فرض که؛

$$\tilde{x}_j = {x_j}/{z_۱}$$

$$\sum_{j=۱}^{n} \mu_j \tilde{x}_j = \upsilon \qquad (۳)$$

$$\sum_{j=۱}^{n} r_{jt} \tilde{x}_j = \tilde{y}_t \qquad for \quad t = ۱, \dots, T \qquad (۴)$$

با این فرض که؛

$\tilde{y} = \frac{y_t}{z_۱}$ و هر متغیر y_t به‌عنوان نرخ بازده پورتفولیو تحت سناریوی t تعریف‌شده که

$y_t = \sum_{j=۱}^{n} r_{jt} x_j$ است.

$$\sum_{t=۱}^{T} \tilde{d}_t p_t = ۱ \qquad (۵)$$

با این فرض که؛

$$\tilde{d}_t = {d_t}/{z_۱}$$

$$\tilde{d}_t \ge \mu^\alpha \upsilon. - \tilde{y}_t, \tilde{d}_t \ge ۰ \qquad for\ \ t = ۱, \dots, t \qquad (۶)$$

پس از حل مسئله فوق مقدار متغیرها تصمیم را می‌توان به شرح زیر تعیین نمود

مقدار متغیرهای اصلی x_j را می‌توان با تقسیم $\tilde{x_j}$ بر $v.$ تعیین کرد و $\mu(R_X)$ میانگین نرخ بازده در پرتفوی x است که $v/v.$ قابل‌محاسبه است و $\delta_{\mu^\alpha}(R_X)$ معیار اندازه‌گیری ریسک با تابع هدف میانگین نرخ بازده در سناریو t و α از طریق $1/v.$ به دست می‌آید.

همتای پایدار مدل امگا

با توجه به توضیحاتی که در مورد مدل‌سازی پایدار به روش سیم و برتیسماس ارائه شد، در این قسمت به مدل‌سازی مسئله پرداخته‌شده است، مدل پایدار امگا به شرح زیر ارائه گردیده است؛

حداقل درجه اطمینان برقراری محدودیت غیرقطعی را با رویکرد تصمیم‌گیری بدبینانه	β
ضریب وزنی تابع هدف	φ
هزینه جریمه	η
امید ریاضی مقدار تابع هدف	E_t
حداکثر مقدار قابل تخصیص در تابع هدف	T_{max}
حداقل مقدار قابل تخصیص در تابع هدف	T_{min}

$$max\ T = E_t + \varphi * (T_{max} - T_{min}) - \eta * \sum_{j=1}^{J} \left(\mu_2^\alpha - \mu_1^\alpha - \beta \left(\mu_2^\alpha - \mu_1^\alpha \right) \right) \quad (7)$$

$s.t.$:

$$\sum_{j=1}^{J} \tilde{X}_j = v. \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^{J} \mu_j . \tilde{X}_j = v \quad (9)$$

$$\sum_{j=1}^{J} r_{jt} . \tilde{X}_j = \tilde{Y}_t, \quad \forall t = 1,2,\dots,T \quad (10)$$

$$\sum_{t=۱}^{T} p_t . \tilde{d}_t = ۱ \quad (۱۱)$$

$$\tilde{d}_t \geq \mu_{۱}^{\alpha} \nu_. - \tilde{Y}_t, \quad \forall t = ۱,۲,\dots,T \quad (۱۲)$$

$$T_{max} = \nu - \mu_{۱}^{\alpha} \nu_. \quad (۱۳)$$

$$T_{min} = \nu - \mu_{۴}^{\alpha} \nu_. \quad (۱۴)$$

$$E_t = \nu - \left[\frac{\mu_{۱}^{\alpha} + \mu_{۲}^{\alpha} + \mu_{۳}^{\alpha} + \mu_{۴}^{\alpha}}{۴}\right] \nu_. \quad (۱۵)$$

$$\tilde{X}_j, \tilde{Y}_t, \tilde{d}_t, T_{max}, T_{min}, E_t, \nu, \nu_. \geq ۰ \quad (۱۶)$$

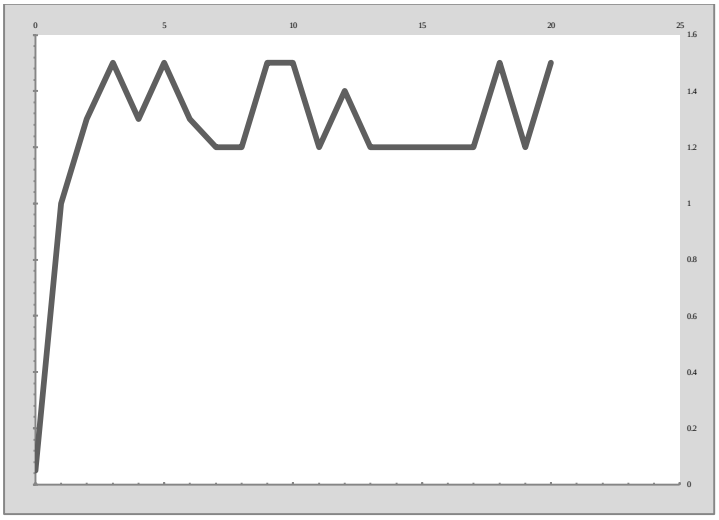
نتایج محاسباتی

حال یک مثال عددی برای بهینه‌سازی امگا با رویکرد برتیسیماس و سیم ارائه‌شده و باحالت قطعی مقایسه خواهد شد. در مثال ۲۰ سهم تحت شاخص S&P ۵۰۰ از سال ۲۰۱۸ تا ۲۰۲۰ به مدت سه سال به‌صورت تصادفی انتخاب‌شده و از بازده ماهانه این سهام برای تجزیه‌وتحلیل استفاده می‌شود. داده‌های به‌دست‌آمده داده‌های تاریخی بوده و از این داده‌ها برای تشکیل سبد بهینه سهام استفاده می‌شود. لیکن در برآورد بازده مورد انتظار هر یک از سهام، باید عدم قطعیت مربوطه را لحاظ نمود، ازاین‌رو برای در نظرگیری عدم قطعیت از رویکرد پایدار برتیسیماس و سیم برای مدل‌سازی استفاده‌شده و یک نوسان ۲۰ درصدی (متوسط نوسان ماهانه) لحاظ می‌شود، نقش پارامتر Γ در محدودیت‌ها، تنظیم نمودن میزان پایداری در مقابل سطح محافظه‌کاری جواب است. که سطح پایدار بودن را برای تابع هدف کنترل می‌کند. مقدار Γ به مقدار پارامتر غیرقطعی تحقیق می‌باشد که در این تحقیق ۲۰ پرتفوی غیرقطعی داریم که تا سطح ۲۰ مشخص‌شده است.. اثبات‌شده است که اگر سطح حفاظت تا سقف تعداد پارامترهای عدم قطعیت تغییر کنند، شدنی بودن جواب پایدار تضمین‌شده است. همه تغییرات ممکن در ضرایب هزینه در نظر گرفته می‌شود که محافظه‌کارانه‌ترین حالت می‌باشد. امگا (تابع هدف) نتیجه تابع هدف تحقیق را نشان می‌دهد. بازده مؤلفه غیرقطعی در مدل در نظر گرفته‌شده می‌باشد که میزان بازده با توجه به معیار سطح حفاظت و معیار ریسک امگا می‌باشد.

جدول (۱). نتایج حل مسئله

بازده	امگا (تابع هدف)	Γ
۰,۰۳	۰,۰۵	۰
۰,۱۳	۱	۱
۰,۱۷	۱,۳	۲
۰,۱۴	۱,۵	۳
۰,۱۴	۱,۳	۴
۰,۱۹	۱,۵	۵
۰,۱۴	۱,۳	۶
۰,۱۵	۱,۲	۷
۰,۱۵	۱,۲	۸
۰,۲	۱,۵	۹
۰,۲	۱,۵	۱۰
۰,۱۶	۱,۲	۱۱
۰,۱۶	۱,۴	۱۲
۰,۱۷	۱,۲	۱۳
۰,۱۵	۱,۲	۱۴
۰,۱۶	۱,۲	۱۵
۰,۱۶	۱,۲	۱۶
۰,۱۷	۱,۲	۱۷
۰,۲	۱,۵	۱۸
۰,۱۷	۱,۲	۱۹
۰,۲	۱,۵	۲۰

مدل پایدار مربوطه با استفاده از روابط (۷) الی (۱۶) توسعه می‌یابد که با توجه به خطی بودن مدل حاصله، به کمک یکی از نرم‌افزارهای رایج حل مسائل پژوهش در عملیات، مدل حل و نتایج جدول (۱) حاصل‌شده است.



شکل (۲). تغییرات تابع هدف در مقابل تغییرات هزینه پایداری

همان‌طور که در جدول (۱) مشخص است هزینه پایداری به مفهوم افزایش سطح محافظه‌کاری است و درنتیجه موجب می‌شود تابع هدف افزایش یابد. تابع هدف از نوع کمینه‌سازی بوده و به معنی ریسک است، اما با افزایش سطح محافظه‌کاری و درنتیجه نوسان پارامترها مقدار آن بهتر نمی‌شود و این نشان‌دهنده تأثیر عدم قطعیت داده‌ها بر روی این مسئله است. شکل (۲) به‌خوبی این تغییر تابع هدف را در مقابل تغییرات هزینه پایداری نمایش می‌دهد.

با استفاده از مدل ارائه‌شده در این مقاله می‌توان بهترین جواب ممکن (جواب بهینه) را در بدترین شرایط ممکن (حداکثر نوسان داده‌ها) یافت. درواقع می‌توان اطمینان داشت که ریسک سبد سهام در یک سطح محافظه‌کاری مشخص از مقادیر ارائه‌شده بدتر نخواهد شد و بهترین حالت ممکن در بدترین شرایط نوسان داده‌ها ارائه می‌گردد. به‌عبارتی‌دیگر، سرمایه‌گذاران ریسک گریز تمایل دارند سبد بهینه‌ای تحت بدترین شرایط ممکن را داشته باشند که مدل ارائه‌شده در این مقاله می‌تواند پاسخی به این نیاز باشد. از طرفی دیگر، تفاوت بین مدل پایدار با مدل قطعی در جدول نتایج پژوهش به‌صورت تفاوت در ردیف اول با سایر ردیف‌ها بیان می‌شود. ردیف اول جدول (۱) نتیجه حل مدل در شرایط قطعی بوده و سایر ردیف‌ها نتایج حل مدل در شرایط عدم قطعیت است.

همچنین نتایج نشان می‌دهد در شرایط لحاظ عدم قطعیت داده‌ها و با افزایش سطح محافظه‌کاری و همچنین افزایش هزینه پایداری، بازده انتظاری سبد سهام در جواب بهینه افزایش می‌یابد. دلیل این امر را می‌توان در افزایش نوسان داده‌ها جستجو کرد، هر چه نوسان بازده سهام بیش‌تر باشد میزان ریسک نیز افزایش پیدا می‌کند؛ اما از طرفی بازده انتظاری نیز بیش‌تر می‌شود. این نتایج قابل پیش‌بینی بوده است به این معنی که در پژوهش برتسیماس و سیم نشان داده‌شده که با افزایش هزینه پایداری و افزایش سطح محافظه‌کاری مقدار تابع هدف بهتر نمی‌شود و بعد از مقدار معینی همگرا می‌شود. در تفسیر این همگرایی می‌توان به ماهیت ریاضی مدل پایدار اشاره نمود. در بهینه‌سازی پایدار یک تعادل بین بهینگی و شدنی بودن مسئله در شرایط نوسان داده‌ها وجود دارد. با افزایش نوسان داده‌ها امکان رسیدن به ناحیه نشدنی وجود داشته، اما ماهیت بهینه‌سازی پایدار مانع از این امر شده و درنتیجه از یک سطح معینی به بعد مقدار تابع هدف و جواب به مقدار ثابت همگرا می‌شوند.

نتیجه‌گیری و بحث

از مهم‌ترین ویژگی‌های بازارهای مالی وجود عدم قطعیت در آن‌ها هست. از مهم‌ترین اجزایی که در بازارهای مالی دارای عدم قطعیت است ریسک است. ازاین‌رو انگیزه انتخاب موضوع این پژوهش استفاده از متدولوژی است که امکان مدل‌سازی مسائل مالی منطبق با واقعیت را به وجود بیاورد. یکی از مهم‌ترین دغدغه‌های مدل‌سازی‌ها انطباق مدل‌های ریاضی با واقعیت است و در دنیای واقعی عدم قطعیت یکی از موارد قطعی است. ازاین‌رو، می‌توان به اهمیت دخالت داده‌های با عدم قطعیت در مدل‌های ریاضی پی برد. در کاربردهای دنیای واقعی بهینه‌سازی خطی، هیچ‌کس نمی‌تواند امکان این‌که یک عدم قطعیت کوچک در داده‌ها می‌تواند یک جواب بهینه معمولی را، ازنقطه‌نظر عملی کاملاً بی‌معنی کند، نادیده بگیرد.

در مدل‌سازی پایدار، خطر به‌کارگیری اشتباه یا استفاده غلط از داده‌های غیرقطعی، بسیار کمتر هست پایداری به این مفهوم است که خروجی مدل نباید خیلی نسبت به مقادیر دقیق پارامترها و ورودی مدل حساس باشد. از دیگر مزایای این مدل‌ها این است که به‌راحتی می‌توان آن‌ها را به مدل‌های برنامه‌ریزی عدد صحیح تبدیل کرد مدل خطی سبد بهینه سهام در مدیریت سبد سهام به‌وفور می‌تواند مورداستفاده قرار گیرد. با توجه به معایبی که در مورد رویکرد کلاسیک بهینه‌سازی پایدار وجود دارد، بررسی رویکردهای جدید بهینه‌سازی پایدار توجیه‌پذیر و حتی ضروری است. هدف از انجام این پژوهش ارائه تصویری از بهینه‌سازی پرتفوی با در نظر گرفتن رویکرد امگا است؛ به‌گونه‌ای که در صورت تعیین این رابطه می‌توان پرتفوی بهینه‌ای تشکیل داد که بر اساس آن به بتوان ریسک پرتفوی را تخمین زد.

در این پژوهش با در نظر گرفتن پارامتر غیرقطعی بازده در مدل خطی قطعی اولیه با استفاده از بهینه‌سازی پایدار روش برتیسماس سیم به مدل غیرقطعی و همتای پایدار تبدیل‌شده، سپس این مدل در گمز کد نویسی شده و جواب بهینه ارائه گردید. با توجه به اینکه مسئله محدب است جواب بهینگی سراسری دارد و جواب بهینه قطعی می‌باشد.

مدل ما بدون در نظر گرفتن عدم قطعیت در بازده غیرواقعی و دارای پراکندگی و نوسان بالای بود که با در نظر گرفتن عدم قطعیت در متغیر بازده مدل و ارائه همتای پایدار، مدل امگا دارای نوسان کمتری شد. جواب مدل بهینه این تحقیق قطعی و سراسری می‌باشد با توجه به محدب بودن مسئله و خطی بودن مدل. نوسانات در مدل بهینه امگا تحت تأثیر، عدم قطعیت و داده‌ها می‌باشد که این داده‌ها می‌تواند تحت تأثیر عوامل سیاسی بحران‌های مالی توسعه‌نیافتگی و سایر عوامل قرار گیرد.

مدل ارائه‌شده در این پژوهش که ازیک‌طرف رویکرد امگا را به‌عنوان یک رویکرد ریسک منفی در خود دارا و مزیتی بر بهینه‌سازی مدل نهایی خواهد بود و از طرفی دیگر مدل نهایی یک مدل خطی است.

در این مقاله، مسئله انتخاب سبد سهام با در نظرگیری عدم قطعیت داده‌های ورودی موردبررسی قرار گرفت. سنجه ریسک استفاده‌شده در این مقاله، نسبت امگا است که جزو جدیدترین و به‌روزترین سنجه‌های ریسک در مسائل سرمایه‌گذاری است. جهت در نظر گرفتن عدم قطعیت داده‌ها از رویکرد بهینه‌سازی پایدار برتسیماس و سیم استفاده شد. از مهم‌ترین ویژگی‌های مدل ارائه‌شده وجود چیرگی تصادفی در این مدل است. تجزیه‌وتحلیل تجربی نتایج نشان می‌دهد که مدل پایدار ارائه‌شده در عمل در مقابل نوسان پذیری داده‌ها پایدار بوده و مهم‌تر این‌که انعطاف‌پذیری بیشتری در تحلیل مالی برای سرمایه‌گذاری ارائه می‌دهد. مدل ارائه‌شده در این مقاله یک مدل برنامه‌ریزی خطی و دارای برتری‌های محاسباتی است. همچنین، نشان می‌دهد درصورتی‌که سطح محافظه‌کاری افزایش یابد مقدار تابع هدف افزایش می‌یابد. این مدل بهترین سبد سهام ممکن را در بدترین حالت نوسان داده‌ها ارائه می‌دهد. از مهم‌ترین ویژگی‌های این مدل می‌توان به برنامه‌ریزی خطی بودن اشاره نمود که باعث می‌شود این مدل به‌راحتی به کمک نرم‌افزارهای رایج پژوهش در عملیات قابل‌حل باشد.

منابع

۱) رستمی، علی؛ رستمی، محمدرضا؛ چاوشی، کاظم؛ نیک‌نیا، نرگس. بررسی تأثیرتنوع‌بخشی پرتفوی بر ریسک‌نامطلوب در بورس اوراق بهادار تهران. چشم‌اندازمدیریت مالی؛ ۱۳۹۴. شماره۱۲. ص ۱۰۹-۱۳۳.

۲) رهنمای رودپشتی، فریدون؛ ساده، احسان؛ فلاح شمس، میرفیض؛ احتشام راثی، رضا؛ جلیلیان، جمیل؛ حل مسئله بهینه‌سازی سبد سهام شرکت‌های خصوصی در شرایط کمبود داده با استفاده از الگوریتم کلونی زنبورعسل (ABC). مجله‌مهندسی‌مالی‌ومدیریت اوراق بهادار؛ ۱۳۹۷. شماره ۳۵، ص ۱۰۴-۷۷.

۳) رهنمای رودپشتی، فریدون؛ نیکومرام، هاشم؛ طلوعی اشلقی، عباس؛ حسین زاده لطفی، فرهاد؛ بیات، مرضیه. بررسی کارایی بهینه‌سازی پرتفوی با استفاده از ماکزیمم نسبت شارپ پایدار در مقایسه با بهینه‌سازی مارکویتز. چشم‌انداز مدیریت مالی؛۱۳۹۶. شماره ۱۸، ص ۱۴۵-۱۲۵.

۴) سرچشمی، محمد؛ خدامی پور، احمد؛ محمدی، مجید، زینلی، حدیث. به‌کارگیری مدل‌های یادگیری ماشین در تشکیل پرتفوی بهینه سهام و مقایسه کارایی آن‌ها. فصلنامه مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار؛ ۱۳۹۹. شماره ۴۵. صص ۱۴۷-۱۷۵.

۵) امیری، مقصود؛ حیدری، محمد سعید؛ ارائه‌ی مدل برنامه‌ریزی استوار امکانی برای انتخاب سبد سهام بر مبنای نسبت شارپ. نشریه علمی دانش مالی تحلیل اوراق بهادار.۱۳۹۹، شماره ۴۷، صص۱-۱۶.

۶) همائی فر، ساغر؛ روغنیان؛ عماد. به‌کارگیری الگوی بهینه‌سازی پایدار و برنامه‌ریزی آرمانی در مسئله انتخاب سبد سرمایه‌گذاری چند دوره‌ای. مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، ۱۳۹۵. شماره ۲۸، صص ۱۵۳-۱۶۷.

۷) Abbasi, Ebrahim. Using Value at Risk in Optimum Portfolio Selection inTehran Stock Exchange, Journal Economic Research.۲۰۰۸. ۸۷.

۸) Amita, Sharam. Aparna, Mehra. Extended omega ratio optimization for risk-averse investors.International Transactions In Operational Research.۲۰۱۵,۱–۲۲

۹) Ashrafi, Hedieh. Thiele, Aur´elie C. A study of robust portfolio optimization with European options using polyhedral uncertainty sets. Operations Research Perspectives. ۲۰۲۱, Volume ۸. ۱۰۰۱۷۸.

۱۰) Ayub, Usman & Shah, Syed Zulfiqar Ali & Abbas, Qaisar. "Robust analysis for downside risk in portfolio management for a volatile stock market, Economic Modelling, Elsevier, ۲۰۱۵, vol. ۴۴(C), pages ۸۶-۹۶.

۱۱) Balder. Sven, Schweizer. Nikolaus. Riskaversionvs.the Omegaratio: Consistency results. Finance Research Letters.۲۰۱۷. ۱-۷.

۱۲) Bayat, Marzieh and Rahnamay Roodposhti, Fereydoon. Explanation Efficiency of Robust Portfolio Optimization Value-At-Risk, Journal of financial engineering and securities management.۲۰۱۴.

۱۳) Beasley J.E. Meade, N. and Chang. T.J. An evolutionary heuristic for the index tracking problem. European Journal of Operational Research.۲۰۰۳. ۱۴۸(۳):۶۲۱–۶۴۳.

۱۴) Ben-Tal, A. & Nemirovski, A. Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data. Mathematical programming.۲۰۰۰,۸۸(۳), ۴۱۱-۴۲۴.

۱۵) Bernard, Carole,Vanduffel, Steven, Ye, Jiang. Optimal strategies under Omega ratio. European Journal of Operational Research.۲۰۱۸,۹-۵۳

۱۶) Bertsimas, D.& Sim, M. The price of robustness. Operations Research,۲۰۰۴. ۵۲(۱), ۳۵-۵۳.

۱۷) Boyd S. and Vandenberghe. L. Convex Optimization. Cambridge University Press.۲۰۰۴.

۱۸) Canakgoz N.A. and Beasley. J.E. Mixed-integer programming approaches for index tracking and enhanced indexation. European Journal of Operational Research.۲۰۰۹,۱۹۶(۱):۳۸۴–۳۹۹.

۱۹) Caporin,Massimiliano, Costola, Michele, Jannin, Gregory, Maillet, Bertrand. On the (Ab)use of Omega? Journal of Empirical Finance.۲۰۱۸,۴۶,۱۱-۳۳.

۲۰) Fabbozi, Frank. Robust Portfolio Optimization and Management, ۲۰۰۷.

۲۱) Fabozzi Frank J. Woo Chang Kim and Jang Ho Kim "Deciphering robust portfolios" Journal of Banking & Finance, ۲۰۱۴, vol. ۴۵, issue C, ۱-۸.

۲۲) Fakhar, M, Mahyarinia,M.R. Zafarani,J. On Nonsmooth Robust Multiobjective Optimization Under Generalized Convexity With Applications To Portfolio Optimization, European Journal of Operational Research.۲۰۱۷. ۴-۲۷.

۲۳) Farid, Darush, Using Value at risk and Selection an Optimal Portfolio by Monte Carlo Simulation Technique (MCS) In Tehran Stock Exchange, Knowledge and Development, ۲۰۰۹.

۲۴) Filippi, C. Guastaroba, G. and Speranza. M.G. A heuristic framework for the bi-objective enhanced index tracking problem. Submitted.۲۰۱۴.

۲۵) Gilli M. and Schumann. E. Distributed optimisation of a portfolio’s Omega. Parallel Computing.۲۰۱۰,۳۶(۷):۳۸۱–۳۸۹.

۲۶) Gilli, M. Schumann, E. di Tollo, G. and Cabej. G. Constructing ۱۳۰/۳۰-portfolios with the Omega ratio. Journal of Asset Management.۲۰۱۱. ۱۲(۲):۹۴–۱۰۸.

۲۷) Goel, Anubha, Mehra, Aparan.Robust Omega ratio optimization using regular vines. Optimization Letters.۲۰۲۰. ۵-۲۹.

۲۸) Guastaroba G. and Speranza. M.G. search: An application to the index tracking problem. European Journal of Operational Research.۲۰۱۲. ۲۱۷(۱):۵۴–۶۸.

۲۹) Guastaroba, G. Mansini, W. Ogryczak, M.G. Speranza. Linear programming models based on Omega ratio for the Enhanced Index Tracking Problem.۲۰۱۶. volume ۲۵۱, pages ۹۳۸-۹۵۶.

۳۰) Kane, S.J. Bartholomew-Biggs, M.C. Cross, M. and Dewar. M. Optimizing Omega. Journal of Global Optimization.۲۰۰۹. ۴۵(۱):۱۵۳–۱۶۷.

۳۱) Kapsos, M. Christofides, N. Rustem, B.and Zymler. S. Optimizing the Omega ratio using linear programming. The Journal of Computational Finance, Forthcoming.۲۰۱۴.

۳۲) Keating C. and Shadwick. W.F. A universal performance measure. The Journal of Performance Measurement.۲۰۰۲. ۶(۳):۵۹–۸۴.

۳۳) Koshizuka, T. Konno, H. and Yamamoto. R. Index-plus-alpha tracking subject to correlation constraint. International Journal of Optimization: Theory, Methods and Applications.۲۰۰۹. ۱(۲):۲۱۵–۲۲۴.

۳۴) Lejeune M.A. and Samatlı-Pa G. Construction of risk-averse enhanced index funds. INFORMS Journal on Computing.۲۰۱۳. ۲۵(۴):۷۰۱–۷۱۹.

۳۵) Lejeune. M.A. Game theoretical approach for reliable enhanced indexation. Decision Analysis.۲۰۱۲. ۹(۲):۱۴۶–۱۵۵

۳۶) Li, Q.Sun, L. and Bao. L. Enhanced index tracking based on multi-objective immune algorithm. Expert Systems with Applications.۲۰۱۱,۳۸(۵):۶۱۰۱–۶۱۰۶.

۳۷) Mansini, R. Ogryczak, W. and Speranza M.G. Linear and Mixed-Integer Programming for portfolio. Springer.۲۰۱۵.

۳۸) Mansini, R. Ogryczak, W. and Speranza. M.G.Twenty years of linear programming based portfolio optimization. European Journal of Operational Research.۲۰۱۴,۲۳۴(۲):۵۱۸–۵۳۵.

۳۹) Mausser, H. Saunders, D. and Seco. L. Optimizing Omega. Investment Management.۲۰۱۳,۴۰(۱۰):۲۴۱۸–۲۴۲۸.

۴۰) Meade N. and Beasley. J.E. Detection of momentum effects using an index out-performance strategy. Quantitative Finance.۲۰۱۱,۱۱(۲):۳۱۳–۳۲۶.

۴۱) Mezali H.and Beasley. J.E.Quantile regression for index tracking and enhanced indexation. Journal of the Operational Research Society.۲۰۱۳,۶۴(۱۱):۱۶۷۶–۱۶۹۲.

۴۲) Plachel, Lukas. A Unified Model for Regularized and Robust Portfolio Optimization. Journal of Economic Dynamics & Control.۲۰۱۹. S۰۱۶۵-۱۸۸۹(۱۹)۳۰۱۷۶-۹.

۴۳) Prigent. L. Portfolio Optimization and Performance Analysis. Chapman & HallCRC Financial Mathematics Series.۲۰۰۷.

۴۴) Rom, Brian M; Ferguson, Kathleen W; Post-Modern Portfolio Theory Comes of Age, The Journal of Investing.۱۹۹۳.

۴۵) Roman, D. Mitra, G. and Zverovich. V. Enhanced indexation based on second-order stochastic dominance. European Journal of Operational Research.۲۰۱۳. ۲۲۸(۱):۲۷۳–۲۸۱.

۴۶) Rosadi, Dedi, Setiawan, Ezra Putranda, Templ, Matthias, Filzmoser, Peter. Robust Covariance Estimators for Mean-Variance Portfolio. Optimization with Transaction Lots. Operations Research Perspectives.۲۰۲۰,S۲۲۱۴-۷۱۶۰(۲۰)۳۰۰۴۴-۰.

۴۷) Ruchika, Sehgal. Aparna, Mehra. Robust portfolio optimization with second order stochastic dominance constraints. Computers & Industrial Engineering. ۲۰۲۰. ۱۰۶۳۹۶.

۴۸) Sharma, A. & Mehra, A. Portfolio selection with a minimax measure in safety constraint. Optimization.۲۰۱۳. ۶۲(۱۱), ۱۴۷-۱۵۰۰.

۴۹) Sharpe. W.F. Mutual fund performance. Journal of Business,۱۹۶۶,۳۹(۱):۱۱۹–۱۳۸.

۵۰) Sheikh, Mohammad Javad. Performance Evaluation of Tehran Stock Exchange Brokerage Firms with Fuzzy Analytic Hierarchy Process and TOPSIS Methods, Journal of Financial Management Perspective.۲۰۱۴. ۳.

۵۱) Sortino F.A. and Price. L.N. Performance measurement in a downside risk framework. The Journal of Investing.۱۹۹۴. ۳(۳):۵۹-۶۴.

۵۲) Valle, C.A. Meade, N. and Beasley. J.E. Absolute return portfolios. Omega.۲۰۱۴. ۴۵(۰):۲۰–۴۱.

۵۳) Wai, mun fog, Stochasticdominanceandthe omegaratio. Finance Research Letters.Finance Research Letters.۲۰۱۶. ۱۷. ۷-۹.

۵۴) Wilding. T. Using genetic algorithms to construct portfolios. In S. Satchell and A. Scowcroft, editors, Advances in Portfolio Construction and Implementation, pages.۲۰۰۳. ۱۳۵–۱۶۰.

۵۵) Wu, L.C. Chou, S.C. Yang, C.C. and Ong. C.S. Enhanced index investing based on goal programming. The Journal of Portfolio Management.۲۰۰۷,۳۳(۳):۴۹–۵۶.

یادداشت‌ها :

۱ Robust Estimation
۲ Post Modern Portfolio Theory PMPT
۳ Sheikh
۴ Rom et al.
۵ Feasibility Robustness
۶ Optimality Robustness
۷ Hodges
۸ Zakamouline
۹ Koekebakker
۱۰ Lo
۱۱ Mertens
۱۲ Goldfarb
۱۳ Iyengar
۱۴ Koeni
۱۵ Tutuncu
۱۶ Christie
۱۷ Opdyke
۱۸بازدهی‌های دارایی تحت بررسی مستقل بوده و عیناً دارای توزیع متغیرهای تصادفی نرمال هستند.

۱۹نظریه ارگئدیک مربوط به شاخه‌ای از علم ریاضیات است که سیستم‌های پویا با یک معیار ثابت و مسائل مربوط به آن‌ها را بررسی می‌کند.

۲۰ DeMiguel
۲۱ Nogales
۲۲ Zymler
۲۳ Bertsimas
۲۴ Ben-Tal
۲۵ Nemirovski
۲٦ Fabozzi et al.
۲۷ Ayub et al.
۲۸ Fakhar et al.
۲۹ Plachel
۳۰ Rosadi et al.
۳۱ Ruchika &Aparna
۳۲ Ashrafi, Hedieh. Thiele
۳۳ Sharma, A. & Mehra,
۳۴ Ben-Tal & Nemirovski
۳۵ Bertsimas & Sim
۳۶ Keating & Shadwick
۳۷ Prigent
۳۸ Kane et al
۳۹ Gilli & Schumann
۴۰ Gilli et al.
۴۱ Gilli& Schumann
۴۲ Mausser et al.
۴۳ Kapsos et al.
۴۴ Boyd & Vandenberghe
۴۵ Kapsos et al.
۴۶ Amita & Aparna
۴۷ Wai
۴۸ Balder & Schweizer
۴۹ Bernard et al.
۵۰ Caporin
۵۱ Goel, Anubha, Mehra
۵۲ Guastaroba et al.