



بهینه سازی جواب معادله تصادفی-مالی فیشر با پیاده سازی روش بسط عددی هم محلی با پایه های متعامد

شادان صدیق بهزادی^۱
سید محمد علوی ششتمد^۲

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۴/۲۳ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۶/۲۳

چکیده

در این تحقیق حاضر، معادله ی فیشر را با روش عددی بسط هم محلی با پایه های متعامد ژاکوبی و ایرفویل، حل می کنیم. این معادله ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی یکی از معادلات مهم و پرکاربرد در ریاضیات مالی و علم اقتصاد است. معادله فیشرنشان می دهد که چگونه انتظار تورم بر نرخ بهره و قدرت خرید تأثیر می گذارد. این فرمول روش حلی برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دوم و معادلات دیفرانسیل تصادفی ارائه می دهد. کاربردهای این فرمول در زمینه ی کنترل تصادفی، تأمین مالی ریاضی، تجزیه و تحلیل ریسک و زمینه های مرتبط با آن می توان نام برد. در این پژوهش با پیاده سازی روش های عددی بسط با پایه های متعامد ژاکوبی و ایرفویل روی معادله مورد نظر، دستگاههای غیر خطی حاصل می شود که می توان آنها را با روش های حل دستگاههای غیرخطی، مثل روش تکراری نیوتن حل کرد. وجود، یکتایی جواب و همگرایی روشها مورد بررسی قرار می گیرد و در مثالی نشان خواهیم داد که با تعداد تکرار و خطای کم و سرعت همگرایی بالا به جواب تقریبی معادله همگرا می شویم و این نشان دهنده ی بهینه بودن این روش عددی نسبت به روشهای تحلیلی دیگر است.

واژه های کلیدی: روش بسط هم محلی، معادله ی فیشر، پایه متعامد ژاکوبی، پایه متعامد ایرفویل.

طبقه بندی JEL: C02 ، C22

۱ گروه ریاضی و آمار، دانشگاه آزاد اسلامی واحد قزوین، قزوین، ایران. (نویسنده مسئول) 0451509821@iau.i.
۲ گروه مدیریت بازرگانی، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران. 0041137748@iau.i.



۱- مقدمه

با توجه به بیان جزئیاتی توسط استیو هیکس، فیلیپس کروور و پل باگی در سال ۱۹۷۵، برای تحلیل هزینه فرصت، چنانچه معادله فیشر در نظر گرفته نشود، به شدت با انحراف رو برو خواهیم بود. قیمت‌ها و نرخ‌های بهره، باید هر دو به صورت واقعی یا اسمی پیش‌بینی گردد. برای تحلیل هزینه فرصت، نرخ تورم می‌تواند به دو صورت به کار گرفته شود. زمانی که ارزش فعلی خالص سودهای انتظاری را محاسبه می‌کنیم، قیمت‌ها و نرخ‌های بهره می‌تواند در شرایط واقعی مورد محاسبه قرار گیرد. در نتیجه تورمی را در قیمت‌ها و نرخ‌های بهره در نظر نمی‌گیریم. رویکرد دوم شامل تورم است که در محاسبه قیمت و نرخ بهره در نظر گرفته می‌شود و محاسبات براساس شرایط اسمی انجام می‌گیرد. طبق جزئیات بیان شده در ذیل، هر دو رویکرد تا زمانی که قیمت و نرخ بهره در شرایط واقعی باشد یا اینکه قیمت و نرخ بهره در حالت اسمی باشد، با هم دیگر برابر هستند. این معادله به عنوان بخشی از یک تئوری کلی اقتصادی در سال ۱۹۳۰ توسط ایروین فیشر، مورد استفاده قرار گرفت. امروزه این معادله به یک معادله پرکاربرد در زمینه‌های اقتصاد و امور مالی تبدیل شده است. معادله فیشر نشان می‌دهد که با کم کردن نرخ تورم پیش‌بینی شده از نرخ بهره اسمی، نرخ بهره واقعی را می‌توان یافت. در این معادله، تمام نرخ‌های ارائه شده ترکیب می‌شوند. اوراق قرضه داده شده بین این دو، تحت تأثیر تورم حاصل می‌شود. مطابق معادله فیشر، نرخ سود اسمی برابر با نرخ سود واقعی و تورم است. مفهوم معادله فیشر در زمینه مالی و اقتصادی از اهمیت بالایی برخوردار است. دلیل این امر در محاسبه بازده سرمایه‌گذاری یا برآورد ماهیت نرخ بهره اسمی و واقعی است. معادله فیشر را می‌توان در هر بار مراجعه به بانک، ملاحظه کرد. نرخ بهره سرمایه‌گذار در یک حساب پس‌انداز واقعاً نرخ سود اسمی است. به عنوان مثال، اگر نرخ سود اسمی در حساب پس‌انداز ۴٪ و نرخ تورم پیش‌بینی شده ۳٪ باشد، در واقع پول در حساب پس‌انداز در واقع ۱٪ در حال رشد است. هر چه نرخ بهره واقعی کمتر باشد، در صورت مشاهده از منظر قدرت خرید، سپرده پس‌انداز، پس‌انداز قابل توجهی می‌کند. همچنین، معادله فیشر وضعیتی را توضیح می‌دهد که سرمایه‌گذاران یا وام‌دهندگان خواهان پاداش اضافی هستند. تقاضای پاداش اضافی برای جبران از بین رفتن قدرت خرید به دلیل رشد تورم توجیه می‌شود. علاوه بر این، کاربردهای فیشر با توجه به تقاضای روز افزون آن در بازار طولانی شده است. این روش اکنون با موفقیت به تجزیه و تحلیل عرضه پول و تجارت بین‌المللی ارز می‌پردازد. بنابراین، معادله فیشر به دلیل کاربرد بی‌همتای خود به سرعت محبوبیت خود را در بازار به دست آورد. اهمیت ویژه معادله فیشر مربوط به سیاست پولی است. معادله نشان می‌دهد که سیاست‌های پولی تورم و نرخ بهره اسمی را در یک راستا حرکت می‌دهند. از طرف دیگر، سیاست‌های پولی به طور کلی بر نرخ بهره واقعی تأثیر نمی‌گذارد. این نام‌گذاری بعد از فوت ایروین فیشر، کسی که به واسطه فعالیت‌هایش پیرامون نرخ بهره معروف بود، انجام گرفت. فرمول مورد استفاده برای محاسبه اثر فیشر یک دوره یک ساله را فرض می‌کند و به سه مؤلفه تقسیم می‌شود: نرخ اسمی بهره، نرخ واقعی بهره و نرخ تورم که در حال حاضر پیش‌بینی می‌شود.

نرخ تورم:

نرخ تورم معیار سنجش تورم قیمت است که شامل تغییر درصدی سالانه در شاخص قیمت مصرف کننده است. بنابراین ، نرخ تورم به پیشرفت اقتصادی کمک می کند زیرا باعث افزایش سطح عمومی قیمت کالاها می شود. نظارت بر نرخ تورم ضروری است زیرا یک نرخ تورم مستقل می تواند به شدت به اقتصاد آسیب برساند. علاوه بر این ، رشد بیش از حد در نقدینگی اغلب می تواند به نرخ تورم بالاتری منجر شده و به افزایش تورم بیانجامد.

نرخ بهره اسمی:

نرخ اسمی نرخ بهره نوع نرخ بهره است که قبل از در نظر گرفتن تورم در اقتصاد اندازه گیری می شود. قبل از مراجعه به تورم با نرخ بهره واقعی مقایسه می شود. بنابراین ، اصطلاح اسمی همچنین می تواند نرخ سود تبلیغ شده یا از پیش ثابت در وام را مشاهده کند. این نرخ بهره از پیش تعیین شده مجاز به در نظر گرفتن هیچ گونه هزینه یا ترکیب بهره نیست. علاوه بر این ، نرخ سود تعیین شده توسط بانک مرکزی فدرال رزرو ، همچنین با عنوان نرخ صندوق های فدرال شناخته می شود ، همچنین می تواند به عنوان نرخ اسمی مشخص شود.

نرخ بهره واقعی:

نرخ بهره واقعی مبلغی است که با افزایش زمان ، قدرت خرید پول وام گرفته شده را در معادله منعکس می کند.

رابطه بین نرخ بهره اسمی و واقعی:

نرخ سود اسمی بازده مالی بدست آمده توسط یک فرد را در ازای پرداخت پول واریزی روشن می کند. در معادله فیشر ، مقدار نرخ سود اسمی و نرخ سود واقعی مشابه است. این رشد اقتصادی را برای یک بازه مشخص از زمان رمزگشایی کل مبلغ بدهکار یک وام دهنده مالی برجسته می کند. در عوض ، نرخ بهره واقعی به مبلغی منعکس کننده ظرفیت خرید پولی است که در مدت زمانی خاص وام گرفته شده منعکس می شود. این دو نرخ بهره در جهت شناسایی رشد مالی برای یک بازه از پیش تعریف شده کار می کنند. بنابراین ، رابطه اساسی بین آنها می تواند با توجه به ماهیت کار آنها تعیین شود. معادله فیشر نه تنها نقش مهمی در حوزه آکادمیک و تجارت دارد بلکه دارای برنامه هایی است که می توانید به عنوان یک سرمایه گذار از آن سود ببرید. معادله فیشر دارای کاربردهای عملی کوتاه مدت است که می توانید در زندگی روزمره از آنها استفاده کنید. از آنجا که این تخمینی از قدرت خرید با توجه به نرخ تورم است ، می توانید از آن برای تعیین نرخ "واقعی" بازده سرمایه گذاری براساس آنچه سود شما خریداری خواهد کرد استفاده کنید. به عنوان مثال ، اگر یک گواهی سپرده ۱۲ ماهه را به مبلغ ۵۰۰۰ دلار با نرخ بهره ۹۴/۰ درصد خریداری کرده و تورم ثابت بماند ، در پایان سال ۵۰۴۷/۲۲ دلار خواهید داشت. اگر تورم در طول سال ۲ درصد افزایش یابد ، در حقیقت ، شما در واقع سرمایه گذاری را از دست می دهید ، زیرا سود و قدرت خرید پول شما ۵۳/۵۰ دلار یا ۱۰۶ درصد سکاهش می یابد و شما تنها ۴۹۹۳/۷۲ دلار خرج می کنید. دانستن نرخ واقعی بهره برای تصمیم گیری های مناسب سرمایه گذاری بسیار مهم است. در حالی که

استفاده از معادله فیشر در محاسبه اثرات کوتاه مدت می تواند مفید و جالب باشد ، هنگام استفاده از آن در دراز مدت نتایج حاصل شده، از اهمیت بیشتری برخوردار می شوند. محاسبات مرکب با استفاده از چارچوب زمانی برای سرمایه گذاری ، مبلغ سرمایه گذاری اولیه ، نرخ بهره اسمی و متغیر نرخ تورم می تواند ابزاری برای تجزیه و تحلیل پتانسیل یک سرمایه گذاری باشد و برای کمک به شما در تعیین اینکه در کدام نقطه از چرخه اقتصادی معقول است، انتخاب شود. معادله فیشر بیش از یک معادله است. این نشان می دهد که چگونه عرضه پول بر نرخ سود اسمی و نرخ تورم به عنوان یک ردیف تأثیر می گذارد. به عنوان مثال ، اگر تغییر در سیاست پولی یک بانک مرکزی باعث شود نرخ تورم کشور برای ۱۰ درصد افزایش یابد ، نرخ سود اسمی همان اقتصاد نیز دنبال می شود و ۱۰ درصد نیز افزایش می یابد. در این زمینه ، ممکن است فرض شود که تغییر در عرضه پول هیچ تأثیری در نرخ بهره واقعی نخواهد داشت. با این حال ، این موضوع به طور مستقیم تغییرات در نرخ سود اسمی را منعکس می کند . در سال ۱۹۳۷ ، فیشر معادله واکنش- انتشار غیر خطی را برای توصیف این نوع انتشار پیشنهاد داد. یک جهش ویروسی در یک زیستگاه بی نهایت طولانی که با این معادله روبرو می شود [۱-۲]. این معادله تصادفی-مالی کاربردهای فراوانی در علم اقتصاد و حوزه مالی دارد از جمله کنترل تورم بر نرخ بهره و افزایش قدرت خرید . تاکنون روشهای تحلیلی و عددی مختلفی برای تعیین جواب تقریبی این معادله معرفی شده است [۳-۲۰] .

در بخش دوم بعد از معرفی روشهای عددی بسط هم محلی و توضیح چند جمله ایهای متعامد ژاکوبی و چند جمله ایهای متعامد ایرفویل، به معرفی معادله فیشر و حل آن با چند جمله ای ژاکوبی و چند جمله ایهای متعامد ایرفویل می پردازیم. با رسیدن به دستگاه غیر خطی که به کمک روش تکراری نیوتن قابل حل است و بیان مثال عددی، به مقایسه روشهای عددی می پردازیم و نتایج بدست آمده را بیان می کنیم. در بخش ۳ و ۴ به اثبات یکتایی ، وجود جواب و همگرایی روشها پرداخته و دقت جواب تقریبی بدست آمده با سرعت همگرایی بالا و مدت زمان اجرای الگوریتم کم نشان داده می شود.

۲- معرفی روشهای عددی بسط هم محلی

۲-۱- چند جمله ای متعامد ژاکوبی

چند جمله ای متعامد ژاکوبی را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$u_n(x, t) = w(x)w(t) \sum_{i=0}^n a_i p_i^{\alpha, \beta}(x) p_i^{\alpha, \beta}(t), \quad \alpha, \beta > -1,$$

$$w(x) = \frac{(1-x)^\alpha}{(1+x)^\beta}, \quad w(t) = \frac{(1-t)^\alpha}{(1+t)^\beta},$$

$$p_i^{\alpha, \beta}(x) = \frac{(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}}{(-2)^i i!} \cdot \frac{d^i}{dx^i} [(1-x)^{i+\alpha}(1+x)^{i+\beta}], \quad (1)$$

$$(p_i^{\alpha, \beta})'(x) = \frac{1}{2} (i + \alpha + \beta + 1) p_{i-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(x).$$

پس در حالت کلی داریم:

$$\left(p_i^{\alpha,\beta}\right)^{(m)}(x) = \frac{1}{m!}(i + \alpha + \beta + m)p_{i-m}^{(\alpha+m,\beta+m)}(x), i \geq m,$$

$$p_i^{\alpha,\beta}(t) = \frac{(1-t)^{-\alpha}(1+t)^{-\beta}}{(-2)^i i!} \cdot \frac{d^i}{dt^i} [(1-t)^{i+\alpha}(1+t)^{i+\beta}], \quad (۲)$$

$$\left(p_i^{\alpha,\beta}\right)^{(m)}(t) = \frac{1}{m!}(i + \alpha + \beta + m)p_{i-m}^{(\alpha+m,\beta+m)}(t), i \geq m.$$

۲-۲- چند جمله ای متعامد ایرفویل

$$u_n(x, t) = w(x)w(t) \sum_{i=0}^n a_i s_i(x) s_i(t), \quad (۳)$$

$$w(x) = \sqrt{\frac{(1+x)}{(1-x)}} \quad , \quad w(t) = \sqrt{\frac{(1+t)}{(1-t)}} \quad ,$$

$$s_i(x) = \frac{\cos\left[\left(i + \frac{1}{2}\right) \arccos x\right]}{\cos\left[\frac{1}{2} \arccos x\right]},$$

$$s_i(t) = \frac{\cos\left[\left(i + \frac{1}{2}\right) \arccos t\right]}{\cos\left[\frac{1}{2} \arccos t\right]},$$

$$u_i(x) = \frac{\sin\left[\left(i + \frac{1}{2}\right) \arcsin x\right]}{\cos\left[\frac{1}{2} \arcsin x\right]},$$

$$u_i(t) = \frac{\sin\left[\left(i + \frac{1}{2}\right) \arcsin t\right]}{\cos\left[\frac{1}{2} \arcsin t\right]},$$

$$\begin{aligned} (1+x)s_i'(x) &= \left(i + \frac{1}{2}\right)u_i(x) - \frac{1}{2}s_i(x), \\ (1+t)s_i'(t) &= \left(i + \frac{1}{2}\right)u_i(t) - \frac{1}{2}s_i(t). \end{aligned} \quad (۴)$$

۳-۲- معرفی معادله فیشر و حل عددی آن با روش بسط هم محلی بر اساس پایه متعامد چندجمله ای ژاکوبی

معادله فیشر را با شرایط اولیه $u(x, 0) = f(x)$ در بازه $x \in R, t \in (0, T)$ به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + u(1 - u^s) \quad (\Delta)$$

برای حل معادله داریم :

$$u(x, t) - u(x, 0) = \int_0^t u_{xx}(x, t) dt + \int_0^t u(1 - u^s) ds \quad (\epsilon)$$

بنابر معادله (۱) و مشتق گیری نسبت به x داریم:

$$\begin{aligned} u_x &= w(t) \left[w'(x) \sum_{i=0}^n a_i p_i^{\alpha, \beta}(x) p_i^{\alpha, \beta}(t) + w(x) \sum_{i=0}^n a_i \left(p_i^{\alpha, \beta}(x) \right)' p_i^{\alpha, \beta}(t) \right], \\ u_{xx} &= w''(x) \sum_{i=0}^n a_i p_i^{\alpha, \beta}(x) p_i^{\alpha, \beta}(t) + 2w'(x) \sum_{i=0}^n a_i \left(p_i^{\alpha, \beta}(x) \right)' p_i^{\alpha, \beta}(t) + \\ &w(x) \sum_{i=0}^n a_i \left(p_i^{\alpha, \beta}(x) \right)'' p_i^{\alpha, \beta}(t). \end{aligned} \quad (۸)$$

پس با جاگذاری در معادله (۷) روابط زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} u(x, t) - u(x, 0) &= \int_0^t w''(x) \sum_{i=0}^n a_i p_i^{\alpha, \beta}(x) p_i^{\alpha, \beta}(t) dt + 2w'(x) \sum_{i=0}^n a_i \left(p_i^{\alpha, \beta}(x) \right)' p_i^{\alpha, \beta}(t) \\ &+ w(x) \sum_{i=0}^n a_i \left(p_i^{\alpha, \beta}(x) \right)'' p_i^{\alpha, \beta}(t) dt + \\ &\int_0^t w(x) w(t) \sum_{i=0}^n a_i p_i^{\alpha, \beta}(x) p_i^{\alpha, \beta}(t) \left(1 - \left(w(x) w(t) \sum_{i=0}^n a_i p_i^{\alpha, \beta}(x) p_i^{\alpha, \beta}(t) \right)^s \right) dt \end{aligned} \quad (۹)$$

معادله ی (۹) را می توان به صورت دستگاه ماتریسی زیر نوشت:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{i=0}^n a_i p_i^{\alpha, \beta}(x_i) p_i^{\alpha, \beta}(t_j), \\ B_{ij} &= \sum_{i=0}^n a_i \left(p_i^{\alpha, \beta}(x_i) \right)' p_i^{\alpha, \beta}(t_j), \\ C_{ij} &= \sum_{i=0}^n a_i \left(p_i^{\alpha, \beta}(x_i) \right)'' p_i^{\alpha, \beta}(t_j), \end{aligned} \quad (۱۰)$$

$$\int_0^t w''(x)A_{ij} + 2w'(x)B_{ij} + w(x)C_{ij} dt + \int_0^t w(x)w(t) A_{ij} \left(1 - (w(x)w(t)A_{ij})^s\right) dt. \quad (11)$$

با مختصر سازی و جاگذاری روابط زیر حاصل می شود:

$$w(t) = e, \quad w(x) = q, \quad w'(x) = r, \quad w^{(2)}(x) = s. \\ u(x, t) = f(x) + \int_0^t s[A_{ij} + 2rB_{ij} + qC_{ij}] dt + \int_0^t qe A_{ij} \left(1 - (qeA_{ij})^s\right) dt. \quad (12)$$

معادله (۱۲) یک دستگاه ماتریسی غیرخطی که با روشهای تکراری نیوتن قابل حل می باشد.

۳-۳- حل عددی معادله فیشر با روش بسط هم محلی بر اساس پایه متعامد چندجمله ای ایرفویل

معادله فیشر را با شرایط اولیه $u(x, 0) = f(x)$ در بازه $x \in R, t \in (0, T)$ به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + u(1 - u^s) \quad (13)$$

از معادله (۱۳) نسبت به متغیر t مشتق می گیریم.

$$u(x, t) - u(x, 0) = \int_0^t u_{xx}(x, t) dt + \int_0^t u(1 - u^s) ds. \quad (14)$$

برای حل معادله بنابر معادله (۱) و مشتق گیری نسبت به x داریم:

$$u_x = w(t) \left[w'(x) \sum_{i=0}^n a_i s_i(x) s_i(t) + w(x) \sum_{i=0}^n a_i (s_i(x))' s_i(t) \right] \\ u_{xx} = w''(x) \sum_{i=0}^n a_i s_i(x) s_i(t) + 2w'(x) \sum_{i=0}^n a_i (s_i(x))' s_i(t) + \\ w(x) \sum_{i=0}^n a_i (s_i(x))'' s_i(t). \quad (15)$$

پس با جاگذاری در معادله (۷) خواهیم داشت:

$$u(x, t) - u(x, 0) = \\ \int_0^t w''(x) \sum_{i=0}^n a_i s_i(x) s_i(t) + 2w'(x) \sum_{i=0}^n a_i (s_i(x))' s_i(t) + w(x) \sum_{i=0}^n a_i (s_i(x))'' s_i(t) dt \\ + \int_0^t w(x)w(t) \sum_{i=0}^n a_i s_i(x) s_i(t) \left(1 - (w(x)w(t) \sum_{i=0}^n a_i s_i(x) s_i(t))^s\right) ds. \quad (16)$$

با تبدیل روابط (۱۶) دستگاه ماتریسی زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \sum_{i=0}^n a_i s_i(x) s_i(t), \\ E_{ij} &= \sum_{i=0}^n a_i (s_i(x))' s_i(t), \\ F_{ij} &= \sum_{i=0}^n a_i (s_i(x))'' s_i(t), \end{aligned} \quad (۱۷)$$

$$\begin{aligned} u(x, t) - u(x, 0) &= \\ &= \int_0^t w''(x) D_{ij} + 2w'(x) E_{ij} + w(x) F_{ij} dt \\ &+ \int_0^t w(x) w(t) D_{ij} (1 - (w(x) w(t) D_{ij})^s) ds. \end{aligned} \quad (۱۸)$$

دستگاه غیرخطی زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned} w(t) &= e, \quad w(x) = q, \quad w'(x) = r, \quad w^{(2)}(x) = s. \\ u(x, t) &= f(x) + \int_0^t s D_{ij} + 2r E_{ij} + q F_{ij} dt \\ &+ \int_0^t q e D_{ij} (1 - (q e D_{ij})^s) dt. \end{aligned} \quad (۱۹)$$

۳- قضایا و اثبات ها

۳-۱- قضیه وجود و یکتایی جواب

مسئله جواب یکتا دارد وقتی که $0 < \alpha < 1$ و مقدار $\alpha = T(L_1 + L_2 + L_3 + L_4)$ باشد. فرض کنیم

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + u(1 - u^s) \\ u_x &= F_1(u(x, t)), \\ u_{xx}(x, t) &= F_2(u(x, t)), \\ u(1 - u^s) &= F_3(u(x, t)), \\ f(x, t) &= F_4(u(x, t)). \end{aligned}$$

$$\forall x \in J = [0, T] \text{ و } 0 \leq t \leq T$$

تابع $u(x, t)$ در شرط لیپ شیتز صدق می کند و داریم:

$$\begin{aligned} |F_1(u(x, t)) - F_1(u^*(x, t))| &\leq L_1 |u(x, t) - u^*(x, t)| \\ |F_2(u(x, t)) - F_2(u^*(x, t))| &\leq L_2 |u(x, t) - u^*(x, t)| \\ |F_3(u(x, t)) - F_3(u^*(x, t))| &\leq L_3 |u(x, t) - u^*(x, t)|, \end{aligned}$$

$$|F_4(u(x, t)) - F_4(u^*(x, t))| \leq L_4 |u(x, t) - u^*(x, t)|.$$

اثبات:

فرض می کنیم مسئله جواب یکتا نداشته باشد و $u(x, t), u^*(x, t)$ جوابهای مسئله باشند، داریم:

$$\begin{aligned} |u(x, t) - u^*(x, t)| &= \left| \int_0^t F_1(u(x, t)) d\tau + \int_0^t F_2(u(x, t)) d\tau - \int_0^t F_3(u(x, t)) d\tau \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t F_4(u(x, t)) d\tau - \left(\int_0^t F_1(u^*(x, t)) d\tau + \int_0^t F_2(u^*(x, t)) d\tau - \int_0^t F_3(u^*(x, t)) d\tau \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^t F_4(u^*(x, t)) d\tau \right) \right| \leq \\ &\int_0^t |F_1(u(x, t)) - F_1(u^*(x, t))| d\tau + \int_0^t |F_2(u(x, t)) - F_2(u^*(x, t))| d\tau - \int_0^t |F_3(u(x, t)) - \\ &\quad F_3(u^*(x, t))| d\tau + \int_0^t |F_4(u(x, t)) - F_4(u^*(x, t))| d\tau \\ &\leq L_1 |u(x, t) - u^*(x, t)| + L_2 |u(x, t) - u^*(x, t)| - L_3 |u(x, t) - u^*(x, t)| \\ &\quad + L_4 |u(x, t) - u^*(x, t)| \\ &\leq T(L_1 + L_2 + L_3 + L_4) = \alpha |u - u^*| \\ &\text{پس } |u(x, t) - u^*(x, t)| \leq 0 \text{ و در نتیجه } u(x, t) = u^*(x, t) \end{aligned}$$

۳-۲- همگرایی روش ها

۳-۳-۱- همگرایی روش هم محلی ژاکوبی

قضیه ۱: کران بالای معادله ی $u_n(x, t) = \sum_{i=0}^n a_i p_i(x) p_i(t)$ برای مسئله ۱ به کمک روش هم محلی ژاکوبی به مقدار زیر همگراست:

$$|E_n(x, t), 0| \leq c_1 \frac{n^{-z+1}}{1-z} + c_2 n^{-z+1}$$

اثبات: داریم:

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{i=0}^{\infty} a_i p_i^{\alpha, \beta}(x) p_i^{\alpha, \beta}(t), \sum_{i=0}^n a_i^{(n)} p_i^{\alpha, \beta}(x) p_i^{\alpha, \beta}(t) \right| \\ &= \left| \sum_{i=0}^n a_i p_i^{\alpha, \beta}(x) p_i^{\alpha, \beta}(t) + \sum_{i=0}^n a_i^{(n)} p_i^{\alpha, \beta}(x) p_i^{\alpha, \beta}(t), \sum_{i=0}^n a_i^{(n)} p_i^{\alpha, \beta}(x) p_i^{\alpha, \beta}(t) \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=0}^n a_i p_i^{\alpha, \beta}(x) p_i^{\alpha, \beta}(t), \sum_{i=0}^n a_i^{(n)} p_i^{\alpha, \beta}(x) p_i^{\alpha, \beta}(t) \right| + \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i^{(n)} p_i^{\alpha, \beta}(x) p_i^{\alpha, \beta}(t), 0 \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^n |p_i^{\alpha, \beta}(x) p_i^{\alpha, \beta}(t)| |a_i - a_i^{(n)}| + \sum_{i=n+1}^{\infty} |p_i^{\alpha, \beta}(x) p_i^{\alpha, \beta}(t)| |a_i - 0| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{i=0}^n |a_i - a_i^{(n)}| + \sum_{i=n+1}^{\infty} |a_i - 0| \\ &\leq c_1 \frac{n^{-z+1}}{1-z} + c_2 n^{-z+1}. \end{aligned}$$

۲-۳-۲- همگرایی روش هم محلی ایرفویل

قضیه ۲: کران بالای معادله ی $u_n(x, t) = \sum_{i=0}^n a_i s_i(x) s_i(t)$, برای مسئله ۱ به کمک روش هم محلی ایرفویل به مقدار زیر همگراست:

$$|E_m(x, t), 0| \leq e_1 \frac{m^{-k+1}}{1-k} + e_2 m^{-k+1}$$

اثبات: داریم:

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{i=0}^{\infty} a_i s_i^{\alpha, \beta}(x) s_i^{\alpha, \beta}(t), \sum_{i=0}^m a_i^{(m)} s_i^{\alpha, \beta}(x) s_i^{\alpha, \beta}(t) \right| \\ &= \left| \sum_{i=0}^m a_i s_i^{\alpha, \beta}(x) s_i^{\alpha, \beta}(t) + \sum_{i=0}^m a_i^{(m)} s_i^{\alpha, \beta}(x) s_i^{\alpha, \beta}(t), \sum_{i=0}^m a_i^{(m)} s_i^{\alpha, \beta}(x) s_i^{\alpha, \beta}(t) \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=0}^m a_i s_i^{\alpha, \beta}(x) s_i^{\alpha, \beta}(t), \sum_{i=0}^m a_i^{(m)} s_i^{\alpha, \beta}(x) s_i^{\alpha, \beta}(t) \right| + \left| \sum_{i=m+1}^{\infty} a_i^{(m)} s_i^{\alpha, \beta}(x) s_i^{\alpha, \beta}(t), 0 \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^m |s_i^{\alpha, \beta}(x) s_i^{\alpha, \beta}(t)| |a_i - a_i^{(m)}| + \sum_{i=m+1}^{\infty} |s_i^{\alpha, \beta}(x) s_i^{\alpha, \beta}(t)| |a_i - 0| \\ &\leq \sum_{i=0}^m |a_i - a_i^{(m)}| + \sum_{i=m+1}^{\infty} |a_i - 0| \\ &\leq e_1 \frac{m^{-k+1}}{1-k} + e_2 m^{-k+1}. \end{aligned}$$

الگوریتم و مثال عددی

در این بخش، مثال عددی را محاسبه می کنیم که توسط روشهای عددی هم محلی با چندجمله ای و متلب ۲۰۱۲، با توجه به الگوریتم زیر 11 Mathematica ژاکویی و چند جمله ای ایرفویل با برنامه $\varepsilon = 10^{-9}$ یک مقدار مثبت داده شده است و مقدار آن برابر است با ۴ ارائه شده است.

الگوریتم:

گام ۱: قرار بده $n \leftarrow 0$

گام ۲: معادله (۶) را با روش هم محلی با پایه های متعامد ژاکوبی و ایرفویل به کمک ماتریس غیر خطی بدست آمده حل می کنیم.

گام ۳: اگر $\frac{|u_{n+1}-u_n|}{u_n} < \varepsilon$ که $\varepsilon = 10^{-9}$ برو به گام ۴، در غیر اینصورت $n \leftarrow n + 1$ و برو به گام ۲.

گام ۴: $u_n(x, t)$ را به عنوان جواب تقریبی چاپ کن.

مثال ۱: معادله $u_t(x, t) + \mu(x, t)u_x(x, t) + \frac{1}{2}\sigma^2(x, t)u_{xx}(x, t) - V(x, t)u(x, t) + f(x, t) = 0$ با شرایط اولیه به صورت زیر:

$$u(x, T) = \varphi(x), \varepsilon = 10^{-5}, \alpha = 0.61542,$$

$$\varphi(x) = x^2 e^{-x} + \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right),$$

$$\mu(x, t) = x e^{x^2+t}$$

$$V(x, t) = x^2,$$

$$\sigma(x, t) = \ln\left(\frac{x^3}{3} + \frac{7}{2}t^2\right),$$

$$f(x, t) = \frac{xt^3}{6} + 5.$$

جدول (۱) جواب تقریبی بدست آمده معادله تصادفی فیشر با روش عددی هم محلی بر پایه های متعامد ژاکوبی

و ایرفویل

(x, t)	Jacobi approximate	Airfoil approximate	Matlab approximate n=8	Matlab error Cpu time: 9.6615sec	Jacobi error	Airfoil Error
(0.1,0.13)	1.263417	1.746951	1.041134	0.001004	0.0000000237814	0.0000000124902
(0.2,0.19)	3.174319	3.294116	2.328117	0.001198	0.0000000270841	0.0000000175613
(0.3,0.21)	4.274815	4.454128	4.593402	0.001474	0.0000000313714	0.0000000241417
(0.4,0.25)	7.439074	7.631498	6.279016	0.001805	0.0000000364521	0.0000000294453
(0.5,0.31)	9.513691	9.705413	9.502318	0.002711	0.0000000417724	0.0000000328849
(0.6,0.34)	12.249813	12.543216	11.101671	0.003145	0.0000000481326	0.0000000379168
(0.7,0.41)	14.483205	14.703226	13.754285	0.009063	0.0000000523367	0.0000000407531
(0.8,0.45)	17.651814	17.816907	16.941176	0.009740	0.000000056359	0.0000000454714

منبع: یافته های پژوهشگر

نتیجه گیری

در این مقاله بخاطر اهمیت و کاربردهای مهم معادله تصادفی فیشر در ریاضیات مالی و اقتصاد به بررسی آن و تعیین جواب تقریبی با دقت و سرعت همگرایی بالا می پردازیم. این معادله از خانواده معادلات دیفرانسیل با مستقات جزئی غیرخطی است که با روشهای تحلیلی قابل حل نمی باشد، لذا از روشهای عددی برای تعیین جواب تقریبی آن باید استفاده کرد. روش عددی بسط هم محلی با پایه های متعامد از جمله روش های عددی است که دارای سرعت همگرایی بالا و مدت زمان اجرای الگوریتم کوتاهتری نسبت به روش های عددی دیگر

است. با بررسی جدول بهینه بودن روش هم محلی با پایه متعامد ایرفویل نشان داده شده است. با توجه به نتایج بدست آمده در جدول مشاهده می کنیم که چندجمله ای ایرفویل با تعداد گام کمتر، خطای کمتر و مدت زمان اجرای الگوریتم کمتر نسبت به چندجمله ای ژاکوبی به جواب تقریبی معادله همگرا و نزدیک می شود. در ضمن هرچه مقدار x, t کوچکتر می شود نتایج بهتری حاصل می گردد و با تعداد گام کمتر، محاسبات به نتیجه مطلوب می رسد. تاکنون روی این دسته از معادلات که یکی از پرکاربردترین و پیچیده ترین معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی است، کار چندانی صورت نگرفته است. ما در این مقاله روش بسط هم محلی را مورد بررسی قرار می دهیم. می توان روش هم محلی با پایه های دیگر مثل ژنوچی و برنشتاین و... را نیز در کارهای آتی روی معادلات دیفرانسیل و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی از این نوع، به همین صورت پیاده سازی کرد و دقت جواب تقریبی بدست آمده را بررسی کرد. روش هم محلی یکی از روشهای عددی بسط می باشد که با توجه به ساختار و الگوریتم آن منجر به دستگاه های غیرخطی خوش وضع و پایدار می شود که همگرایی و پایداری روش را تضمین می کند. بخش قابل توجه مقاله قسمت مربوط به قضا یا یعنی اثبات و بررسی سازگاری جواب معادله تصادفی فیشر، همگرایی و پایداری روش هم محلی با پایه های متعامد ایرفویل و ژاکوبی است. در واقع این بخش نشان میدهد که جواب تقریبی بدست آمده توسط روش عددی تحت چه شرایطی دارای دقت بیشتر و سرعت همگرایی بالاتری است. و به ما این توانمندی را می دهد که میزان خطای جواب تقریبی بدست آمده را تحت کنترل قرار دهیم.

فهرست منابع

- بیژن باصری، ابراهیم عباسی، غفار کیانی، اثرات مالی گسترش انرژی های تجدید پذیر بر رشد اقتصادی در ایران. فصلنامه اقتصاد مالی، دوره ۱۳، شماره ۴۶، اردیبهشت ۱۳۹۸، صفحه ۱۸۲-۱۶۱.
- فرزانه فراهانی آزاد، منصوره عقیلی، سینا نعمتی زاده، ارائه مدل بازاریابی در شرایط رکود. فصلنامه اقتصاد مالی، دوره ۱۶، شماره ۱، بهار ۱۴۰۱، صفحه ۹۲-۷۱.
- فاطمه حجاران، رضا رادفر، علی دیواندری، داوود فدایی، ارائه مدل بانکداری سبز مبتنی بر مؤلفه های مدیریت نوآوری برای کسب مزیت رقابتی پایدار. فصلنامه اقتصاد مالی، دوره ۱۶، شماره ۱، بهار ۱۴۰۱، صفحه ۲۸۰-۲۵۷.
- R. A. Fisher, The wave of advance of advantageous genes. Ann. Eugenics. 7 (1937) 355-369.
- A. Kolmogorov, N. Petrovsky, S. Piscounov, Etude de I equations de la diffusion avec croissance de la quantitate de matiere et son applicationa un probolome biologique, Bull. Univ. Mosku. 1 (1937) 1-25.
- K. Canan, A novel approach for solving the Fisher equation using Exp-function method. Physics Letters A. 372(2008) 3836-3840.
- M. Matinfar, M. Ghanbari, The application of the modified variational iteration method on the generalized Fisher's equation. Journal of Applied Mathematics and Computing. 31(2009) 165-175.
- Sh. Sadigh Behzadi, Convergence of Iterative Methods Applied to Generalized Fisher Equation. International Journal of Differential Equations. 2010(2010) 1-16.

- S.Dutt, D.Ghosh , A Threshold Cointegration Test of the Fisher Hypothesis Case Study of 5 European Nations. *Southwestern Economic Review*. 34(2007)41-45.
- T.Song, C.Lee, The Fisher Hypothesis: A Revisit with Covariate Tests. Conference Paper Presented at 10th Annual Conference on Empirical Economics, in Chiay, Taiwan, 2009.
- R. Victor Fuchs , G.Health, I. Fisher, *American Journal of Economics and Sociology*. 64 (2005) 407–425.
- A. M. Wazwaz , A. Gorguis, An analytic study of Fisher's equation by using Adomian decomposition method. *Appl. Math. Comput.* **154** (2004) 609–620.
- A. Şahin, İ. Dağ, B. Saka, A B-spline algorithm for the numerical solution of Fisher's equation. *Kybernetes*. **37** (2008) 326–342.
- R. C. Mittal , R. K. Jain, Numerical solutions of nonlinear Fisher's reaction–diffusion equation with modified cubic B-spline collocation method. *Math. Sci.* **7** (2013), 1-12.
- M. Aghamohamadi, J. Rashidinia , R. Ezzati, Tension spline method for solution of non-linear Fisher equation. *Appl. Math. Comput.* **249** (2014), 399–407.
- I. Dag , O. Ersoy, The exponential cubic B-spline algorithm for Fisher equation. *Chaos, Solitons Fractals*. **86** (2016), 101–106.
- M. Ilati ,M. Dehghan, Direct local boundary integral equation method for numerical solution of extended Fisher Kolmogorov equation. *Eng. Comput.* **34** (2017), 203–213.
- X. Qin, Y.Xiaozhong , L.Peng , A class of explicit implicit alternating difference schemes for generalized time fractional Fisher equation. *AIMS Mathematics*. 10(2021) 11449-11466.
- M. Alqhtani, M.S.Khaled , Numerical solutions of space-fractional diffusion equations via the exponential decay kernel. *AIMS Mathematics*.7(2022) 6535-6549.
- S.Kamal , N.Hafsa , M. Sarwar, T. Abdeljawad , On spectral numerical method for variable-order partial differential equations. *AIMS Mathematics*. 7(2022)10422-10438.

Optimization of the solution of the Fisher stochastic-financial equation by implementing the colocal numerical expansion method with orthogonal bases

shadan sadigh behzadi¹
Mohammad alavi²

Received: 14/ July /2025 Accepted: 14/ September /2025

Abstract

In this paper, we solve the Fisher equation by the numerical collocation method with the orthogonal Jacobi and airfoil bases. This partial differential equation is one of the most important and widely used equations in financial mathematics and economics. The Fisher equation shows how inflation expectations affect interest rates and purchasing power. This equation offers a solution for quadratic partial differential equations and stochastic differential equations. Applications of this equation in the field of random control, mathematical financing, risk analysis and related fields can be mentioned. In this paper, by implementing numerical methods on the desired equation, nonlinear devices are obtained that can they can be solved by methods for solving nonlinear devices, such as Newton's iterative method. The existence, uniqueness of the solution and convergence of the methods are examined and in an example we will show that with a low number of repetitions and errors and high convergence speed we converge to the approximate solution of the equation and this shows the optimality of this numerical method compared to analytical methods.

Keywords: Collocation method, Jacobi polynomial, Airfoil polynomial, Fisher equation.

jel classification: C02, C22

¹ Department of Mathematics and Statistics, Islamic Azad University, Qazvin Branch, Qazvin, Iran.
(Corresponding author). 0451509821@iau.ir

² Department of Business Administration, Central Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran.
0041137748@iau.ir