مقایسه اثرمیدان مغناطیسی در دو راستای x وz بر ناهم خوانی کوانتومی هندسی درمدل هایزنبرگ XXZ

صفا جامی[1*]، زهره حق پناه[1]

تاریخ ارسال : ۱۴۰۰/۱۰/۱۷ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۱/۱۵

چکیده: در این مقاله سیستمی متشکل از دو ذره با اسپین ۱/۲ در مدل هایزنبرگ XXZ در نظر گرفته‌ایم. برای این سیستم ناهمخوانی کوانتومی هندسی که یکی از همبستگی‌های کوانتومی است که اخیراً در موضوع اطلاعات کوانتومی به آن توجه زیادی شده است را بدست آورده، سپس اثر تغییر دما و ضریب ناهمگنی را بر آن بررسی کرده‌ایم. پس از آن به سیستم میدان مغناطیسی خارجی اعمال کرده و در دوحالت متفاوت میدان در راستای x و میدان در راستای z تغییرات ناهم خوانی کوانتومی هندسی را در حضور میدان بررسی کرده‌ایم و تغییرات ناهمخوانی در دو راستای متفاوت باهم مقایسه کرده‌ایم. نتایج نشان می‌دهد که به طور کلی اعمال میدان مغناطیسی، ناهمخوانی را کاهش می‌دهد. وقتی میدان در راستای z است با افزایش مقدار میدان، ناهمخوانی به سرعت کاهش و به سمت صفر میل می‌کند، ولی در حالت میدان در راستای x افزایش میدان در دماهای پایین ناهمخوانی را صفر نمی‌کند و صفر شدن ناهمخوانی فقط در دماهای بالاتر اتفاق می‌افتد.

کلمات کلیدی: ناهمخوانی کوانتومی هندسی، مدل هایزنبرگ XXZ ، میدان مغناطیسی

۱- مقدمه

یکی از جذاب ترین جنبه‌های مکانیک کوانتومی این حقیقت است که ذرات یا سیستم‌ها می‌توانند درهم تنیده باشند، درهم تنیدگی [۱] نوعی از همبستگی‌های کوانتومی است که در حالت‌های تفکیک ناپذیر وجود دارد، اما مطالعات اخیر نشان داده است که کوانتومی بودن به غیر از درهم تنیدگی می‌تواند در حالت‌های تفکیک پذیر نیز وجود داشته باشد. ناهمخوانی کوانتومی[۲] خاصیتی است که همبستگی‌های کوانتومی را درهمه حالت‌ها نمایان می‌سازد و رفتارهای غیرکلاسیک حالت‌های درهم آمیخته غیر درهم تنیده را توجیه می‌کند. در یک سیستم خالص، ناهمخوانی و درهم تنیدگی با هم یکسان‌اند، اما در سیستم‌های مرکب آمیختگی باعث به وجود آمدن اختلاف بین ناهمخوانی و درهم تنیدگی می‌شود. نا همخوانی کوانتومی اولین بار توسط اولیور و زورک[۳]، همچنین هندرسون و ودرال [۴] درسال ۲۰۰۱ معرفی شد. معیارهای زیادی از ناهمخوانی کوانتومی پیشنهاد شده است که در حالت کلی به دو دسته تقسیم می‌شود. شاخه اول بر اساس آنتروپی [۵-۷] و شاخه دوم که از طریق روش هندسی [۸-۱۰] تعریف می‌شود بر اساس معیار اختلاف فاصله است، این نوع از ناهمخوانی به صورت کمترین فاصله یک حالت کوانتومی از همه حالت‌های با ناهمخوانی صفر بیان می‌شود. برای سیستم‌های دوکیوبیتی داکیک در[۸] یک بیان تحلیلی به دست می‌آورد، که مشابه اندازه هندسی درهم تنیدگی کوانتومی است و ناهمخوانی کوانتومی هندسی نامیده می‌شود.

۱- گروه فیزیک واحد مشهد، دانشگاه آزاد اسلامی، مشهد، ایران
*نویسنده مسول email: sjami@mshdiau.ac.ir

۲- ناهمخوانی کوانتومی

ناهمخوانی کوانتومی به صورت یک معیار آنتروپیک از همبستگی‌های کوانتومی در یک حالت کوانتومی است که برحسب اطلاعات متقابل کوانتومی تعریف می‌شود. اگر $S(\rho_A)$ آنتروپی فون نیومان زیر سیستم A، $S(\rho)$ آنتروپی کوانتومی کل سیستم و $S(\rho_A|\rho_B)$ آنتروپی کوانتومی شرطی و ρ تابع چگالی احتمال باشد آنگاه $I(\rho_{AB})$ اطلاعات متقابل کوانتومی که کل همبستگی‌های موجود درρ را نشان می‌دهد به صورت:

$$I(\rho_{AB})=S(\rho_A)+S(\rho_B)-S(\rho_{AB}) \quad (۱)$$

تعریف می‌شود، به طوریکه $S(\rho)=-\mathrm{tr}(\rho\log_2\rho)$ آنتروپی فون نیومان و $\rho_A(\rho_B)$ عملگر چگالی کاهش یافته بخش A(B) است.

طبق تعریف [۱۱]، $J_A(\rho)$ اطلاعات متقابل بر پایه اندازه گیری است که می‌تواند به صورت همبستگی‌های کلاسیک تفسیر شود:

$$J_A(\rho)=S(\rho_B)-S(\rho_A|\rho_B) \quad (۲)$$

به طوریکه اختلاف بین آنها ناهمخوانی کوانتومی بر اساس فاصله را تعریف می‌کند:

$$D_A(\rho)=I(\rho)-J_A(\rho) \quad (۳)$$

از آنجایی که استخراج راه حل‌های تحلیلی برای نا همخوانی کوانتومی با این روش به دلیل الزام مینیمم کردن روی تمامی حالت‌ها مشکل بود، داکیک، ودرال و براکنر[۸]، یک معیار هندسی برای ناهمخوانی کوانتومی پیشنهاد کردند که درآن مقدار همبستگی‌های کوانتومی یک حالت برحسب حداقل فاصله هیلبرت اشمیت از مجموعه حالت‌های کلاسیک بیان می‌شد. محاسبات این معیار جایگزین نیاز به یک فرآیند مینیمم سازی می‌باشد که برای حالت‌های دو کیوبیتی کلی در [۸] و برای حالت‌های دو قسمتی دلخواه در [۱۱-۱۳] به طور تحلیلی آمده است. در روش ذکر شده محاسبه ناهمخوانی کوانتومی هندسی براساس استفاده از ماتریس چگالی عام است و برای هرحالت دوکیوبیتی به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\rho=\frac{1}{4}\left[1^a\otimes 1^b+\sum_{i=1}^{3}(x_i\sigma_i\otimes 1^b+1^a\otimes y_i\sigma_i)+\sum_{i,j=1}^{3}t_{ij}\sigma_i\otimes\sigma_j\right] \quad (۴)$$

که دراین روابط σ_j و σ_i ماتریس های پاولی هستند، 1^a اپراتوریکه روی H^a و 1^b اپراتوریکه روی H^b است و t و x و y ماتریس هایی به شکل زیراند:

$$x_i=\mathrm{tr}(\rho\sigma_i\otimes 1^b),\ y_i=\mathrm{tr}(\rho 1^a\otimes\sigma_i),\ t_{ij}=\mathrm{tr}(\rho\sigma_i\otimes\sigma_j) \quad (۵)$$

معیارناهمخوانی هندسی برای یک حالت کوانتومی در روش داکیک [۸]به شکل زیر بیان می شود:

$$GQD=\min\|\rho-x\|^2 \quad (۶)$$

در این رابطه $\|\rho-x\|^2$ مربع نرم هیلبرت اشمیت عملگرهای هرمیتی است و از رابطه زیر بدست می آید:

$$\|\rho-x\|^2=\|\rho^2\|-2\mathrm{tr}\rho x+\|x^2\| \quad (۷)$$

در اینصورت ناهم خوانی هندسی به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$GQD=\frac{1}{4}(\|x\|^2+\|T\|^2-\lambda_{max}) \quad (۸)$$

به طوریکه λ_{max} بزرگترین ویژه مقدار ماتریس xx^t+TT^t است و x و T در رابطه (۵) تعریف شده اند.

۳- معرفی مسأله

هامیلتونی سیستم دو ذره ای در مدل هایزنبرگ XXZ [۱۴]، در حالت بدون میدان مغناطیسی به شکل زیر است:

$$H=J_1(S_{1x}S_{2x}+S_{1y}S_{2y})+J_2(S_{1z}S_{2z})\rightarrow$$
$$\text{اگر } \alpha=\frac{J_2}{J_1} \rightarrow H=S_{1x}S_{2x}+S_{1y}S_{2y}+\alpha(S_{1z}S_{2z}) \quad (۹)$$

که در اینجا J_1 قدرت برهمکنش در راستای x و y، و J_2 قدرت برهمکنش در راستای z است، $J<0$ معرف دو ذره با اسپین موازی است که مربوط به مورد فرومغناطیس است و برای $J>0$ جهت گیری اسپین‌ها پاد موازی است و

مربوط به مورد آنتی فرومغناطیس است، α ضریب ناهمگنی، S_x و S_y و S_z عملگرهای اسپین هستند و $\hbar = 1$ در نظر گرفته شده است. برای این هامیلتونی ویژه مقادیر بصورت:

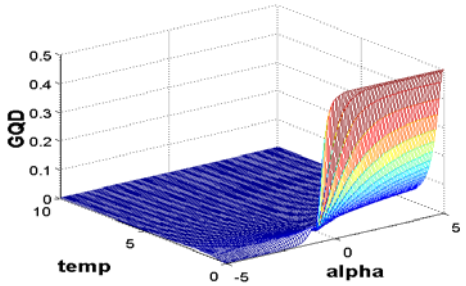
$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\alpha \text{ و } \varepsilon_3=2-\alpha \text{ و } \varepsilon_4=-2-\alpha \qquad (۱۰)$$

و ویژه بردارها به شکل زیر به دست می‌آیند

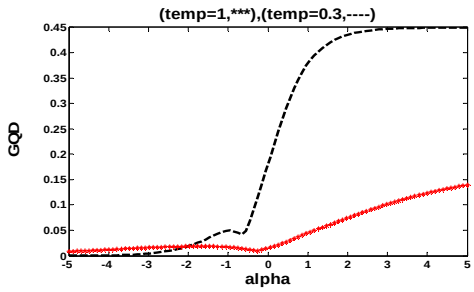
$$\Psi_1=|00\rangle,\ \Psi_2=|11\rangle, \qquad (۱۱)$$
$$\Psi_3=\frac{|01\rangle+|10\rangle}{\sqrt{2}},\ \Psi_4=\frac{|01\rangle-|10\rangle}{\sqrt{2}}$$

۴- محاسبه GQD بدون حضور میدان مغناطیسی

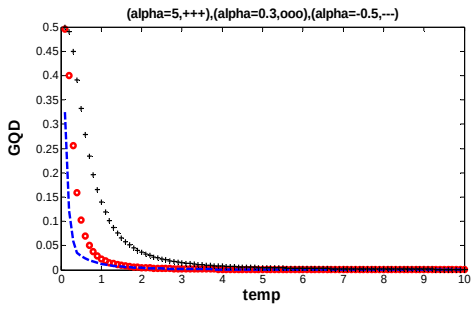
ابتدا ناهمخوانی کوانتومی هندسی (GQD) را با استفاده از روش داکیک در[۸]، محاسبه و تغییرات آن را بر حسب دما و α در نمودار ۱ رسم کرده‌ایم.



نمودار۱- الف) ناهم خوانی کوانتومی هندسی برحسب α و دما



نمودار۱-ب) ناهم خوانی کوانتومی هندسی برحسب α در دو دمای temp=0.3 و temp=1.



نمودار۱-ج) ناهم خوانی کوانتومی هندسی برحسب دما در سه مقدار α=5 و α = 0.3 و α=-0.5.

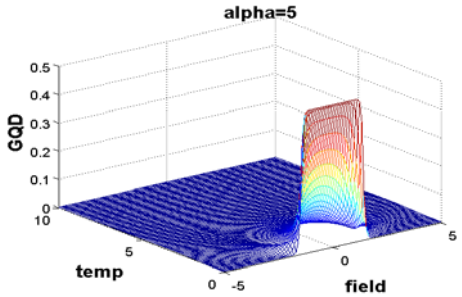
در نمودار ۱-الف و۱-ب می‌بینیم که با افزایش α مقدار GQD افزایش می‌یابد و به بیشینه GQD=5 می‌رسد. نمودار ۱-الف و ۱-ج نشان می‌دهد با افزایش دما مقدار GQD کاهش یافته است. همچنین نمودار ۱-ج نشان می‌دهد در α ثابت هر چه α بیشتر باشد، کاهش GQD برحسب دما دیرتر اتفاق می‌افتد.

۴- محاسبه GQD در حضور میدان مغناطیسی یکنواخت در راستای z

هامیلتونی سیستم دو ذره‌ای در مدل هایزنبرگ XXZ در حضور میدان مغناطیسی یکنواخت در راستای z به شکل زیر نوشته می‌شود:

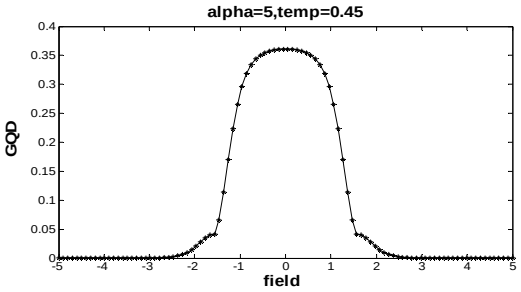
$$H=S_{1x}S_{2x}+S_{1y}S_{2y}+\alpha S_{1z}S_{2z}+B_zS_{1z}+B_zS_{2z} \qquad (۱۲)$$

برای این هامیلتونی با محاسبه ماتریس چگالی و پس از آن مقدار ناهمخوانی هندسی، در نمودار ۲-الف تغییرات GQD برحسب میدان و دما را درα=5 رسم کرده‌ایم.

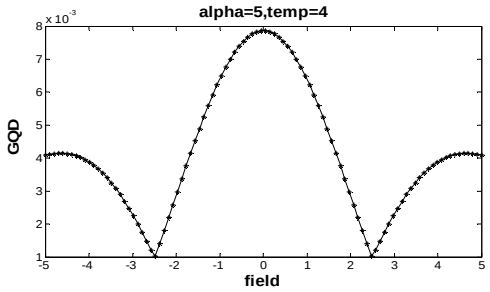


نمودار۲- الف) ناهم خوانی کوانتومی هندسی در حضور میدان یکنواخت در راستایz برحسب دما و میدان درα =5.

در نمودار ۲-الف مشاهده می‌کنیم که با افزایش دما، GQD کاهش می‌یابد همچنین GQD برحسب میدان متقارن است و با افزایش میدان فارغ از علامت آن GQD کاهش یافته و به صفر می‌رسد. در نمودارهای دوبعدی ۲-ب و۲-ج می‌بینیم که در α ثابت، در دمای temp=0.45 نمودار یک قله ای است و بیشترین مقدار GQD در میدان صفر اتفاق می‌افتد. اما رسم نمودار در دمای بالاتر temp=4 نشان دهنده یک قله مرکزی و دو قله کوچکتر در طرفین است، در این دما با افزایش میدان، GQD کاهش محسوسی دارد طوریکه در $B=\pm 2.5$ ناهمخوانی هندسی به کمترین مقدار خود در این دما یعنی GQD=0.001 می‌رسد و در ادامه با افزایش میدان مقدار GQD زیاد می‌شود. با توجه به نمودار ۲-الف، در حالت میدان یکنواخت بیشترین مقدار ناهمخوانی هندسی، GQD≅0.37 است که نسبت به حالت بدون میدان، مقدار ماکزیمم GQD کاهش یافته است.



نمودار۲- ب) ناهم خوانی کوانتومی هندسی در حضور میدان یکنواخت برحسب میدان در دما و α ثابت به ازای temp=0.45 .



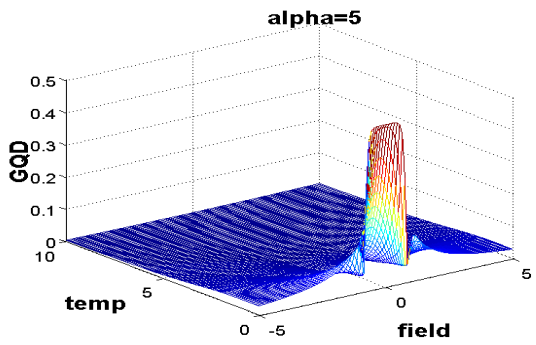
نمودار۲- ج) ناهم خوانی کوانتومی هندسی در حضور میدان یکنواخت برحسب میدان در دما و α ثابت به ازای temp=4.

۵- محاسبه GQD در حضور میدان مغناطیسی یکنواخت در راستای x

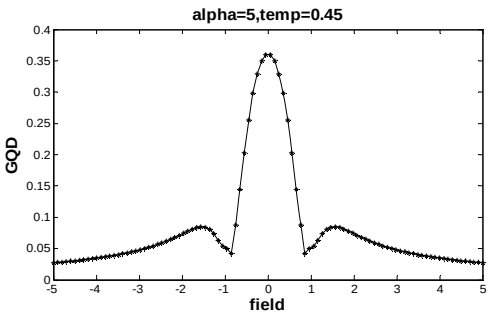
با اعمال میدان مغناطیسی یکنواخت در راستای x هامیلتونی سیستم دو ذره‌ای در مدل هایزنبرگ XXZ بشکل زیر خواهد شد:

$$H=S_{1x}S_{2x}+S_{1y}S_{2y}+\alpha\, S_{1z}S_{2z}+B_xS_{1x}+B_xS_{2x} \qquad (۱۳)$$

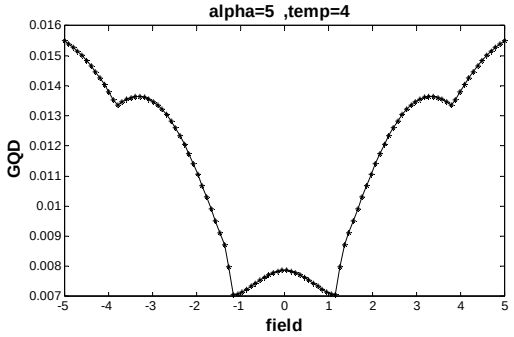
برای این حالت نیز با محاسبه ماتریس چگالی از هامیلتونی و سپس محاسبه ناهمخوانی هندسی،نمودارهای مربوطه را رسم کرده‌ایم. نمودار ۳-الف تقارن GQD برحسب میدان را نشان می‌دهد و باز هم بیشینه ناهمخوانی هندسی GQD≅ 0.37، زمانی است که میدان صفر است، با افزایش میدان از دو طرف GQD کاهش می‌یابد اما به صفر نمی‌رسد. در دو نمودار ۳-ب و ۳-ج GQD برحسب میدان، یک قله مرکزی در$B_x=0$ و دو قله درطرفین دارد طوریکه در نمودار ۳-ب که دما پایین است قله مرکزی بیشترین مقدارGQD رانشان می دهد و با افزایش میدان GQD کم می‌شود و در $B=\pm 1$ ناهمخوانی هندسی به کمترین مقدارخود رسیده است که در مقایسه با میدان راستای z در نمودار ۲-ب ،در اینجا کاهش GQD سریعتر بوده است.



نمودار۳- الف) ناهم خوانی کوانتومی هندسی در حضور میدان یکنواخت در راستای x برحسب دما و میدان در$\alpha=5$



نمودار۳-ب) ناهم خوانی کوانتومی هندسی در حضور میدان یکنواخت برحسب میدان در دما و α ثابت به ازای temp=0.45



نمودار۳-ج) ناهم خوانی کوانتومی هندسی در حضور میدان یکنواخت برحسب میدان در دما و α ثابت به ازای ج) temp=4

در نمودار ۳-ج قله مرکزی کوچکتر از دو قله طرفین است و دوباره با افزایش میدان از طرفین ناهمخوانی هندسی افزایش می‌یابد، همانطور که می‌بینیم در دماهای پایین مانند temp=4 مقدار نا همخوانی کوچکتر است و سرانجام در دمای temp≅10 به صفر می‌رسد که در نمودار۳-الف قابل مشاهده است.

نتیجه گیری

در این مقاله یک سیستم متشکل از دو ذره با اسپین ۱/۲ را در مدل هایزنبرگ XXZ در نظرگرفتیم. ابتدا هامیلتونی سیستم را بدون حضور میدان مغناطیسی نوشته و ناهمخوانی کوانتومی هندسی را برای این سیستم محاسبه نمودیم، آن گاه تغییرات ناهمخوانی کوانتومی هندسی را با تغییر پارامترهای دما و ضریب ناهمگنی α بررسی کردیم. مشاهدات مبنی بر این است که با افزایش دما مقدار ناهمخوانی کوانتومی هندسی کاهش می یابد و با افزایش α (α نسبت قدرت برهمکنش راستای z نسبت به دوراستای x وy) مقدار ناهمخوانی کوانتومی هندسی تا حد اکثر مقدار خود 0.5 افزایش می یابد. سپس به این سیستم میدان مغناطیسی یکنواخت در دو راستای x و z اعمال کرده ایم و هامیلتونی سیستم را یک بار در حضور میدان یکنواخت در راستای محور z و بار دیگر در حضور میدان یکنواخت در راستای محور x نوشته و ناهمخوانی کوانتومی هندسی را در هردو حالت محاسبه کردیم و تغییرات GQD را بر حسب میدان و دما، در این دو حالت مقایسه نمودیم. ملاحظه شد که در هر دو حالت در حضور میدان باز هم افزایش دما، باعث کاهش ناهمخوانی می‌شود و به طور کلی اعمال میدان مغناطیسی یکنواخت ناهمخوانی را کاهش می‌دهد. وقتی میدان در راستای z است با افزایش مقدار میدان، ناهمخوانی به سرعت کاهش و به سمت صفر میل می‌کند، اما در حالت میدان در راستای x افزایش میدان در دماهای پایین ناهمخوانی را صفر نمی کند و صفر شدن ناهمخوانی فقط در دماهای بالاتر اتفاق می‌افتد.

مراجع

[1] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, K. Horodecki.," *Quantum Entanglement*", Rev. Mod. Phys. 81, 2009, pp.865-942.

[2] K. Modi, A. Brodutch, H. Cable, T. Paterek, V. Vedral., *"The classical-quantum boundary for correlations: Discord and related measures*", Rev. Mod. Phys. 84, 2012, pp.1655-1708.

[3] H. Ollivier, W. H. Zurek., *"Quantum Discord: A Measure of the Quantumness of Correlations*",Phys. Rev. Lett. 88,2001, pp. 017901.

[4] L. Henderson, V. Vedral., *"Classical, quantum and total correlations"*, J. Phys. A 34, 2001,pp. 6899-6905.

[5]G. L. Giorgi, B. Bellomo, F. Galve, R. Zambirini., *"Genuine Quantum and Classical Correlations in Multipartite Systems"*, phys. Rev. Lett.107, 2011, pp. 190501.

[6] I. Chakrabarty,P. Agrawal,A. K. Pati., *"Quantum dissension: Generalizing quantum discord for three-qubit states"*, Eur.Phys.J.D 65, 2011, pp. 605-612.

[7] M. L. Hu, H. Fan., *"Dynamics of entropic measurement-induced nonlocality in structured*

reservoirs", Ann. phys.(NY)327, 2012, pp. 2343-2353.

[8] B. Dakic, V. Vedral, C. Brukner., *"Necessary and Sufficient Condition for Nonzero Quantum Discord",* Phys.Rev.Lett. 105, ,2010, pp. 190502.

[9] K. Modi, T. Paterek, W. Son,V.Vedral, M. Williamson., *"Unified View of Quantum and Classical Correlations",* Phys.Rev.Lett.104, 2010, pp. 080501.

[10] S. Luo, S. Fu., *"Unified View of Quantum and Classical Correlations"*, phys.Rev.Lett. 106, 2011, pp. 120401.

[11] S. Luo, S. Fu., *"Geometric measure of quantum discord"*, Phys. Rev. A 82, 2010. pp. 034302.

[12] A. S. M. Hassan, B. Lari, P. S. Joag., *"Tight lower bound to the geometric measure of quantum discord"*, Phys. Rev. A 85, 2012, pp. 024302.

[13] S. Rana, P. Parashar., *"Tight lower bound on geometric discord of bipartite states",* Phys. Rev. A 85, 2012, pp. 024102.

[14] G. Rigolin., *"Thermal entanglement in the two-qubit Heisenberg XYZ model",* Int. J. Quantum Inform., 2, 2004, pp. 393-406.

Comparison of the effect of magnetic field in both x and z direction on geometrical quantum discord in Heisenberg XXZ model

Safa Jami, Zohreh Haqpanah

Abstract

In this article, we have considered a system consisting of two particles with spin 1/2 in the Heisenberg XXZ model. For this system, we obtained the geometric quantum discord, which is one of the quantum correlations that has been given a lot of attention in the matter of quantum information, and then investigated the effect of temperature and the change on the inhomogeneity coefficient on it. After that, we have applied the external magnetic field on the system in two different direction X and Z and investigate the changes of the geometric quantum discord in the presence of the field and we have compared the changes in the two different cases. The results show that, in general, the application of the magnetic field reduces the discord. When the field is in Z direction, the discord decreases rapidly and tends to zero, but in the case of the field in X direction, increasing the field does not make the discord zero at low temperatures, and the it becomes zero only at higher temperatures.

Keywords: Geometric Quantum Discord, XXZ Heisenberg Model, Magnetic Field