

حل عددی شارشهای تراکم پذیر با روش حجم محدود بهبود یافته

بهروز میرزایی

استادیار گروه مکانیک دانشگاه محقق اردبیلی

سید اسماعیل رضوی

استاد یار گروه مکانیک دانشگاه تبریز

چکیده

بررسی و شناخت طرح جدیدی برای حل معادلات اویلر دو بعدی نشان داده می شود. حجم محدود جیمسون و همکاران با روش اصلاح شار بر پایه فیزیکی ارتقا می یابد. معادلات حاکم با روش حجم محدود صریح گسسته می شوند و سپس با استفاده از زمانروی تا رسیدن به یک حالت پایا حل می شوند. مدلی مناسب از اتلاف عددی به کار گرفته می شود. مزیت این روش سریع بودن همگرایی و افزایش محدوده پایداری است. برای ارزیابی قابلیت طرح، تستهای متعددی با ایرفویل NACA و یک شبکه 5 در رژیمهای ترا صوتی به عمل می آید. جوابهای حاصل از حل روش حاضر با کار جیمسون مقایسه شده اند و تطابق خوبی موجود است.

واژه های کلیدی: معادلات اویلر، شبکه جبری، روش حجم محدود صریح، روش مشخصه ها، اتلاف عددی

۱- مقدمه

در سالهای اخیر پیشرفتهای قابل توجهی در الگوریتمهای حل معادلات اویلر به روش حجم محدود به چشم میخورد [۳، ۱، ۲ و ۴]. حل معادلات اویلر در پیشگویی شارشهای ترا صوتی با امواج ضربه ای بسیار مفید هستند [۱ و ۷ و ۸]. از حل عددی معادلات اویلر می توان پیشگویی دقیقی از موقعیت و قدرت یک موج ضربه نمود. روش حجم محدود جیمسون و همکاران ابزار مفیدی برای کاربردهای آیرودینامیک و حتی حل معادلات ناویه - استوکس می باشد [۲ و ۴ و ۶ و ۸] بر طبق طرحهای مختلفی که برای محاسبه شار در روشهای حجم محدود پیشنهاد شده است [۴ و ۸]، روش میانگین گیری جیمسون به دلیل سادگی آن هنوز هم استفاده می شود، هر چند اشکالاتی نظیر میل به انفصال نقاط فرد و زوج در آن وجود دارد [۲ و ۵ و ۸] در کار حاضر برای غلبه بر مشکلات مطرح شده، رفتار فیزیکی شار مورد توجه قرار گرفته و سپس حل عددی اعمال میشود.

همچنین شرایط مرزهای جامد و دور بهینه خواهند شد از اتلاف عددی نیز استفاده میشود. طرح پیشنهاد شده در شارشهای ترا صوتی به خوبی کارآمد است.

۲- فرمولبندی حجم محدود

معادلات دوبعدی اویلر را در فرمولبندی حجم محدود و بدون حضور نیروی جسمى میتوان به شکل زیر نشان داد [۱ و ۳]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} w dx dy + \int_{\partial \Omega} (F dy - G dx) = 0 \quad (2)$$

$$w = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uH \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ \rho vH \end{bmatrix}$$

که Ω سطح ثابتی با مرزهای $\partial \Omega$ ، x و y و نیز مختصات دکارتی هستند.

در اینجا متغیرهای قابل محاسبه فشار، جرم مخصوص، مؤلفه های افقی وعمودی سرعت، انرژی کل و آنتالپی کل به ترتیب با p ، ρ ، u ، v ، E و H نشان داده شده اند. برای گاز کامل ارتباط زیر برقرار است:

(۳)

$$E = \frac{p}{(\gamma-1)\rho} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2), H = E + \frac{p}{\rho}$$

γ نسبت به گرمای ویژه است. لازم است که متغیرهای ρE ، ρv ، ρu ، ρ محاسبه شوند.

معادلات حاکم نسبت به زمان هذلولوی است و برای حل نیاز به مشخصات مرزی و شرایط اولیه دارد. میدان شارش با

استفاده از سلولهای چهارضلعی، روی یک شبکه با سازمان گسسته سازی می شود. برای هر سلول معادله (۱) می تواند به شکل زیر در آید:

(۴)

$$\frac{\partial}{\partial t} (A_{ij} \tilde{w}_{ij}) + \sum_{k=1}^4 (F_k \Delta y_k - G_k \Delta x_k) = 0$$

در اینجا A_{ij} مساحت سلول است. Δy_k ، Δx_k نمو x و y در وجه k سلول است. شار سرعت در وجه k سلول، می تواند به شکل زیر تعریف شود:

(۵)

$$f_k = \Delta y_k u_k - \Delta x_k v_k$$

نمونه ای از سلول چهار ضلعی در شکل ۱ نشان داده میشود. معادله (۴) روی هر سلول گسسته می شود که در نتیجه منجر به سیستم معادلات دیفرانسیل معمولی وابسته می شود:

(۶)

$$\frac{d}{dt} (A_{ij} \tilde{w}_{ij}) + Q(w_{ij}) = 0$$

Q تقریب گسسته شده انتگرال شار در معادله (۱) می باشد. برای سادگی از این پس علامت \sim را می اندازیم.

۲-۱ محاسبه شار

یک اشکال عمده در روش میانگین گیری شارهای جیمسون میل به انفصال نقاط فرد و زوج میباشد [۱ و ۳ و ۵]. برای کاهش این رنج با توجه به رفتار شارش سیال، به حل شارها با مستندات فیزیکی توجه می کنیم. به جای در نظر گرفتن متوسط مقادیر متغیرها در همسایگی سلولها، تمایل به سوی فرازش - فروزش خود بخودی تعریف می شود که هم سازگار با جهت انتشار مشخصه ها است. به عنوان مثال برای وجه مشترک بین سلول های i, j و $i+1, j$ ضریب زیر تعریف می شود:

(۷)

$$\xi_1 \frac{P_{i,j}}{p_{i,j} + p_{i+1,j}}$$

بر طبق این ضریب، شارها از میان وجه ۱ میتواند به صورت زیر محاسبه شوند:

(۸)

$$F_1 = \xi_{i,j} F_{i,j} + (1 - \xi_{i,j}) F_{i+1,j}$$

$$G_1 = \xi_{i,j} G_{i,j} + (1 - \xi_{i,j}) G_{i+1,j}$$

براساس شرایط مرزی و رفتار شارش سیال، ξ_1 می تواند در نقش فرا وزاننده و یا فرو وزاننده عمل نماید. برای وجوه دیگر روش مشابه دنبال می شود. برای نمونه می توان نوشت:

(۹)

$$(pu)_1 = \xi_{i,j} (pu)_{i,j} + (1 - \xi_{i,j}) (pu)_{i+1,j}$$

تنها عامل نیرو برای شارش سیال از میان سلول ها اختلاف فشار است که ایده انتخاب ضریب ξ_1 از این واقعیت ناشی شده است.

در اینجا $D(w_{ij})$ می تواند تمامی نوسانات نامطلوب در نزدیکی موج ضربه را مستهلک کند. بر هم کنش موج ها باعث ایجاد موج های با بسامد بالا و بسامد پایین می شود. بسامد های پایین، همگرایی را به تعویق می اندازند، در حالی که بسامد های بالا هرگاه از ابعاد شبکه تجاوز نمایند، موجب بر هم زدن پایداری عددی خواهند شد. ایجاد عبارت اتلاف برای هر یک از متغیرهای شارش شبیه به هم می باشند، که آمیخته ای از اختلاف های مرتبه ی دوم و چهارم است (۱ و ۲):

(۱۱)

$$Dw = D_x w + D_y w$$

اینجا D_x و D_y به شکل زیر تعریف می شوند:

(۱۲)

$$D_x w = d_{i+1/2,j} - d_{i-1/2,j}$$

$$D_y w = d_{i+1/2,j} - d_{i-1/2,j}$$

عبارت های سمت راست معادله (۱۲) شبیه به هم

هستند، برای مثال:

(۱۳)

$$d_{i+1/2,j} = \frac{A_{i+1/2,j}}{\Delta t} [\mathcal{E}_{i+1/2,j}^{(2)} (w_{i+1,j} - w_{i,j}) - \mathcal{E}_{i+1,j}^{(4)} (w_{i+2,j} - 3w_{i+1,j} + 3w_{i,j} - w_{i-1,j})]$$

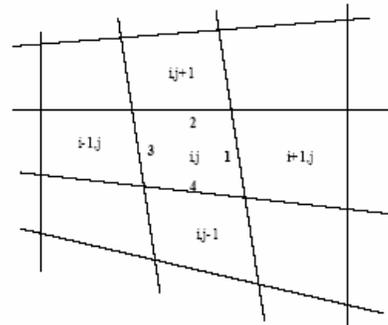
در اینجا A حجم سلول است. ضرایب $\mathcal{E}^{(2)}$ و $\mathcal{E}^{(4)}$ در یک مسیر خود تنظیم انتخاب می شوند. بر پایه ی سرعت های انتشار، حالت بهینه ای از حساسه فشار جیمسون تعریف می کنیم:

(۱۴)

$$V_{i,j} = \left(\frac{M}{M_\infty} \right)^m \frac{|p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}|}{|p_{i+1,j}| + 2|p_{i,j}| + |p_{i-1,j}|}$$

در شارش غیر لزج، تابع ماخ باعث کاهش مقدار اتلاف اضافه شده در نزدیکی نقطه سکون و افزایش آن در نزدیکی موجهای ضربه می شود. در شارش لزج، اثر مضاعفی مشاهده می شود، یعنی در درون لایه مرزی و در جایی که عدد ماخ مکانی کوچک است، اتلاف اضافی کاهش می یابد. ضرایب موزون به شکل زیر تعریف می شوند [۱ و ۲ و ۷]:

(۱۵)



شکل ۱- سلولهای چهار ضلعی در حجم محدود

۲-۲ اتلاف عددی

برای حالتی که شبکه بندی با سلولهای چهار ضلعی انتخاب می شود، طرحهای اویلر مبتنی بر ذخیره سازی اطلاعات در مرکز سلول، باعث انفصال میان سلولهای فرد و زوج می شوند. برای جلوگیری از چنین انفصالی عبارتهای اضافی اتلاف لازم است. پس معادله (۶) با معادله زیر جایگزین می شود(۱):

(۱۰)

$$\frac{d}{dt} (A_{ij} w_{ij}) + Q(w_{ij}) - D(W) = 0$$

مؤلفه عمودی سرعت در دیواره بسط داده می شود. بنابراین این شرط نفوذ ناپذیری به شکل زیر در می آید:

$$q_{\perp b} = \bar{v} \cdot \bar{n} = 0$$

بر اساس روابط سازگاری مشخصه یک بعدی، داریم:

$$\begin{aligned} dc_{1n} &= dp - padq_n = 0 \\ dc_{2n} &= dp - a^2 dq_n = 0 \\ dc_{3n} &= dp + padq_n = 0 \end{aligned}$$

در مرزهای جامد، موجهای dc_{1n} و dc_{2n} به سمت این مرزها انتشار می یابند. برای روابط گسسته ی معادله (۱۷) داریم:

$$\begin{aligned} p_{ij} - p_b - p_{ij}^n a_{ij}^n (q_{ij,n} - q_{n,b}) &= 0 \\ p_{ij} - p_b - (a_{ij}^n)^2 (p_{ij}^n - p_b) &= 0 \end{aligned}$$

در سطح جامد $q_{nb} = 0$. از ادغام معادلات (۱۸) با یکدیگر، چگالی مرز به شکل زیر محاسبه می شود:

$$p_b = p_{ij}^n + \frac{q_{ij,n}^n}{a_{ij}^n} p_{ij}^n$$

در مرزهای جامد، نقاط شبکه فشرده می شوند، و مؤلفه های سرعت از برونیابی محاسبه میشوند. در مرز دور هدف ما کمینه ساختن اغتشاشات تحمیلی است. شارش عمود بر این مرز را در نظر میگیریم، و فرض میکنیم در این حالت، مکانی یک بعدی است. متغیرهای ثابت و ریمن برونیابی شده می توانند به شکل زیر استفاده شوند (۲):

$$R_{\infty} = q_{\infty n} \frac{2}{r-1} a_{\infty}$$

$$R_e = q_{en} \frac{2}{r-1} a_e$$

سرعت عمودی و سرعت صوت به شکل زیر محاسبه میشوند:

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{1}{2}(R_e + R_{\infty}) \\ a &= \frac{\gamma-1}{4}(R_e - R_{\infty}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i+1/2,j}^{(2)} &= k^{(2)} \max(v_{i+1,j}, v_{i,j}) \\ \varepsilon_{i+1/2,j}^{(4)} &= \max(0, k^{(4)} - \varepsilon_{i+1/2,j}^{(2)}) \end{aligned}$$

مقادیر عمومی $k^{(2)} = 1/4$ و $k^{(4)} = 1/256$ می توانند استفاده شوند در مرزها کلید اتلاف خاموش است. در گرادیان های تیز فشار، از آنجا که v در ارتباط با گرادیانهای فشار تیز است، مقدار $\varepsilon^{(4)}$ صفر می شود. در رژیم شارش های یکنواخت مقدار $\varepsilon^{(2)}$ ناچیز بوده و فقط اتلاف مرتبه ی چهارم اعمال می شود.

۳- گسست زمانی

معادلات حاکم در زمان گسسته میشوند و از آنها تا رسیدن به یک حالت پایا انتگرالگیری می شود. معادله را می توان

به صورت زیر تنظیم نمود:

$$\frac{d}{dt}(w_{i,j}) + \frac{1}{A_{ij}} Z(w_{i,j}) = 0$$

که در آن:

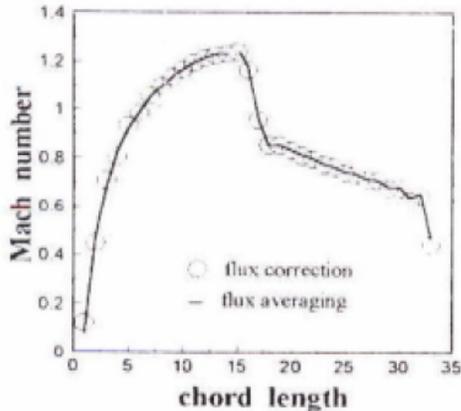
$$z(w_{ij}) = Q(w_{ij}) - D(w_{ij})$$

بدلیل بالا بودن محدوده پایداری رانگ-کوتای مرتبه چهارم، گسست زمانی با آن انجام میشود. بنابراین معادله (۱۳) داریم:

$$\begin{aligned} w_{ij}^{(0)} &= w_{ij}^{(n)} \\ w_{ij}^{(1)} &= w_{ij}^{(0)} - \frac{\Delta t}{2} Z(w_{ij}^{(0)}) \\ w_{ij}^{(2)} &= w_{ij}^{(0)} - \frac{\Delta t}{2} Z(w_{ij}^{(1)}) \\ w_{ij}^{(3)} &= w_{ij}^{(0)} - \frac{\Delta t}{2} Z(w_{ij}^{(2)}) \\ w_{ij}^{(4)} &= w_{ij}^{(0)} - \frac{\Delta t}{2} [Z(w_{ij}^{(0)}) + 2Z(w_{ij}^{(1)}) + 2Z(w_{ij}^{(2)}) + 2Z(w_{ij}^{(3)})] \\ w_{ij}^{(n+1)} &= w_{ij}^{(4)} \end{aligned}$$

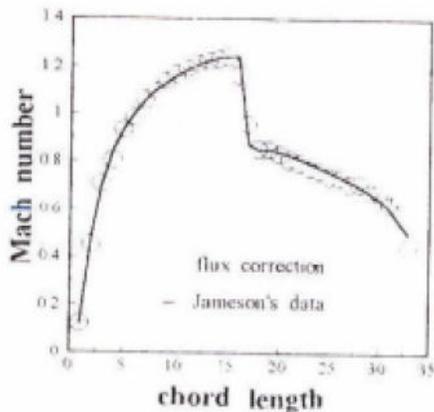
۴- شرایط مرزی

شرایط مرزی جامد خوب، باید بدون هیچ انعکاسی بر اتلاف مزاحم فایق آیند (۲ و ۹). در مرز جامد یک مشخصه از دامنه شارش نمی آید، پس یک شرط مرزی فیزیکی برای آن لازم است. این شرط به وسیله حذف



شکل ۳- مقایسه منحنیهای توزیع فشار، بین روشهای طرح پیشنهادی و روش میانگین گیری، روی ایرفویل NACA ۰۰۱۲، $CFL=۳/۵, M=۰/۸$

در شکل ۳ منحنیهای توزیع فشار برای دو روش میانگین گیری و روش حاضر کشیده شده اند. اختلاف بسیار جزئی بین دو منحنی وجود دارد، و این نشانگر رفتار مناسب مرز جامد برای طرح پیشنهادی است.



شکل ۴- مقایسه منحنیهای عدد ماخ، بین روشهای طرح پیشنهادی و روش جیمسون و همکاران، روی ایرفویل NACA ۰۰۱۲، $CFL= ۳/۵, M=۰/۸$

در شکل ۴ منحنیهای توزیع عدد ماخ مکانی برای دو روش جیمسون [۱] و روش حاضر کشیده شده اند، و توافق بین آنها مطلوب است، و این به نوبه خود نشانگر این است که می توان با روش پیشنهادی، امواج ضربه ای تیز را شکار کرد.

دو شرط مستقل دیگر لازم است تا شرایط مرز دور کامل شوند، که از مقادیر مماسی سرعت و آنتروپی حاصل میشوند. در شارشهای خارجی اینها از دامنه داخلی برونمایی میشوند، هرچند که در شارشهای خارجی می توانند مقادیر آزاد شارش را اختیار نمایند.

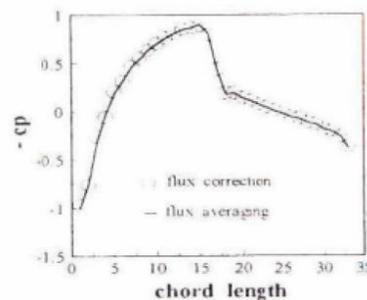
۵- مشخصات شبکه

شبکه ۶۰×۴۰ استفاده میشود، و شامل مرز دور بیضی شکلی است که وترهای کوچک و بزرگ آن بترتیب ۳۰ و ۴۰ واحد است. شبکه به روش جبری به گونه ای تولید شده است که فشردگی آن در نزدیکی دیواره جامد است.

۶- نتایج و بحث

برای تحقیق کارایی روش حجم محدود پیشنهاد شده در حل مسایل شارشهای خارجی، یک سری تست انجام شده است.

بر طبق تمامی وضعیتهای ممکن، این طرح در ایرفویل NACA ۰۰۱۲ با زاویه حمله صفر درجه، واقع در شارشی با عدد ماخ $۰/۸$ اعمال می شود.



شکل ۵- مقایسه منحنیهای توزیع عدد ماخ، بین روشهای طرح پیشنهادی و روش میانگین گیری، روی ایرفویل NACA ۰۰۱۲، $CFL= ۳/۵, M=۰/۸$

در شکل ۵ منحنیهای توزیع عدد ماخ مکانی را در امتداد سطح ایرفویل نشان می دهد. تطابق خوبی بین روش میانگین گیری و روش پیشنهادی موجود است.

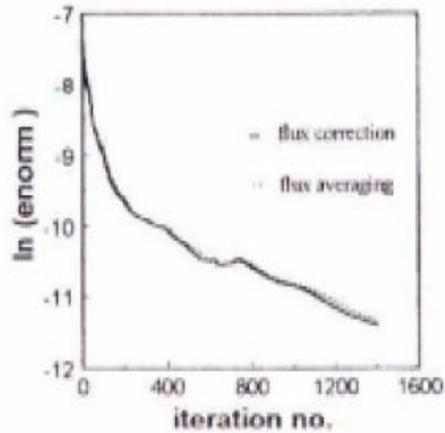
t زمان
 u مؤلفه افقی سرعت
 v مؤلفه عمودی سرعت
 w بردار حفظ شونده
 x, y مختصات دکارتی

علائم یونانی

β ضریب انبساط گرمایی
 γ نسبت گرمای ویژه
 ∇, Δ عملگرهای اختلاف محدود پیشرو و پسرو
 ϵ ضریب اتلاف عددی
 ρ جرم مخصوص
 ν حساسه فشار
 ξ ضریب اصلاح شار
 زیرنویس
 b مرزی
 e برونیابی شده
 j اشمارنده های سلول
 k وجه سلول
 n جهت عمود بر مرز
 بالا نویس
 n مرتبه زمان
 ~ میانگین

۷- مراجع

- 1- Jameson A., Schmidt W, 1981, Turkel E, "Numerical Solutions of the Euler Equations by Finite-Volume Methods Using Runge-Kutta Time-Stepping Schemes," AIAA 14th Fluid and Plasma Dynamics Conference, Palo Alto, California.
- 2- Mirzaee B., Khoshrovan E. and Razavi S., 2002, "Finite- Volume Solution of a Cylinder in Cross flow with Heat Transfer," Int. J. of Engineering, vol.15, No.3, pp.303-314.
- 3- Jameson A., Mavriplis D., 1986. "Finite Volume Solution of the Two-Dimensional Euler Equations on a Regular Triangular Mesh," AIAA J., vol.24, no.4, pp.611-618.
- 4- Pan D., Cheng J. C. 1993, "Upwind Finite-Volume Navier-Stokes Computations on Unstructured Triangular Meshes," AIAA J. vol.31, no.9.



شکل ۵ - مقایسه منحنیهای مانده، بین روشهای طرح پیشنهادی و روش میانگین گیری، روی ایرفویل NACA۰۰۱۲، $M=0.8$ ، $CFL=3/5$

در شکل ۵ منحنی مانده طرح پیشنهادی با منحنی مانده روش میانگین گیری جیمسون مقایسه شده است. هرچند که اختلاف همگرایی در دو منحنی زیاد نیست، ولی به هر حال این منحنیها نشانگر سریع بودن همگرایی طرح حاضر است. توجه شود که در طرح پیشنهادی از 40×60 سلول استفاده شده است، این در حالی است که طرح جیمسون از 64×128 گره استفاده کرده است. کاهش تعداد گرهها در حل مسایل جریان سیال یک امتیاز به شمار می آید. مطلب جالب توجه در طرح حاضر اینکه از مقادیر عدد کورانت بزرگتر چون $3/5$ استفاده شده است، و این در حالی است که در طرح جیمسون عدد کورانت از مقدار ۲ تجاوز نمی کند. وهمچنین است در مورد طرحهای دیگران [۴ و ۸]. طرح اصلاح شار حاضر، در کاربرد آسان است، و در حل شارشهای ترا صوتی تنومند ظاهر میشود.

از فهرست علائم

a سرعت صوت
 A مساحت سلول
 Cp تابع اتلاف D گرمای ویژه در فشار ثابت
 E انرژی کل
 g شتاب جاذبه
 H آنتالپی کل
 M عدد ماخ
 p فشار
 Q بردار شار

- 5- Razavi S. E., Mirzaee B, 1997, "An Enhanced Lax-Wendroff Scheme for Solving the Compressible Flows in all Regimes," 5th ISME Conf., Tabriz, Iran.
- 6- Yang S. L., Chang Y. L., 1995, "Navier-Stokes Computations of the NREL Airfoil Using a Turbulent Model at High Angles of Attack," Trans. Of the ASME, vol.117, pp.304-310.
- 7- Thomadakis M. P., Tsangaris S., 1992, "Improved Artificial Dissipation Schemes for the Euler Equations," Int. J. for Num. Meth. In Fluids, vol.14, pp. 1391-1405.
- 8- Lyra P. R. M., Morgan K. Peraire J., and Perio J., 1994, "TVD Algorithms for the solution of the Compressible Euler Equations on Unstructured Meshes," Int. J. for Num.Meth. in Fluids, vol.19, pp.827-847.
- 9- Mazaheri K., Roe P. L., 1991, "New Light on Numerical Boundary Conditions," AIAA 10th Computational Fluid Dynamics Conf., Honolulu, HI.

An Enhanced Finite-Volume Method For The Solution Of Compressible Flows

B. Mirzai

Mechanical eng. dept, Mohagheg university.

S. E. Razavi

Faculty of mechanical eng, university of tabriz

An enhanced scheme is introduced for the solution of two dimensional unsteady euler equations. The finite- volume method of Jameson et al. is modified by devising a pressure sensor in cell flux calculations .

Then the discretized governing equations are relaxed in time until a steady state is reached. An appropriate model for the artificial dissipation was also employed . Several tests were conducted by this method on an O grid in the transonic regimes.

The obtained numerical solutions were compared by the solutions of Jameson et al, in which good agreement would exist.

Keywords: Euler equations, finite-volume method, Artificial dissipation, characteristic method