پژوهش‌های حسابداری مالی و حسابرسی
دورهٔ ۱٤ / شمارهٔ ۳ (پیاپی ٥٥)/ پائیز ۱٤۰۱
صفحه ۱۰۳ تا ۱۲۰
https://doi.org/10.30495/faar.2022.1957450.3478

تعیین جواب بهینه معادله تصادفی-مالی فاینمن-کاک بر پایه بسط ژاکوبی و ایرفویل

سیدمحمد علوی ششتمد [۱]
شادان صدیق بهزادی [۲]

تاریخ دریافت: ۱٤۰۱/۰٤/۱٤ تاریخ پذیرش: ۱٤۰۱/۰٦/۱٦

چکیده

در این مقاله، معادله فاینمن-کاک را با روش هم محلی با پایه‌های ژاکوپی و ایرفویل، حل می‌کنیم .این معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی یکی از معادلات مهم و پرکاربرد تصادفی در ریاضیات مالی است.به دلیل افزایش تقاضادر علوم کاربردی مثل ریاضیات مالی، اقتصاد و پیچیدگی در مدلسازی‌ها، تجزیه و تحلیل و محاسبه داده‌ها، تلاش‌های چشمگیری در جستجوی مدل‌های بهتر ریاضی برای بدست آوردن جواب‌های تقریبی معادلات مدلسازی شده در سال‌های اخیر انجام شده است .به خوبی تشخیص داده شده است که بسیاری از سیستم‌هایی که در دوره جدید با آن روبرو شده‌اند را نمی‌توان تنها با معادلات دیفرانسیل معمولی به روش‌های سنتی و یا مدل معادلات دیفرانسیل تصادفی نشان داد.حالات اینگونه سیستم‌ها دارای دو مؤلفه است، یعنی حالت مداوم و حالت رویداد گسسته .دینامیک گسسته ممکن است برای نشان دادن یک محیط تصادفی یا سایر عوامل تصادفی که نمی‌تواند در مدل‌های معادله دیفرانسیل سنتی نشان داده شود مورد استفاده قرار گیرد.سیستم‌های دینامیکی که در بالا به آنها اشاره شد اغلب به عنوان سیستم ترکیبی شناخته می‌شوند .در نگاه اول، این فرایندها ظاهراً شبیه به فرآیندهای انتشار مشهور هستند .فرمول فاینمن –کاک یکی از روش‌های نوین پیشنهادی برای حل اینگونه از معادلات است.این فرمول روش حلی برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دوم و معادلات دیفرانسیل تصادفی ارائه می‌دهد .کاربردهای این فرمول در زمینه‌ی کنترل تصادفی، تأمین ریاضی مالی، تجزیه و تحلیل ریسک و زمینه‌های مرتبط با آن می‌توان نام برد.در این مقاله با پیاده‌سازی روش‌های عددی روی معادله فاینمن-کاک، دستگاه‌های غیرخطی حاصل می‌شود که می‌توان آنها را با روش‌های عددی حل دستگاه‌های غیرخطی، مثل روش تکراری نیوتن حل کرد .وجود، یکتایی جواب و همگرایی روش‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد و در مثالی نشان خواهیم داد که با تعداد تکرار کم و معیار توقف

۱- گروه مدیریت بازرگانی، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران. malavi@yahoo.com
۲- گروه ریاضی و آمار، واحد قزوین، دانشگاه آزاد اسلامی قزوین، ایران. (نوسنده مسئول) shadan_behzadi@yahoo.com

نوع مقاله: علمی
http://faar.iauctb.ac.ir

مناسب با سرعت همگرایی بالا به جواب تقریبی معادله همگرا شد و این نشان‌دهنده‌ی دقت بالای جواب تقریبی و سرعت همگرایی روش‌ها ی عددی است.

واژه‌های کلیدی: روش هم محلی، معادله‌ی فاینمن -کاک، پایه متعامد ژاکوپی، پایه متعامد ایرفویل.

۱- مقدمه

فرمول کلاسیک فاینمن – کاک ارتباط بین معادلات دیفرانسیل جزئی پارابولیک خطی مانند معادله گرما و انتظار از فرآیندهای تصادفی ناشی از حرکت براونی را بیان می کند .گسترش به معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی در سال های اخیر منجر به تحولات مهم در تجزیه و تحلیل تصادفی و ظهور نظریه معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو شد که می توان به عنوان فرمولهای غیرخطی فاینمن-کاک نیز مورد توجه قرار گرفت .ما در این مقاله ایده ها و نتایج اصلی در این زمینه را مرور می کنیم و پیامدهای این بازنمودهای احتمالی را برای حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی های غیرخطی ، همراه با برخی از برنامه های کاربردی(متمتیکا) به کمک پایه های متعامد بررسی می کنیم.

معادله غیر خطی فاینمن-کاک

معادله فاینمن-کاک که توسط ریچارد فاینمن و مارک کاک بررسی و معرفی شده است، بین معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و فرآیندهای تصادفی ارتباطی ایجاد می کند.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)+\mu(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)+\frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)-V(x,t)u(x,t)+f(x,t)=0.$$

برای تمام xهایی که در R هستند و $t\in[0,T]$، با شرط اولیه به صورت زیر:

$$u(x,0)=\psi(x).$$

وقتی که μ,σ,ψ,V,f توابع معلوم هستند و T یک پارامتر است و $u: R\times[0,T] \to R$ مجهول است. فرمول فاینمن-کاک نشان می دهد که جواب را می توان به عنوان یک شرط احتمالی نوشت:

$$u(x,t)=E^Q\left[\int_t^T e^{-\int_t^r V(X_\tau,\tau)d\tau} f(X_r,r)dr+e^{-\int_t^r V(X_\tau,\tau)d\tau}\psi(X_\tau)|X_t=x\right].$$

تحت اندازه گیری احتمال Q چنین است که X یک فرایند انتگرال گیری است که توسط معادله زیر بیان می شود:

$$dX = \mu(X,t)dt + \sigma(X,t)dw^{Q}.$$

با شرایط $W^{Q}(t)$، یعنی فرآیند وینر تحت Q و شرایط اولیه $X(t) = x$.s

فرمول فاینمن-کاک می گوید که این انتظارات معادل انتگرال یک معادله دیفرانسیل است. به طور خاص، در شرایطی که:

$$uV(x) \geq 0,$$

$$E\left[e^{-\int_0^t V(x(\tau))d\tau}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} w(x,t)dx.$$

وقتی که $w(x,0) = \sigma(x)$ و:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - uV(x)w.$$

این روش حل، برخی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی را با شبیه سازی مسیرهای تصادفی یک فرآیند تصادفی ارائه می دهد. در مقابل، یک طبقه مهم از انتظارات از فرآیندهای تصادفی را می توان با روش های قطعی محاسبه کرد.با این روش داده های تصادفی به صورت قطعی محاسبه می شود. در سال ۱۹۴۹ ، کاک با استفاده از روش مونت کارلو یا شبه مونت کارلو ، جواب تقریبی این معادله را با حداکثر خطا بدست آورد. فرمول فاینمن کاک به عنوان یک فرمول برای تعیین توزیع تابع تصادفی بیان شد. معادلات کسری فاینمن-کاک را برای حالت پسرو و پیشرو و توزیع عملکردهای مسیر یک ذره تحت انتشار غیر عادی نیز استفاده می کنیم. این فرمول از نوع فرمولهای تصادفی است که از احتمال انتقالی برای حرکت براونی ، پیروی می کند. روش های بسط با پایه های متعامد ایرفویل و ژاکوبی از روش های بسیار جدید در علم آنالیز عددی هستند که توسط این روش ها می توان بسیاری از معادلات دیفرانسیل و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی که در علوم ریاضیات مالی، مدیریت مالی و اقتصاد کاربردی بسیار مهم هستند را حل نمود. در این مقاله روش های عددی مذکوررا برای حل این معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی در مدیریت مالی معرفی کرده ایم و با استفاده از آن ها جواب تقریبی را بدست می آوریم. فرمول فاینمن-کاک اکنون بیش از ۵۰ سال دارد ، دو نوع کاربرد مهم از این فرمول در برنامه های نانو استفاده می شود: ۱. آنهایی که حرکت براونی توسط یک فرایند دیگر جایگزین شده و ۲. آنهایی که حرکت براونی (یا بیشتر فرآیند انتشار عمومی) محدود به اقامت در یک منطقه خاص از فضا است. قضیه ی فاینمن کاک حرکت یک بعدی براونی را به طور طبیعی به حرکت فراگیر براونی گسترش می دهد، بنابراین قضیه ی فاینمن-کاک برای فرآیند های یک بعدی و انتشار های چند بعدی مورد استفاده قرار میگیرد. این روشهای عددی در حل بسیاری از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، بسیار

نوین و قدرتمند عمل کرده است و شایان ذکر است که بر روی معادلات مذکور با چنین روشی کارچندانی صورت نگرفته است. ما با استفاده از این دو روش عددی برای تقریب جواب معادله فاینمن-کاک که از پرکاربردترین و مهم ترین معادلات مالی می باشد، خطا را حداقل کرده و با سرعت همگرایی بالا به جواب تقریبی معادله نزدیک می شویم. در یکسری مقالات به بررسی و حل معادله دیفرانسیل غیر خطی فاینمن-کاک پرداخته شده است. از جمله ساخت یک الگوریتم ذرات احتمالی اختصاص یافته، که بیانگر راه حل معادلات دیفرانسیل پارابولیکی نیمه قطبی معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی است[۱]. در مقاله [۲] با پیروی از یک الگوریتم پیشرو بر اساس طرح های نوع اویلر برای یکپارچه سازی زمان محلی و تعیین کمیت میزان افزایش حرکت براون به حل عددی این معادله پرداخته اند. حل معادله فاینمن کاک با معادلات استوکس توسط آنتونی ریجر در سال۲۰۱۹ بررسی شده است. در مقالات دیگری راه حل معادلات خاص از طریق عملکردهای فرآیندهای تصادفی بدست می آید. فرآیندهای انشعاب و آبشارهای تصادفی روش دیگری برای تفسیراین فرمول است [۳،۱۰،۱۳،۱۵]. همچنین با روش تفاضلات پیشرو نیز به بررسی این معادله پرداخته اند. فرآیندهای انتشار از جمله مسائلی هستند که می توان با فرمول فاینمن کاک شبیه سازی کرد و با استفاده از نظریه انتگرالگیری حل کرد[۶، ۸، ۱۲]. معادله فاینمن-کاک از خانواده معادلات ریسک با فرضیات تصادفی می باشد. معادلاتی که سود و ارزشیابی آن در بازار مورد بررسی قرار گرفته است.[۲۴، ۲۳، ۲۲] .
اکثرروشهای عددی که برای تعیین جواب تقریبی معادله تصادفی-مالی فاینمن-کاک معرفی شده اند به روشهای تفاضل متناهی و روش عددی مونت کارلوختم می شوند. روش عددی هم محلی با پایه های متعامد ژاکوبی و ایرفویل که در این مقاله پیشنهاد شده است جواب تقریبی معادله را با دقت بیشتر، خطای محاسباتی کمتر و سرعت همگرایی بالاتری تعیین می کند. در بخش دوم بعد از معرفی روشهای عددی هم محلی و توضیح چند جمله ایهای متعامد ژاکوپی و ایرفویل، به معرفی معادله فاینمن-کاک و حل آن با چندجمله ای ژاکوپی وایرفویل می پردازیم. با رسیدن به ماتریسی غیر خطی که به کمک روشهای تکراری قابل حل است و بیان مثال عددی، به مقایسه روشهای عددی پرداخته و نتایج بدست آمده را بیان و با هم مقایسه می کنیم. در بخش ۳و ۴ به بررسی اثبات یکتایی و وجود جواب و همگرایی روشها پرداخته و دقیق بودن این روش ها را مورد بررسی قرار می دهیم.

۲- معرفی روشهای عددی هم محلی

۲-۱- چند جمله ای متعامد ژاکوپی

چند جمله ای متعامد ژاکوپی را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$u_n(x,t) = w(x)w(t)\sum_{i=0}^{n} a_i p_i^{\alpha.\beta}(x) p_i^{\alpha.\beta}(t), \quad \alpha.\beta > -1,$$

$$w(x)=\frac{(1-x)^{\alpha}}{(1+x)^{\beta}} \quad , \quad w(t)=\frac{(1-t)^{\alpha}}{(1+t)^{\beta}},$$

$$p_i^{\alpha.\beta}(x)=\frac{(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}}{(-2)^i i!}\cdot\frac{d^i}{dx^i}\left[(1-x)^{i+\alpha}(1+x)^{i+\beta}\right], \qquad (۱)$$

$$\left(p_i^{\alpha.\beta}\right)'(x)=\frac{1}{2}(i+\alpha+\beta+1)p_{i-1}^{(\alpha+1.\beta+1)}(x).$$

پس در حالت کلی داریم:

$$\left(p_i^{\alpha.\beta}\right)^{(m)}(x)=\frac{1}{m!}(i+\alpha+\beta+m)p_{i-m}^{(\alpha+m.\beta+m)}(x), i\geq m,$$

$$p_i^{\alpha,\beta}(t)=\frac{(1-t)^{-\alpha}(1+t)^{-\beta}}{(-2)^i i!}\cdot\frac{d^i}{dt^i}\left[(1-t)^{i+\alpha}(1+t)^{i+\beta}\right], \qquad (۲)$$

$$\left(p_i^{\alpha.\beta}\right)^{(m)}(t)=\frac{1}{m!}(i+\alpha+\beta+m)p_{i-m}^{(\alpha+m.\beta+m)}(t), i\geq m.$$

۲-۲- چند جمله ای متعامد ایرفویل

$$u_n(x,t)=w(x)w(t)\sum_{i=0}^{n}a_i s_i(x)s_i(t), \qquad (۳)$$

$$w(x)=\sqrt{\frac{(1+x)}{(1-x)}} \quad , \quad w(t)=\sqrt{\frac{(1+t)}{(1-t)}} ,$$

$$s_i(x)=\frac{\cos\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)arc\cos x\right]}{\cos\left[\frac{1}{2}arc\cos x\right]},$$

$$s_i(t)=\frac{\cos\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)arc\cos x\right]}{\cos\left[\frac{1}{2}arc\cos x\right]},$$

$$u_i(x)=\frac{\sin\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)arc\sin x\right]}{\cos\left[\frac{1}{2}arc\sin x\right]},$$

$$u_i(t) = \frac{\sin\left[\left(i+\frac{1}{2}\right) arc\sin t\right]}{\cos\left[\frac{1}{2} arc\sin t\right]},$$

$$(1+x){s_i}'(x) = \left(\mathrm{i}+\tfrac{1}{2}\right)u_i(x) - \tfrac{1}{2}\mathrm{s_i}(x), \qquad (۴)$$

$$(1+t){s_i}'(\mathrm{t}) = \left(\mathrm{i}+\frac{1}{2}\right)u_i(\mathrm{t}) - \frac{1}{2}\mathrm{s_i}(\mathrm{t})\,.$$

۲-۳- معرفی معادله فاینمن-کاک و حل آن با استفاده ازروش هم محلی با پایه متعامد ژاکوپی

معادله فاینمن-کاک را با شرایط اولیه $u(x,0)=\varphi(x)$ در بازه $x\in R, t\in(0,T)$ به صورت زیر در نظر می گیریم:

(۵)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \mu(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - V(x,t)u(x,t) + f(x,t) = 0,$$

که $\mu, f, \sigma, \varphi, V$ توابع معلوم هستند. T یک متغیر است و $u\colon \mathrm{R}\times[0,T]\to R$ تابعی نامعلوم است.

برای حل معادله داریم :

(۶)

$$u(x,t) - u(x,0) = \int_0^t \mu(x,t)u_x\,dt + \int_0^t \frac{1}{2}\delta^2(x,t)u_{xx}(x,t)\,dt$$

$$-\int_0^t V(x,t)u(x,t)\,dt + \int_0^t f(x,t)\,dt,$$

بنابر معادله (۱) و مشتق گیری نسبت به x داریم:

$$u_x = w(t)\left[w'(x)\textstyle\sum_{i=0}^n a_i p_i^{\alpha.\beta}(x)p_i^{\alpha.\beta}(t) \;+ w(x)\sum_{i=0}^n a_i\left(p_i^{\alpha.\beta}(x)\right)' p_i^{\alpha.\beta}(t)\right],$$

$$u_{xx} = w''(x)\textstyle\sum_{i=0}^n a_i p_i^{\alpha,\beta}(x)p_i^{\alpha,\beta}(t) \;+ 2w'(x)\displaystyle\sum_{i=0}^n a_i\left(p_i^{\alpha,\beta}(x)\right)' p_i^{\alpha,\beta}(t) +$$

$$w(x)\textstyle\sum_{i=0}^n a_i\left(p_i^{\alpha,\beta}(x)\right)'' p_i^{\alpha,\beta}(t).$$

(۷)

سپس با جاگذاری در معادله (۷) خواهیم داشت:

(۸)

$$u(x,t)-u(x,0)=$$

$$\int_0^t \mu(x,t)\left(w(t)\left[w'(x)\sum_{i=0}^{n} a_i p_i^{\alpha,\beta}(x)p_i^{\alpha,\beta}(t) \;+ w(x)\sum_{i=0}^{n} a_i\left(p_i^{\alpha,\beta}(x)\right)' p_i^{\alpha,\beta}(t)\right]\right)dt$$
$$+\int_0^t \frac{1}{2}\delta^2(x,t)\left(w(t)\left[w''(x)\sum_{i=0}^{n} a_i p_i^{\alpha,\beta}(x)p_i^{\alpha,\beta}(t)\right.\right.$$
$$+\,2w'(x)\sum_{i=0}^{n} a_i\left(p_i^{\alpha,\beta}(x)\right)' p_i^{\alpha,\beta}(t)$$
$$\left.\left.+\,w(x)\sum_{i=0}^{n} a_i\left(p_i^{\alpha,\beta}(x)\right)'' p_i^{\alpha,\beta}(t)\right]\right)dt-\int_0^t V(x,t)u(x,t)\,dt$$
$$+\int_0^t f(x,t)\,dt.$$

روابط فوق را می توان به صورت ماتریسی زیر نوشت:

(۹)

$$A_{ij}=\sum_{i=0}^{n} a_i p_i^{\alpha,\beta}(x_i)p_i^{\alpha,\beta}(t_j),$$

$$B_{ij}=\sum_{i=0}^{n} a_i\left(p_i^{\alpha,\beta}(x_i)\right)' p_i^{\alpha,\beta}(t_j),$$

$$C_{ij}=\sum_{i=0}^{n} a_i\left(p_i^{\alpha,\beta}(x_i)\right)'' p_i^{\alpha,\beta}(t_j),$$

لذا داریم:

(۱۰)

$$u(x,t)-u(x,0)=\int_0^t \mu(x,t)w(t)\left[w'(x)A_{ij}+w(x)B_{ij}\right]dt$$
$$+\int_0^t \frac{1}{2}\delta^2(x,t)w(t)\left[w''(x)A_{ij}+2w'(x)B_{ij}+w(x)C_{ij}\right]$$
$$-\int_0^t V(x,t)u(x,t)\,dt+\int_0^t f(x,t)\,dt.$$

با مختصر سازی و جایگذاری روابط زیررا داریم:

$$w(t) = e \quad , \quad w(x) = q \ , \quad w'(x) = r \ , \qquad w^{(2)}(x) = s.$$

و در نتیجه:

(۱۱)

$$u(x,t) = \varphi(x) + \int_0^t \mu(x,t) e\left[rA_{ij} + sB_{ij}\right] dt + \int_0^t \frac{1}{2}\delta^2(x,t) e\left[sA_{ij} + 2rB_{ij} + qC_{ij}\right] - \int_0^t V(x,t)u(x,t)\, dt + \int_0^t f(x,t)\, dt.$$

این معادله به صورت یک ماتریس نوشته شده و قابل حل به کمک روشهای عددی می باشد.

۲-۴- معرفی معادله فاینمن-کاک و حل آن با استفاده از روش هم محلی با پایه متعامد ایرفویل

معادله فاینمن-کاک را با شرایط اولیه $u(x,T) = \varphi(x)$ در بازه $x \in R, t \in (0,T)$ به صورت زیر تعریف می کنیم :

(۱۲)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \mu(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - V(x,t)u(x,t) + f(x,t) = 0.$$

که $\mu, f, \sigma, \varphi, V$ توابع معلوم هستند. T یک متغیر است و $u: \mathrm{R} \times [0,T] \to R$ تابعی نامعلوم است.

برای حل معادله داریم :

(۱۳)

$$u(x,t) - u(x,0) = \int_0^t \mu(x,t)u_x\, dt + \int_0^t \frac{1}{2}\delta^2(x,t)u_{xx}(x,t)\, dt - \int_0^t V(x,t)u(x,t)\, dt + \int_0^t f(x,t)\, dt,$$

بنابر معادله (۳) و مشتق گیری نسبت به x داریم:

(۱۴)

$$u_x = w(t)\left[w'(x)\sum_{i=0}^{n} a_i s_i(x) s_i(t) \ + w(x)\sum_{i=0}^{n} a_i \big(s_i(x)\big)' s_i(t)\right],$$

$$u_{xx} = w''(x)\sum_{i=0}^{n} a_i s_i(x)s_i(t) \ + 2w'(x)\sum_{i=0}^{n} a_i\big(s_i(x)\big)' s_i(t) + w(x)\sum_{i=0}^{n} a_i\big(s_i(x)\big)'' s_i(t).$$

پس با جاگذاری در معادله (۱۴) خواهیم داشت:

(۱۵)

$$u(x,t)-u(x,0)=\int_0^t \mu(x,t)\left(w(t)\left[w'(x)\sum_{i=0}^{n} a_i s_i(x) s_i(t) \ +w(x)\sum_{i=0}^{n} a_i\big(s_i(x)\big)' s_i(t)\right]\right)dt + \int_0^t \frac{1}{2}\delta^2(x,t)\left(w(t)\left[w''(x)\sum_{i=0}^{n} a_i s_i(x) s_i(t) \ +2w'(x)\sum_{i=0}^{n} a_i\big(s_i(x)\big)' s_i(t) + w(x)\sum_{i=0}^{n} a_i\big(s_i(x)\big)'' s_i(t)\right]\right)dt - \int_0^t V(x,t)u(x,t)\,dt + \int_0^t f(x,t)\,dt.$$

با تبدیل روابط بالا به صورت ماتریس خواهیم داشت:

(۱۶)

$$D_{ij}=\sum_{i=0}^{n} a_i s_i(x_j) s_i(t_j),$$

$$E_{ij}=\sum_{i=0}^{n} a_i\left(s_i(x_j)\right)' s_i(t_j),$$

$$F_{ij}=\sum_{i=0}^{n} a_i\left(s_i(x_j)\right)'' s_i(t_j),$$

لذا می توان نوشت:

(۱۷)

$$u(x,t)-u(x,0)=\int_0^t \mu(x,t)w(t)\left[w'(x)D_{ij}+w(x)E_{ij}\right]dt + \int_0^t \frac{1}{2}\delta^2(x,t)w(t)\left[w''(x)D_{ij}+2w'(x)E_{ij}+w(x)F_{ij}\right] - \int_0^t V(x,t)u(x,t)\,dt + \int_0^t f(x,t)\,dt.$$

با مختصر سازی و جاگذاری روابط زیر داریم:

$$w(t) = e \quad , \quad w(x) = q\ , \quad w'(x) = r\ , \qquad w^{(2)}(x) = s.$$

و:

$$u(x,t) = \varphi(x) + \int_0^t \mu(x,t)e\left[rD_{ij} + sE_{ij}\right]dt + \int_0^t \frac{1}{2}\delta^2(x,t)e\left[sD_{ij} + 2rE_{ij} + qF_{ij}\right] - \int_0^t V(x,t)u(x,t)\,dt + \int_0^t f(x,t)\,dt.$$

۳- اثبات ها

۳-۱- وجود و یکتایی جواب

معادله فاینمن کاک جواب یکتا دارد وقتی که $0 < \alpha < 1$ و مقدار $\alpha = T(L_1 + L_2 + L_3 + L_4)$ باشد.

فرض کنیم:

$$\mu(x,t)u_x = F_1\big(u(x,t)\big),$$

$$\frac{1}{2}\delta^2(x,t)u_{xx}(x,t) = F_2\big(u(x,t)\big)\ ,$$

$$V(x,t)u(x,t) = F_3\big(u(x,t)\big),$$

$$f(x,t) = F_4\big(u(x,t)\big).$$

$$0 \le t \le T, \text{و} \forall x \in J = [0,T]$$

تابع $u(x,t)$ در شرط لیپ شیتز صدق می کند و داریم:

$$|F_1(u(x,t)) - F_1(u^*(x,t))| \le L_1|u(x,t) - u^*(x,t)|,$$

$$|F_2(u(x,t)) - F_2(u^*(x,t))| \le L_2|u(x,t) - u^*(x,t)|,$$

$$|F_3(u(x,t)) - F_3(u^*(x,t))| \le L_3|u(x,t) - u^*(x,t)|,$$

$$|F_4(u(x,t)) - F_4(u^*(x,t))| \le L_4|u(x,t) - u^*(x,t)|.$$

اثبات:

فرض می کنیم مسئله جواب یکتا نداشته باشد و $u(x,t), u^*(x,t)$ جوابهای مسئله باشند، لذا داریم:

$$\begin{aligned}|u(x,t)-u^*(x,t)| = \Bigg|\int_0^t F_1\big(u(x,t)\big)\,d\tau + \int_0^t F_2\big(u(x,t)\big)\,d\tau - \int_0^t F_3\big(u(x,t)\big)\,d\tau \\ + \int_0^t F_4\big(u(x,t)\big)\,d\tau \\ - \left(\int_0^t F_1\big(u^*(x,t)\big)\,d\tau + \int_0^t F_2\big(u^*(x,t)\big)\,d\tau - \int_0^t F_3\big(u^*(x,t)\big)\,d\tau \right. \\ \left. + \int_0^t F_4\big(u^*(x,t)\big)\,d\tau\right)\Bigg| \le\end{aligned}$$

$\int_0^t\left|F_1\big(u(x,t)\big)-F_1\big(u^*(x,t)\big)\right|d\tau + \int_0^t|F_2(u(x,t))-F_2(u^*(x,t))|d\tau - \int_0^t|F_3(u(x,t)) - F_3(u^*(x,t))|d\tau + \int_0^t|F_4(u(x,t))-F_4(u^*(x,t))|d\tau$

$$\begin{aligned}\le L_1|u(x,t)-u^*(x,t)| + L_2|u(x,t)-u^*(x,t)| - L_3|u(x,t)-u^*(x,t)| \\ + L_4|u(x,t)-u^*(x,t)|\end{aligned}$$

$\le T(L_1+L_2+L_3+L_4) = \alpha|u-u^*|$

پس $0 \le (1-\alpha)|u-u^*|$ و در نتیجه $u(x,t)=u^*(x,t)$.

۳-۲- همگرایی روش های عددی

۱-۳-۲- همگرایی روش هم محلی با پایه متعامد ژاکوپی

قضیه ۱: کران بالای معادله ی $u_n(x,t)=\sum_{i=0}^{n} a_i {p_i}^{\alpha,\beta}(x){p_i}^{\alpha,\beta}(t)$ برای معادله فاینمن کاک به روش هم محلی با پایه متعمد ژاکوپی به مقدار زیر همگراست:

$|E_n(x,t),0| \le c_1\frac{n^{-z+1}}{1-z} + c_2 n^{-z+1}.$

اثبات:

داریم:

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{i=0}^{\infty} a_i {p_i}^{\alpha,\beta}(x){p_i}^{\alpha,\beta}(t)\,,\sum_{i=0}^{n} {a_i}^{(n)}{p_i}^{\alpha,\beta}(x){p_i}^{\alpha,\beta}(t)\right| \\ &= \left|\sum_{i=0}^{n} a_i {p_i}^{\alpha,\beta}(x){p_i}^{\alpha,\beta}(t) + \sum_{i=0}^{n} {a_i}^{(n)}{p_i}^{\alpha,\beta}(x){p_i}^{\alpha,\beta}(t)\,,\sum_{i=0}^{n} {a_i}^{(n)}{p_i}^{\alpha,\beta}(x){p_i}^{\alpha,\beta}(t)\right| \\ &\le \left|\sum_{i=0}^{n} a_i {p_i}^{\alpha,\beta}(x){p_i}^{\alpha,\beta}(t), \sum_{i=0}^{n} {a_i}^{(n)}{p_i}^{\alpha,\beta}(x){p_i}^{\alpha,\beta}(t)\right| + \left|\sum_{i=n+1}^{\infty} {a_i}^{(n)}{p_i}^{\alpha,\beta}(x){p_i}^{\alpha,\beta}(t),0\right|\end{aligned}$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n} \left|p_i{}^{\alpha,\beta}(x)p_i{}^{\alpha,\beta}(t)\right|\left|a_i - a_i{}^{(n)}\right| + \sum_{i=n+1}^{\infty} \left|p_i{}^{\alpha,\beta}(x)p_i{}^{\alpha,\beta}(t)\right|\left|a_i - 0\right|$$
$$\leq \sum_{i=0}^{n} \left|a_i - a_i{}^{(n)}\right| + \sum_{i=+1}^{\infty} \left|a_i - 0\right|$$
$$\leq c_1 \frac{n^{-z+1}}{1-z} + c_2 n^{-z+1}$$

۲-۳-۲- همگرایی روش هم محلی با پایه متعامد ایرفویل

قضیه ۲: کران بالای معادله ی $u_n(x,t) = \sum_{i=0}^{n} a_i s_i(x) s_i(t)$, برای معادله فاینمن کاک به کمک روش هم محلی با پایه متعامد ایرفویل به مقدار زیر همگراست:

$|E_m(x,t), 0| \leq e_1 \frac{m^{-k+1}}{1-k} + e_2 m^{-k+1}.$

اثبات:

داریم:

$$\left|\sum_{i=0}^{\infty} a_i s_i(x) s_i(t), \sum_{i=0}^{m} a_i{}^{(m)} s_i(x) s_i(t)\right|$$
$$= \left|\sum_{i=0}^{m} a_i s_i(x) s_i(t) + \sum_{i=0}^{m} a_i{}^{(m)} s_i(x) s_i(t), \sum_{i=0}^{m} a_i{}^{(m)} s_i(x) s_i(t)\right|$$
$$\leq \left|\sum_{i=0}^{m} a_i s_i(x) s_i(t), \sum_{i=0}^{n} a_i{}^{(m)} s_i(x) s_i(t)\right| + \left|\sum_{i=m+1}^{\infty} a_i{}^{(m)} s_i(x) s_i(t), 0\right|$$
$$\leq \sum_{i=0}^{m} \left|s_i(x) s_i(t)\right|\left|a_i - a_i{}^{(m)}\right| + \sum_{i=m+1}^{\infty} \left|s_i(x) s_i(t)\right|\left|a_i - 0\right|$$
$$\leq \sum_{i=0}^{m} \left|a_i - a_i{}^{(m)}\right| + \sum_{i=+1}^{\infty} \left|a_i - 0\right|$$
$$\leq e_1 \frac{m^{-k+1}}{1-k} + e_2 m^{-k+1}.$$

۴-الگوریتم و مثال عددی

در این بخش، مثال عددی را محاسبه می کنیم که توسط روشهای عددی با پایه متعامد ژاکوپی و ایرفویل با برنامه Mathematica 6 با توجه به الگوریتم زیر حل شده است. ε یک مقدار مثبت داده شده است و مقدار آن برابر است با$\varepsilon = 10^{-9}$.

همچنین زمان محاسبه این مثال با دستگاه خانگی (Cpu time) نیز بررسی شده و بیان خواهد شد.

الگوریتم:

گام۱: قرار بده $n \leftarrow 0$.

گام۲: معادله (5) را با روش هم محلی با پایه های متعامد ژاکوپی و ایرفویل به کمک ماتریس بدست آمده حل می کنیم.

گام۳: اگر $\varepsilon > \frac{|u_{n+1}-u_n|}{u_n}$ که $\varepsilon = 10^{-9}$ برو به گام ۴، در غیر اینصورت $n \leftarrow n+1$ و برو به گام ۲.

گام۴: $u_n(x,t)$ را به عنوان جواب تقریبی معادله چاپ کن.

اعتبار سنجی

معادله فاینمن-کاک را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$u_t(x,t) + \mu(x,t)u_x(x,t) + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)u_{xx}(x,t) - V(x,t)u(x,t) + f(x,t) = 0.$$

با شرایط اولیه به صورت:

$$u(x,0) = \varphi(x)\,, \varepsilon = 10^{-5}\,, \alpha = 0.61542,$$

$$\varphi(x) = x^2 e^{-x} + \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right),$$

$$\mu(x,t) = xe^{x^2+t},,$$

$$V(x,t) = x^2,$$

$$\sigma(x,t) = \ln\left(\frac{x^3}{3} + \frac{7}{2}t^2\right),$$

$$f(x,t) = \frac{xt^3}{6} + 5.$$

جدول(۱)

(x,t)	Jacobi approximate Cpu.t: 6.137sec n=18	Airfoil approximate Cpu.t: 5.708sec n=15	Jacobi Error	Airfoil Error
(0.1,0.13)	1.712643	3.227315	0.000000228	0.0000001571
(0.2,0.19)	4.051282	6.16592	0.0000002447	0.0000001982
(0.3,0.22)	7.194428	10.224517	0.0000002513	0.0000002369
(0.4,0.26)	11.66512	14.931413	0.0000003409	0.0000002623
(0.5,0.31)	14.184208	16.771618	0.0000003619	0.0000003140
(0.6,0.36)	21.335216	24.193415	0.0000003954	0.0000003305
(0.7,0.42)	28.521943	30.047181	0.0000004228	0.0000003684
(0.8,0.46)	33.147825	36.850611	0.0000004419	0.0000004122
(0.9,0.51)	36.804128	39.494018	0.0000004739	0.0000004388

منبع: یافته‌های پژوهشگر

۵- نتیجه گیری

در این مقاله بخاطر اهمیت موضوعات مالی، اقتصادی ووجود معادلات تصادفی زیاد در طبیعت به بررسی معادله فاینمن-کاک که یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی است می پردازیم و معادله مذکور را باروش های عددی هم محلی با پایه های ژاکوپی و ایرفویل پیاده سازی کرده و جواب تقریبی آن را بدست می آوریم. با بررسی ،جدول بهینه بودن روش عددی با پایه ایرفویل نشان داده شده است. با توجه به جدول می بینیم که روش عددی هم محلی با پایه ایرفویل با تعداد گام کمتر، خطای کمتر و سرعت همگرایی بالا و زمان محاسبه(CPU Time) به جواب تقریبی معادله همگرا و نزدیک می شود. نتایج عددی نشان می دهد که روش عددی هم محلی با پایه متعامد ایرفویل دارای پیچیدگی و حجم عملیات محاسباتی کمتری نسبت به پایه متعامد ژاکوپی بوده و جواب تقریبی بدست آمده دارای دقت بالا وخطای کمتری می باشد. در ضمن هرچه مقدار x و t کوچکتر می شود نتایج عددی با دقت بالاتر حاصل می گردد و با تعداد گام و محاسبات کمتر به نتیجه مطلوب می رسد. تاکنون روی این دسته از معادلات که یکی از پرکاربردترین و پیچیده ترین معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی است، کار چندانی صورت نگرفته است. ما در این مقاله روش عددی بسط هم محلی را مورد بررسی قرار می دهیم.در کارهای آتی می توان روش عددی هم محلی با پایه های متعامد مانند ژنوچی و برنشتاین و... روی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی از این دسته پیاده سازی کرد و جواب تقریبی بدست آمده را از لحاظ میزان دقت بالا و حداقل خطا مورد ارزیابی و بررسی قرار داد. روش هم محلی یکی از روشهای عددی بسط می باشد که با توجه به ساختار و الگوریتم آن منجر به دستگاه های غیرخطی خوش وضع و پایدار می شود که همگرایی و پایداری روش را تضمین می کند. بخش قابل توجه مقاله قسمت مربوط به قضایا یعنی اثبات و بررسی سازگاری جواب معادله فایمن-کاک،همگرایی و پایداری

روش هم محلی با پایه های متعامد ایرفویل و ژاکوبی است. در واقع این بخش نشان میدهد که جواب تقریبی بدست آمده توسط روش عددی تحت چه شرایطی دارای دقت بیشترو سرعت همگرایی بالاتری است. و به ما این توانمندی را می دهد که میزان خطا ی جواب تقریبی بدست آمده راتحت کنترل قرار دهیم.

فهرست منابع

۱) محمدرضا نیکبخت ، علی قاسمی، محمد ایمانی، تاثیر خطای پیش بینی سود مدیریت بر پایداری اجزای نقدی و تعهدی سود و ارزشیابی بیش از حد سهام، پژوهش های حسابداری مالی و حسابرسی. دوره ۱۲ ،شماره ۴۶ ،مرداد ۱۳۹۹ ،صفحه ۲۶-۱

۲) سید کاظم ابراهیمی، علی بهرامی نسب، صدیقه پروانه، تاثیر رقابت در بازار محصول بر ریسک پذیری سرمایه گذاران، پژوهش های حسابداری مالی و حسابرسی. دوره ۱۰، شماره ۴۰ ، بهمن ۱۳۹۷ ، صفحه ۱۸۶-۱۷۱

۳) مهدی دسینه، یداله تاری وردی، فرزانه حیدر پور،تأثیرمعیارهای مبتنی بر حسابداری ویژگی های سود بر ریسک نامطلوب سود، پژوهش های حسابداری مالی و حسابرسی. دوره ۱۱، شمار۴۱، فروردین۱۳۹۸ ، صفحه ۱۵۳-۷۶

4) A. LE Aavil, N. Oudjane, F. Russo, Monte-Carlo Algorithms for Forward Feynman-Kac type representation for semilinear nonconservative Partial Differential Equations, Preprint hal, 2017.
5) A. Lejay, H. M. Gonzalez, A forward-backward probabilistic algorithm for the incompressible Navier-Stokes equations, hal, 2019.
6) Ch. Beck, S. Becker, P. Cheridito, Deep splitting method for parabolic PDE Nanyang Technological University, Singapore, 2019.
7) Crepey .S, Financial Modeling, Springer-Verlag, 2013.
8) E. C. Waymire, Probability & incompressible Navier-Stokes equations: An overview of
9) some recent developments, Probab. Surv,5 (2005) 1–32.
10) F. Antonelli, Backward-forward stochastic differential equations, Ann. Appl, 8 (1993) 777–793.
11) H. Pham, Feynman-Kac representation of fully nonlinear PDEs and applications.
12) Acta Mathematica Vietnamica ,4 (2015) 255–269.
13) J. Ma, J. Yong, Forward-backward stochastic differential equations and their applications,
14) Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 1999.
15) J. Sun1, D. Nie1, W. Deng, Error estimates for backward fractional Feynman-Kac
16) equation with non-smooth initial data, Math Na, 2019.
17) M. Ossiander, A probabilistic representation of solutions of the incompressible Navier-
18) Stokes equations in R3, Probab. Theory Relat, 2(2005) 267–298.
19) Michael.J, Stochastic Calculus and Financial Applications, Springer New York, 2001.
20) P. Cheridito, H. M. Soner, N. Touzi, N. Victoir, Second-order backward stochastic differential equations and fully nonlinear parabolic PDEs, Pure Appl. Math, 3(2007) 1081–1110.

21) R. N. Bhattacharya, L. Chen, S. Dobson, R. B. Guenther, C. Orum, M. Ossiander,Majorizing kernels and stochastic cascades with applications to incompressible Navier-Stokes equations, Trans. Amer. Math, 2(2003) 5003–5040.
22) R. P. Feynman, Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics, Rev. Mod.Phys, 3(1948) 367–387.
23) S. Benachour, B. Roynette, P. Vallois, Branching process associated with 2d-Navier Stokes equation, Rev. Mat. Iberoam, 5 (2001) 331–373.
24) Wazwaz. A. M, A First Course in Integral Equations, World Scientific, 2015.
25) Wazwaz A. M, Linear and Nonlinear Integral Equations, Methods and Applications Springer, 2011.
26) X. Mao , Stochastic Differential Equations and Their Applications, Horwood Chichester, 1997.
27) Y. G , Z. C , Hybrid Switching Diffusions , Properties and Applications Springer, New York, 2010.
28) Y. Le Jan, A. S. Sznitman, Stochastic cascades and 3-dimensional Navier-Stokes equations,Probab, Theory Relat, 1(1997) 343–366.
29) Y. Zhou , W. Cai , Numerical Solution of the Robin Problem of Laplace Equations with a Feynman-Kac Formula and Reflecting Brownian Motions, 2019.

Financial Accounting and Auditing Researches
Vol. (14) Issue (55) December 2022

Abstract

Determining the optimal response of Feynman-Kak stochastic-financial equation based on Jacobi and Irfoil expansion

Sayed Mohammad Alavi Sheshamd [1]
Shadan Sediq Behzadi [2]

Received: 05 / July / 2022 Accepted: 07 / September / 2022

Abstract
In this paper, we solve the Feynman-Kac equation using the collocation method with Jacobi and Airfoil bases. This partial differential equation is one of the most important and widely used random equations in financial mathematics. Due to the increasing demand in applied sciences such as financial mathematics, economics and complexity in modeling, data analysis and calculation, significant efforts have been made in search of better mathematical models to obtain approximate solutions to the modeled equations in recent years. It is well established that many of the systems encountered in the new era cannot be represented by ordinary differential equations in the traditional way or by the model of random differential equations. This equation offers a solution for quadratic partial differential equations and stochastic differential equations. Applications of this formula in the field of random control, financial mathematics, risk analysis and related fields can be mentioned. In this paper, by applying numerical methods to the Feynman-Kac equation, nonlinear devices are obtained that can be solved by numerical methods for solving nonlinear devices, such as Newton's iterative method.

Keywords: Financial risk, Financial sector, Real sector, Capital market, Iran

1- Department of Business Administration, Islamic Azad University, Central Tehran, Tehran, Iran. malavi@yahoo.com
2- Department of Mathematics and Statistics, Islamic Azad University, Qazvin, Qazvin, Iran. shadan_behzadi@yahoo.com