ترمودینامیک نوسانگر هماهنگ با در نظر گرفتن طول کمینه در آنسامبل میکروکانونیک

مریم سادات میرترابی[۱]، صدیقه میرابوطالبی[۲]

تاریخ ارسال: ۱۳۹۹/۷/۱ پذیرش:۱۴۰۰/۲/۱۵

چکیده: در چارچوب اثرات کوانتوم گرانشی به دلیل پیش بینی وجود یک طول کمینه، رابطه‌ی عدم قطعیت هایزنبرگ باید از طریق رابطه‌ی عدم قطعیت تعمیم یافته اصلاح شود. نگرش‌های گوناگونی در کوانتوم گرانشی نظیر تئوری ریسمان و نسبیت خاص دوگانه، بر وجود یک طول کمینه در مقیاس پلانک تاکید می‌کنند. تصحیح رابطه‌ی عدم قطعیت هایزنبرگ به واسطه‌ی اثرات کوانتوم گرانشی منجر به اصلاحات ترمودینامیکی سیستم فیزیکی می‌گردد. به منظور مطالعه‌ی مکانیک آماری سیستم‌های فیزیکی، انتخاب آنسامبل مناسب به شرایط فیزیکی سیستم بستگی دارد. اگر چنانچه تعداد ذرات ناوردا و بدون تغییر باشد دو آنسامبل کاندید می‌شوند، میکروکانونیک و کانونیک. در آنسامبل میکروکانونیک، ابتدا می‌بایست کمیت $\Omega(E,V,N)$ محاسبه شود، به طوری که Ω تعداد میکروحالت‌های مربوط به یک ماکروحالت معلوم است. ماکروحالت مورد نظر با سه کمیت انرژی، تعداد ذرات و حجم سیستم فیزیکی معرفی می‌گردد. بنابراین مشخصه‌های ترمودینامیکی سیستم از طریق رابطه‌ی آنتروپی محاسبه می‌شود.

واژه های کلیدی: اصل عدم قطعیت تعمیم یافته، آنسامبل میکروکانونیک، چگالی حالت‌ها، طول کمینه

۱. مقدمه

در اغلب مراجع مکانیک آماری نشان داده شده که در آنسامبل میکروکانونیک و آنسامبل کانونیک ویژگی های تعادلی سیستم‌های بس ذره‌ای به نتایج یکسانی منجر می‌گردند. مسئله‌ی بررسی این موضوع که نتایج ترمودینامیکی حاصل از آنسامبل میکروکانونیک و آنسامبل کانونیک به چه ترتیب رفتار می‌کنند، ابتدا توسط بولتزمن مطرح شد [۱] .همچنین گیبس در مقاله‌ای[۲]، ادعا کرد در حد ترمودینامیکی، نتایج آنسامبل کانونیک می‌بایست در تطابق با نتایج آنسامبل میکروکانونیک باشند. از دهه‌ی ۱۹۶۰ میلادی، محققان بیشماری از جمله لیندل-بل[۱] و وود[۲] مثال‌هایی را مربوط به مدل‌های مکانیک آماری تعادلی یافته‌اند، که تطابقی میان نتایج آنسامبل کانونیک و آنسامبل میکروکانونیک آن‌ها وجود ندارد[۳]. اخیرا به منظور فهم بیشتر این پدیده‌ی فیزیکی، نظریه‌ی کاملی مربوط به عدم تطابق میان نتایج آنسامبل‌ها توسط الیس[۳] و همکارانش بیان شده‌است [۴]. این چنین تصور می‌شود که حضور برهم کنش‌های بلند برد شرط لازم اما نه کافی برای یافتن عدم تطابق میان نتایج آنسامبل‌های

۱- دانش اموخته دکتری فیزیک دانشگاه آزاد تهران شمال
۲- دانشیار دانشگاه آزاد تهران شمال

[1] Lynden-Bell
[2] Wood
[3] Eliss

میکروکانونیک و کانونیک است [۵]. برهم کنش‌های گرانشی مثالی مهم از برهم کنش‌های دور برد است که منجر به عدم تطابق میان نتایج دو آنسامبل می‌گردد، این موضوع در مراجع [۳] و [۶] به خوبی شرح داده شده‌است. مثال‌های دیگر شامل سیستم‌های دوقطبی و مدل‌های آماری اغتشاشی دوبعدی هستند [۷]. تطابق میان نتایج آنسامبل کانونیک و آنسامبل میکروکانونیک مربوط به برهم کنش‌هایی است که اصطلاحا به آن‌ها برهم کنش‌های کوتاه برد گفته می‌شود [۸].

در مورد ایده‌ی وجود طول کمینه، این نظریه ابتدا توسط روبرت لوی[۴] مطرح شده‌است[۹]. پیشرفت در زمینه‌ی کوانتوم گرانشی و نظریه‌ی میدان‌های کوانتومی در فضای خمیده، نظیر تئوری ریسمان، فیزیک سیاه چاله‌ها و برخی آزمایشات فکری، وجود یک طول کمینه‌ی قابل اندازه‌گیری را پیش‌بینی می‌کنند. هرچند همچنان یک توافق کامل بر روی مقدار این طول کمینه وجود ندارد، اما بر مبنای ملاحظات ابعادی، این طول کمینه‌ی فیزیکی باید از مرتبه‌ی طول پلانک باشد[۱۰].

به منظور نشان دادن اثرات وجود طول کمینه، اصل عدم قطعیت و رابطه‌ی جابه‌جاگری هایزنبرگ که اصول مکانیک کوانتومی بر آن استوار است، باید اصلاح گردند. این نظریه به ایجاد دسته‌ای از روابط عدم قطعیت تعمیم یافته که اصطلاحا به آن‌ها GUP گفته می‌شود، می‌انجامد. در میان روابط عدم قطعیت تعمیم یافته‌ای که وجود دارند، در این مقاله به مطالعه‌ی رابطه‌ی عدم قطعیت تعمیم یافته‌ی مربعی یا GUP1 می‌پردازیم، که منجر به ایجاد رابطه‌ی جابه‌جایی تعمیم یافته به شرح رابطه‌ی زیر می‌شود[۱۰]-[۱۱].

$$[x_i, p_j] = i\hbar\left[\delta_{ij} + \gamma\left(p^2\,\delta_{ij} + 2p_ip_j\right)\right] \qquad (۱)$$

در این رابطه γ، پارامتری است که به فرم $\gamma = \gamma_0/\left(M_pc\right)^2 = \gamma_0 l^2{}_p/\hbar^2$ تعریف می‌شود؛ γ_0، یک کمیت بدون بعد است. رابطه‌ی (۱)، به واسطه‌ی جملات مثبت مربعی ممنتوم اضافه شده به آن، از رابطه‌ی جابه‌جایی معمول هایزنبرگ متفاوت است. این رابطه، در بررسی تئوری ریسمان و فیزیک سیاه چاله‌ها، به جای عدم قطعیت هایزنبرگ کاربرد دارد. رابطه‌ی عدم قطعیت مربوط به جابه‌جایی (۱)، عبارت است از:

$$\Delta x_i\,\Delta p_j \geq \frac{\hbar}{2}\left\{1 + \gamma\left[(\Delta p)^2 + \langle p\rangle^2\right] + 2\gamma\left[\left(\Delta p_i\right)^2 + \langle p_i\rangle^2\right]\right\} \qquad (۲)$$

به طوری که $p^2 = p_ip_i$ است. این رابطه‌ی عدم قطعیت تعمیم یافته، منجر به یک عدم قطعیت کمینه در اندازه‌گیری طول به اندازه‌ی $\Delta x_i \sim l_p\sqrt{\gamma_0}$ می‌شود. با فرض $\gamma_0 \approx 1$ ، این طول کمینه از مرتبه‌ی طول پلانک خواهد بود. رابطه‌ی جابه‌جایی تعمیم یافته‌ی (۱)، منجر به تغییر مولفه‌های موقعیت و ممنتوم می‌شود.

$$x_i = x_i \;, \pi_i = p_i(1 + \gamma p^2) \qquad (۳)$$

بنابراین ممنتوم کانونی p_i ، به یک ممنتوم تعمیم یافته به فرم π_i ، تغییر می‌کند. لازم به ذکر است که نمایش‌های متفاوتی از ممنتوم تعمیم یافته وجود دارد که می‌توان آن‌ها را در مراجع جستجو نمود [۱۲]، علاوه برآن در سازوکار هندسه‌ی ناجابه‌جایی، برخلاف رابطه‌ی (۳)، مولفه‌ی موقعیت تغییر می‌یابد و ممنتوم بدون تغییر خواهد ماند [۱۳]-[۱۴].

اثرات کوانتوم گرانشی، منجر به تغییر تعداد میکروحالت‌های ممکن در آنسامبل میکروکانونیک می‌شود. برمبنای نظریات مبتنی بر کوانتوم گرانشی، همان طور که ذکر کردیم یک طول کمینه وجود دارد، که به عنوان یک پیش فرض، به تغییر المان‌های ممنتوم سازنده‌ی فضای فاز یک آنسامبل آماری می‌انجامد. این ممنتوم تعمیم یافته، المان حجم معمول در فضای فاز را تغییر می‌دهد و بر چگالی میکروحالت های موجود در آنسامبل مورد نظر اثر می‌گذارد، در پی آن ویژگی‌های ماکروسکوپی آنسامبل نیز اصلاح می‌یابند. به گونه‌ای که این اصلاحات به طور خاص در سیستم‌ها با انرژی‌های بالا مشاهده می‌شوند. اصلاحات بیان شده روی چگالی حالت‌ها برای آنسامبل میکروکانونیک نوسانگر هماهنگ را بدست می‌آوریم. تغییرات ایجاد شده در حجم اشغال شده

---

[4] Robert Levi

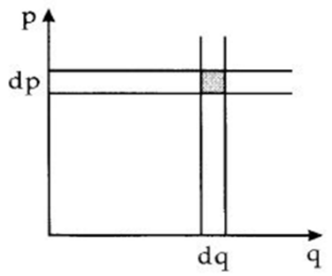
در فضای ممنتوم به طور تقریبی محاسبه شده‌اند، نتایج ترمودینامیکی برآمده از این تغییرات، مورد مطالعه قرار می‌گیرند. نتایج ترمودینامیکی بدست آمده در آنسامبل میکروکانونیک، با نتایج ترمودینامیکی مربوط به آنسامبل کانونیک نوسانگر هماهنگ مقایسه می‌شوند. مطالعات بسیاری مثال‌هایی را معرفی کرده‌اند، مربوط به مدل‌هایی در مکانیک آماری تعادلی که در آن‌ها نتایج آنسامبل میکروکانونیک و آنسامبل کانونیک با هم، هم خوانی ندارند [۳]. در چارچوب عدم قطعیت تعمیم یافته، قصد داریم ویژگی‌های ترمودینامیکی نوسانگرهماهنگ را در دو آنسامبل میکروکانونیک و کانونیک به منظور بررسی تطابق یا عدم تطابق میان نتایج ترمودینامیکی آن‌ها مورد مقایسه قرار دهیم. در یک آنسامبل میکروکانونیک، به دلیل رابطه‌ی عدم قطعیت تعمیم یافته المان فضای فاز را به فرم جدیدی محاسبه می‌کنیم تا بتوانیم تعداد میکروحالت ها، $\Omega(E,V,N)$ را درماکروحالت معلوم (E,V,N) بدست آوریم. در یک آنسامبل کانونیک ماکروحالت سیستم با پارامترهای N تعداد ذرات، V حجم سیستم و T دمای سیستم فیزیکی معلوم می‌گردد. به منظور بررسی مشخصه‌های ترمودینامیکی یک آنسامبل کانونیک ابتدا تابع پارش سیستم، $Q(N,V,T)$ ، محاسبه می‌شود. در این مقاله قصد داریم به بررسی تطابق یا عدم تطابق میان نتایج این دو آنسامبل با در نظر گرفتن رابطه‌ی عدم قطعیت تعمیم یافته بپردازیم.

۲. ارتباط میان ترمودینامیک و آمار میکروسکوپی

بسیاری از کمیت‌ها مانند دما و آنتروپی، همچنین معادله‌ی حالت گاز کامل یا گاز واندروالس با استفاده از ملاحظات میکروسکوپی به خوبی قابل درک هستند. کمیت‌های ماکروسکوپی معادله‌ی حالت، نتیجه‌ی محاسبه‌ی مقدار میانگین کمیت‌های میکروسکوپی است. به طور مثال، فشار یک گاز به واسطه‌ی برخوردهای مولکول‌ها با دیواره‌ی ظرف ایجاد می‌گردد، همچنین دما از میانگین انرژی جنبشی ذرات بدست می‌آید. از طریق مکانیک آماری می‌توانیم بر مبنای کمیت‌های میکروسکوپی نظیر ممنتوم و مختصات ذرات به محاسبه‌ی مقدار میانگین کمیت‌های فیزیکی بپردازیم. بنابراین باید ارتباطی میان دنیای میکروسکوپی ذرات و ترمودینامیک آن‌ها در دنیای ماکروسکوپیک برقرار نمائیم، کلید برقرار این ارتباط آنتروپی است[۱۵]. آنتروپی، S، از طریق ارتباط با تعداد میکرو حالت‌ها، Ω ، در یک حالت ماکروسکوپی معلوم که با مشخصه‌های (U,V,N) معرفی می‌گردد به فرم $S = kln\Omega$ تعریف می‌شود. این رابطه، ارتباطی بنیادی میان مشخصه‌های ترمودینامیکی نظیر آنتروپی و آمار میکروسکوپی ذرات یعنی تعداد میکروحالت‌ها را فراهم می‌آورد.

۳. فضای فاز

در یک سیستم کلاسیکی، چنانچه در زمان t، مختصه‌ی موقعیت ذرات $q_{\nu(t)}$ و مختصه‌ی ممنتوم ذرات $p_{\nu(t)}$ ، را بدانیم معادله‌ی حالت سیستم فیزیکی مفروض به سادگی بدست می‌آید. بنابراین در یک سیستم مکانیکی مجموعه‌ی(q_ν , p_ν) را به عنوان میکروحالت سیستم فیزیکی می‌توان تفسیر نمود. به طوری که مختصه‌ی موقعیت و ممنتوم را از ۱ تا N۳، شماره‌گذاری می‌نمائیم. مجموعه‌ی (q_ν , p_ν) به عنوان نقطه‌ای در یک فضای N ۶ بعدی است که به آن فضای فاز کلاسیکی گفته می‌شود.

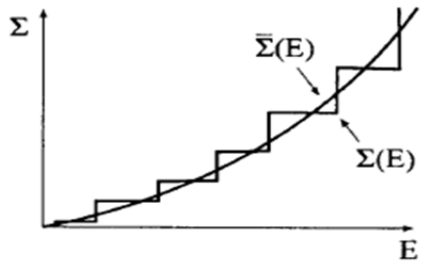


شکل ۱. فضای فاز دو بعدی

مشابه فضای سه بعدی، یک فضای N ۶ بعدی را می‌توان به المان‌های حجم $d^{3N}q\, d^{3N}p$ تقسیم نمود. برای یک فضای فاز دو بعدی (یک بعد موقعیت و یک بعد ممنتوم)، المان فضای فاز در شکل (۱) رسم شده است. المان فضای فاز $d^{3N}q\, d^{3N}p$ که حجم محدودی دارد به عنوان سلول

فضای فاز نامیده می‌شود. در کوانتوم مکانیک، به دلیل رابطه‌ی عدم قطعیت، هر میکروحالت حداقل حجم $\Delta p \Delta q \geq \hbar$ را اشغال می‌کند. در هنگام شمارش میکروحالت‌ها $\Omega(E,V,N)$، مربوط به ماکروحالت (E,V,N) ، باید درنظر بگیریم در واقعیت ذرات قابل شمارش نیستند (تمییزناپذیرند)، نمی‌توانیم بر روی هر اتم یا مولکول شماره یا علامت قرار دهیم و فرض کنیم تمییز پذیرند. اتم‌ها را نمی‌توان از یکدیگر متمایز نمود، ذرات کلاسیکی تمییزپذیرند و می‌توان آن‌ها را شماره‌گذاری کرد. اما این مسئله در مورد اتم‌ها صدق نمی‌کند و نمی‌توان بر اتم‌ها شماره قرارداد، به عبارت دیگر چنانچه با N ذره سروکار داشته باشیم، در حقیقت $N!$ راه وجود دارد که می‌توان آن‌ها را شمرد. بنابراین به منظور جلوگیری از شمارش تکراری میکروحالت‌ها لازم است تعداد میکروحالت‌ها بر این ضریب تقسیم گردد، ضریب $1/N!$، ضریب تصحیح گیبس نام دارد[۱۶]. اگر چنانچه تعداد میکروحالت‌ها برحسب انرژی تغییر کند خصوصیات ترمودینامیکی سیستم که با استفاده از مشتقات رابطه‌ی $S = k ln\Omega$ ، بدست می‌آیند، به عنوان پیامدی از تغییرات تعداد میکروحالت‌ها نسبت به انرژی تغییر می‌کنند، این امر با آنچه که از نتایج آزمایشات فیزیکی بدست می‌آید متفاوت است. بی‌نظمی‌ها در مورد تعداد میکروحالت‌ها، این واقعیت را بیان می‌دارد که یک سیستم فیزیکی را نمی‌توان با انرژی‌های دلخواه در نظر گرفت، یک سیستم فیزیکی انرژی‌های کوانتیده‌ی معینی را جذب و یا بازتاب می‌کند. ثابت فرض کردن انرژی کل سیستم بسته، حداقل برای سیستم‌های ماکروسکوپی یک ایده‌آل گرایی نشدنی است. در حقیقت همواره مبادله‌ی انرژی میان محیط وجود دارد، بنابراین بهتر است تعداد متوسط میکروحالت‌ها را در بازه‌ی انرژی ΔE، مورد بررسی قرار دهیم. به منظور محاسبه‌ی تعداد متوسط میکروحالت‌ها ابتدا کل میکروحالت‌ها را محاسبه می‌نمائیم[۱۵].

$$\sum(E,V,N) = \sum_{\acute{E} \leq E} \Omega(\acute{E},V,N) \qquad (۴)$$



شکل(۲): تعداد میکروحالت‌ها

سیگما یک تابع پله است، که در ترازهای انرژی معینی تعداد معینی از میکروحالت‌ها به آن اضافه می‌شوند. بهتر است به جای تابع سیگما، از تابع میانگین آن استفاده کنیم. مشتق میانگین تابع سیگما نسبت به انرژی، چگالی متوسط حالت‌ها را نتیجه می‌دهد، به بیان دیگر متوسط میکروحالت‌ها در بازه‌ی انرژی بدست می‌آید.

$$g(E,V,N) = \frac{\partial}{\partial E} \bar{\Sigma}(E,V,N) \qquad (۵)$$

و به دنبال آن تعداد میکروحالت‌ها قابل محاسبه است.

$$\Omega(E) = g(E)\Delta E \qquad (۶)$$

در این مقاله در چارچوب عدم قطعیت تعمیم یافته‌ی مربعی، براساس آنسامبل میکروکانونیک به مطالعه‌ی ترمودینامیک اصلاح شده‌ی نوسانگر هماهنگ ایده‌آل می‌پردازیم.

۳. نوسانگر هماهنگ

به مطالعه‌ی ترمودینامیک نوسانگر هماهنگ در یک آنسامبل میکروکانونیک با در نظر گرفتن اثرات عدم قطعیت تعمیم یافته می‌پردازیم. با توجه به کوچک بودن اثرات جملات مراتب بالاتر، در این قسمت این اصلاحات را تنها تا مرتبه‌ی اول بدست می‌آوریم. تعداد میکروحالت‌ها از رابطه‌ی زیر نتیجه می‌شود.

$$\sum(E,V,N) = \frac{1}{h^N} \iint_{H \leq E} d^N q \, d^N p \qquad (۷)$$

فرض می‌کنیم این آنسامبل از N نوسانگر هماهنگ یک بعدی با فرکانس ω تشکیل شده‌است، همچنین نوسانگرها تمییزپذیرند به این ترتیب ضریب تصحیح گیبس، $1/N!$ را اضافه نمی‌نمائیم. هامیلتونی این سیستم عبارت است از:

$$H = \sum_{\nu=1}^{N}\left(\frac{\pi_\nu^2}{2m} + \frac{m\omega^2\, q_\nu^2}{2}\right) \qquad (۸)$$

به‌طوری که در این رابطه π_ν، با توجه به رابطه‌ی (۳) ممنتوم تعمیم یافته مربوط به ذره‌ی ν است. با جاگذاری $x_\nu = m\omega q_\nu$، رابطه‌ی (۷) به رابطه‌ی زیر تبدیل می‌شود.

$$\sum(E,V,N) = \left(\frac{1}{m\omega h}\right)^N \int_{\sum_{\nu=1}^{N}(\pi_\nu^2 + x_\nu^2)\le 2mE} d^N x\, d^N p \qquad (۹)$$

بدون در نظر گرفتن اثرات عدم قطعیت تعمیم یافته‌ی مربعی، این رابطه دقیقا بیانگر حجم یک فضای 2N بعدی با شعاع $R = \sqrt{2mE}$ است. اکنون با اعمال اثرات عدم قطعیت تعمیم یافته حجم این ابر فضای 2N بعدی، برحسب ممنتوم تعمیم یافته π_ν، به جای ممنتوم کانونی به سادگی قابل محاسبه است. بنابراین ابتدا باید براساس رابطه‌ی (۳) به محاسبه‌ی المان ممنتوم کانونی برحسب ممنتوم تعمیم یافته بپردازیم.

$$dp_\nu = \frac{d\pi_\nu}{(1 + 3\gamma p_\nu^2)} \qquad (۱۰)$$

تا مرتبه‌ی اول پارامتر عدم قطعیت تعمیم یافته بدست می‌آوریم $p_\nu^2 \approx \pi_\nu^2$، بنابراین:

$$dp_\nu = \frac{d\pi_\nu}{(1 + 3\gamma \pi_\nu^2)} \qquad (۱۱)$$

و به دنبال آن المان حجم در فضای ممنتوم حاصل می‌شود. در نتیجه تعداد میکروحالت‌ها از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید.

$$\sum = \left(\frac{1}{m\omega h}\right)^N \int_{\sum_{\nu=1}^{N}(\pi_\nu^2 + x_\nu^2)\le 2mE} \frac{d^N x\, d^N \pi}{(1 + 3\gamma \sum_{\nu=1}^{N} \pi_\nu^2)} \qquad (۱۲)$$

چنانچه بازه‌ی انتگرال‌گیری نسبت به تغییر x و π متقارن باشد، بنابراین با تغییر x و π حاصل انتگرال عوض نمی‌شود.

$$\frac{1}{(1 + 3\gamma \sum_{\nu=1}^{N} \pi_\nu^2)} = \frac{1}{(1 + 3\gamma \sum_{\nu=1}^{N} x_\nu^2)} \qquad (۱۳)$$

با جاگذاری این رابطه در رابطه‌ی (۱۲)، تعداد میکروحالت‌ها بدست می‌آید. انتگرال تعداد میکروحالت‌ها در فضای 2N بعدی متقارن و کروی است و می‌توان آن را برحسب شعاع r محاسبه نمود.

$$r = \sum_{\nu=1}^{N}(\pi_\nu^2 + x_\nu^2) \qquad (۱۴)$$

بنابراین المان حجم عبارت است از:

$$d^N x d^N \pi = \rho_{2N(r)} dr \qquad (۱۵)$$

به طوری که $\rho_{2N(r)}$ مساحت سطح ابر فضای 2N بعدی است.

$$\rho_{2N(r)} = \frac{2\pi^N}{\Gamma(N)} r^{2N-1} \qquad (۱۶)$$

بنابراین

$$\sum = \left(\frac{1}{m\omega h}\right)^N \frac{2\pi^N}{\Gamma(N)} \int_0^{R=\sqrt{2mE}} dr \frac{r^{2N-1}\left(1 + \frac{3}{2}\gamma r^2\right)}{(1 + 3\gamma r^2)} \qquad (۱۷)$$

چگالی حالت‌ها با استفاده از $g(E) = \frac{\partial \Sigma}{\partial E}$ مشخص می‌شود، و به دنبال آن تعداد میکروحالت‌ها محاسبه می‌گردد.

$$\Omega(E) = g(E)\Delta E = \Omega^0 \left(\frac{1 + 3\gamma m E}{1 + 6\gamma m E}\right) \qquad (۱۸)$$

به طوری که Ω^0، تعداد میکروحالت‌ها بدون در نظر گرفتن اثرات عدم قطعیت تعمیم یافته‌است.

$$\Omega^0 = \left(\frac{1}{\hbar\omega}\right)^N \frac{E^N}{\Gamma(N)} \frac{\Delta E}{E} \tag{۱۹}$$

آنتروپی سیستم عبارت است از:

$$S = Nk\left[1 + ln\left(\frac{E}{N\hbar\omega}\right)\right] + kln\left(\frac{1+3\gamma mE}{1+6\gamma mE}\right) \tag{۲۰}$$

جمله‌ی اول، آنتروپی نوسانگر هماهنگ بدون درنظر گرفتن اثرات کوانتوم گرانشی و جمله‌ی دوم اصلاحات ایجاد شده‌است. لازم به ذکراست که به محاسبه‌ی این اصلاحات تا مرتبه‌ی اول پارامتر عدم قطعیت تعمیم یافته پرداخته‌ایم، بنابراین تعداد نوسانگرها به طور مستقل در جملات اصلاحی نمایانگر نشده‌است. چنانچه مراتب بالاتر تصحیحات را در نظر بگیریم، تعداد نوسانگرها در جملات E/N ظاهر می‌شوند. می‌توانیم انرژی نوسانگر هماهنگ را با در نظر گرفتن اثرات عدم قطعیت تعمیم یافته تا مرتبه‌ی اول محاسبه نمائیم.

$$E \cong NkT(1 - 3\gamma mkT) \tag{۲۱}$$

همان طور که ملاحظه می‌شود، انرژی نوسانگر هماهنگ در آنسامبل میکروکانونیک دقیقا با نتایج بدست آمده در آنسامبل کانونیک آن[۱۷]، تطابق دارد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت در چارچوب عدم قطعیت تعمیم یافته، اصلاحات ایجاد شده برای نوسانگر هماهنگ در آنسامبل کانونیک و آنسامبل میکروکانونیک، باهم هم‌خوانی دارند. علاوه برآن به منظور بررسی بیشتر تطابق یا عدم تطابق میان نتایج این دو آنسامبل، تابع پارش را می‌توانیم با استفاده از چگالی حالت‌ها، $g(E)$، رابطه‌ی (۱۸)، بدست آوریم.

$$\begin{aligned} Q_N &= \int_0^\infty dE\, g(E) e^{-\beta E} = \\ &\left(\frac{1}{\hbar\omega}\right)^N \frac{1}{\Gamma(N)} \int_0^\infty dE\, E^{N-1} \left(\frac{1+3\gamma mE}{1+6\gamma mE}\right) e^{-\beta E} \\ &\approx \left(\frac{1}{\beta\hbar\omega}\right)^N \left[1 - \frac{3}{\beta}\gamma mN + O(\gamma^2)\right] \end{aligned} \tag{۲۲}$$

جمله اول تابع پارش متداول نوسانگر هماهنگ است و جمله‌ی دوم مربوط به درنظر گرفتن رابطه‌ی عدم قطعیت تعمیم یافته است. این تابع پارش دقیقا با تابع پارش بدست آمده در آنسامبل کانونیک نوسانگر هماهنگ یکسان است[۱۷] .

۴. نتیجه‌گیری

در چارچوب آنسامبل میکروکانونیک، اصلاحات ترمودینامیکی نوسانگر هماهنگ را با در نظر گرفتن اثرات عدم قطعیت تعمیم یافته‌ی مربعی مطالعه نموده‌ایم. لازم به ذکر است اصلاحات ترمودینامیکی با در نظر گرفتن اثرات کوانتوم گرانشی در چارچوب آنسامبل کانونیک در مقالات[۱۷] ،[۱۸] و[۱۹] محاسبه شده‌است. در چارچوب آنسامبل میکروکانونیک، به دلیل رابطه‌ی عدم قطعیت تعمیم یافته فرم جدیدی از المان فضای فاز را محاسبه نموده‌ایم. ابتدا به بررسی چگالی حالت‌ها با در نظر گرفتن اثرات کوانتوم گرانشی پرداخته‌ایم و به دنبال آن آنتروپی اصلاح شده را بدست آورده‌ایم، سایر ویژگی‌های ترمودینامیکی به سادگی قابل محاسبه هستند. یکی از مواردی که برای ما بسیار با اهمیت بود، بررسی تطابق یا عدم تطابق میان نتایج آنسامبل میکروکانونیک و آنسامبل کانونیک با در نظر گرفتن اثرات عدم قطعیت تعمیم یافته بود. این مسئله با بررسی انرژی حاصل شده در هر دوآنسامبل و مقایسه‌ی نتایج آنها به علاوه محاسبه‌ی تابع پارش براساس چگالی حالت‌های بدست آمده در آنسامبل میکروکانونیک و مقایسه‌ی آن با تابع پارش در آنسامبل کانونیک محقق گردید.

مراجع

[1] F. Reif, Fundamentals of Statistical and Thermal Physics, McGraw-Hill, New York, (1965).
[2] J.W. Gibbs, Elementary Principles in Statistical Mechanics with Especial Reference to the Rational Foundation of Thermodynamics, Yale University Press, Yale, C.T., 1902, reprinted byDover, New York, (1960).
[3] D. Lynden-Bell, R. Wood, The gravo-thermal catastrophe in isothermal spheres and the onset

[12] P. Pedram, New approach to nonperturbative quantum mechanics with minimal length uncertainty, Phys. Rev. D 85(2) (2012) 024016.
[13] L. N. Chang, D. Minic, N. Okamura and T. Takeuchi, Effect of the minimal length uncertainty relation on the density of states and the cosmological constant problem, Phys. Rev. D 6512(2002)125028.
[14] S. Jalalzadeh, M. A. Gorji and K. Nozari, Deviation from the standard uncertainty principle and the dark energy problem, G. R. G. 461(2014) 1632.
[15] W. Greiner, L. Neise and H. Stöcker, Thermodynamics and Statistical Mechanics, springer (1995).
[16] R.K. Pathria, P. D. Beale, Statistical mechanics, 3nd ed, Butterworth-Heinemann, Elsevier (2011).
[17] L. F. Matin, S. Miraboutalebi, Statistical aspects of harmonic oscillator under minimal length supposition, Physica A, 425 (2015)10-17.
[18] S. Miraboutalebi and L. F. Matin, Thermodynamics of canonical ensemble of an ideal gas, Can.
[19] M.Mirtorabi, S.Miraboutalebi,A.A. Masoudi, L. F. Matin, Quantum gravity modifications of the relativistic ideal gas, , Physica A, 506 (2018)602-612.
of red-giant structure for stellar systems, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc. 138 (1968), 495-497.
[4] R.S. Ellis, K. Haven, B. Turkington, Large deviation principles and complete equivalence and nonequivalence results for pure and mixed ensembles, J. Stat. Phys. 101 (2000) 9991064.
[5] Touchette, H. Ensemble equivalence for general many-body systems. Europhys. Lett. 96, (2011), 50010.
[6] Lynden-Bell, D. Negative specific heat in astronomy, physics and chemistry. Physica A 263, (1999), 293304.
[7] Campa, A., Dauxois, T., Ruffo, S. Statistical mechanics and dynamics of solvable models with long-range interactions. Phys. Rep. 480, (2009), 57159.
[8] Ruelle, D. Statistical Mechanics: Rigorous Results. W. A. Benjamin, Amsterdam (1969).
[9] R,Levi, Theorie de laction universelle et discontinue, J.Phys. Radium, 8 (1927) 182-198.
[10] D. Amati, M. Ciafaloni and G. Veneziano, Can spacetime be probed below the string size, Phys. Lett. B 216 (1989)41-47.
[11] A. Kempf, G. Mangano and R. B. Mann, Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation, Phys. Rev. D 52 (1995) 1108-1118.