J. Analysis of Structure and Earthquake

Volum 20, Issue 3, autumn 2023

وبگاه مجله: www.civil-strj.maragheh.iau.ir

Issn: 2821-0999

آنالیز سازه - زلزله
فصلنامه علمی

دوره ۲۰، شماره ۳، پاییز ۱۴۰۲

A S E

Investigating the Efficiency of Modified Element-free Galerkin Method in Solving Static Problems and Optimization

Ali Zareh
Department of Civil Engineering, Tabriz Branch, Islamic Azad University, Tabriz, Iran
Ramin Vafaei Poursorkhabi *
Department of Civil Engineering, Tabriz Branch, Islamic Azad University, Tabriz, Iran
Robotics & Soft Technologies Research Center, Tabriz Branch, Islamic Azad University, Tabriz, Iran
Alireza Alizadeh Majdi
Department of Civil Engineering, Tabriz Branch, Islamic Azad University, Tabriz, Iran
Robotics & Soft Technologies Research Center, Tabriz Branch, Islamic Azad University, Tabriz, Iran
Fariba Behrouz Sarand
Department of Civil Engineering, Tabriz Branch, Islamic Azad University, Tabriz, Iran
raminvafaei@yahoo.com

DOI 10.30495/CIVIL.2023.706890

Keywords:
Galerkin method, moving least squares, numerical modeling

Abstract

The finite element method has been used comprehensively in traditional and academic wo
The common finite element method is a powerful method in solving boundary va
problems that transforms strong differential form equations into weak fo
equations using domain discretization. Even though the finite element method
sufficient accuracy in displacements, but calculating the stress field by FEM has low accura
This paper uses the modified element-free Galerkin method to solve some numer
elastostatics problems. At first, a one-dimensional elastic bar is considered, whicl
subjected to a volumetric force with linear changes along the length of the bar
comparison between the original element-free Galerkin method, the modif
element-free Galerkin method and the exact solution has been made to check
accuracy, efficiency and the required time cost. The presented study indicates t
these mentioned methods have the same accuracy, but the modified EFG method
be very time-consuming compared to others, mainly when a large number of degr
of freedom is used with a large size of the support domain. The numerical solut
of the modified and original element-free Galerkin methods is compared v
Timoshenko's analytical responses for the bending of an elastic beam. T
comparison exhibits that modified and original methods have excellent agreeme
with the analytical ones in calculating displacement values. Despite the sa
accuracy in estimating the displacements, the calculation of the stress field indica
that the modified method is less accurate than the original method. It is shown t
by increasing the number of degrees of freedom, the accuracy of the modif
method for estimating the stress field improves. Increased degrees of freedom
used for introducing the domain of the beam. In this study accuracy of the str
solution in the modified EFG method is improved. However, the modified E
method is yet more time-consuming than others. According to the results, the modi
element-free Galerkin method can be nominated as a powerful mesh-free method basec
moving least squares that has shape functions with interpolation properties. Hav
interpolator shape functions in this method makes it possible to combine it with o
numerical methods and apply boundary conditions with less computational cost. The res
exhibit that the displacement calculation error in the presented method was at m
5% compared to the analytical solution method. Also, the maximum error rate in
presented method for stress estimation was equal to 15%.

بررسی کارایی روش اصلاح شده‌ی بی‌نیاز از المان گالرکین در حل مسائل استاتیکی و به‌سازی

علی زارع
گروه مهندسی عمران، واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران
رامین وفایی پورسرخابی*
گروه مهندسی عمران، واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران
مرکز تحقیقات رباتیک و فناوری های نرم، واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران
علیرضا علیزاده مجد
گروه مهندسی عمران، واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران
مرکز تحقیقات رباتیک و فناوری های نرم، واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران
فریبا بهروز سرند
گروه مهندسی عمران، واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران
raminvafaei@yahoo.com

تاریخ دریافت : ۲۰ اسفند ۱۴۰۱ تاریخ پذیرش: ۰۵ تیر ۱۴۰۲

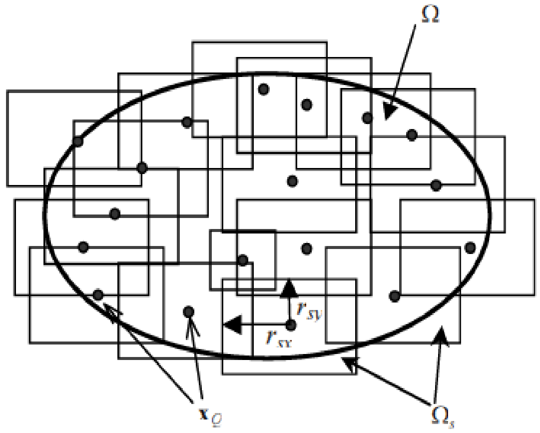
چکیده

روش اجزای محدود (FEM) به طور گسترده‌ای در تحقیقات پیشین مورد استفاده قرار گرفته است. اگرچه روش اجزای محدود دقت کافی در تخمین مقادیر تغییرشکل و جابجایی‌ها دارد، اما محاسبه میدان تنش توسط این روش از دقت پایینی برخوردار است. در این مقاله روش بدون المان گالرکین (EFG) اصلاح شده برای حل مسائل الاستوستاتیک به صورت عددی پیشنهاد شده و مورد استفاده قرار گرفته است. برای توضیح ساده‌تر روابط پیشنهادی، ابتدا یک میله‌ی الاستیک یک بعدی در نظر گرفته شده است که تحت نیروی حجمی با تغییرات خطی در طول میله می‌باشد. مقایسه‌ای میان روش اصلی گالرکین بدون المان، روش گالرکین بدون المان اصلاح شده و راه حل دقیق برای بررسی دقت، کارایی و هزینه زمانی مورد نیاز انجام شده است. مطالعه‌ی ارائه شده نشان می‌دهد که روش‌های ذکر شده دارای دقت یکسانی هستند، اما روش اصلاح شده EFG در مقایسه با روش‌های دیگر نیاز به هزینه زمانی بیشتری برای حل مسائل با تعداد زیادی درجه آزادی دارد. پاسخ‌های روش گالرکین اصلاح شده و بدون المان اصلاح نشده با پاسخ های تحلیلی تیموشنکو برای خمش یک تیر الاستیک مقایسه شده است. این مقایسه نشان می دهد که روش‌های اصلاح شده و اصلی تطابق بسیار خوبی با روش‌های تحلیلی در محاسبه مقادیر جابجایی‌ها دارند. با وجود یکسانی دقت در تخمین جابجایی‌ها، محاسبه میدان تنش نشان می‌دهد که روش اصلاح شده دقت کمتری نسبت به روش اصلی دارد. نشان داده شده است که با افزایش تعداد درجات آزادی، دقت روش اصلاح شده برای تخمین میدان تنش بهبود می‌یابد. با این حال، روش اصلاح‌شده EFG نسبت به روش‌های دیگر زمان‌برتر است. بر اساس تمام نتایج فوق، روش گالرکین بدون المان اصلاح شده را می‌توان به عنوان یک روش قدرتمند بدون شبکه مبتنی بر حداقل مربعات متحرک که دارای توابع شکل با خواص درون یابی است معرفی کرد. برخورداری از توابع شکل درونیاب در این روش ترکیب آن را با سایر روش‌های عددی مقدور ساخته و اعمال شرایط مرزی را با هزینه محاسباتی کمتر مقدور می‌سازد. نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که خطای محاسبات جابجایی در روش ارائه شده حداکثر به میزان ۵٪ نسبت به روش حل تحلیلی بوده است. همچنین میزان حداکثر خطا در روش ارائه شده برای تخمین تنش‌ها برابر با ۱۵٪ بوده است.

کلید واژگان: روش گالرکین، کمترین مربعات متحرک، مدلسازی عددی.

۱-مقدمه

طراحی سیستم‌های مهندسی پیشرفته نیازمند استفاده از ابزارهای یاری‌رسان رایانه‌ای طراحی می‌باشد. در این ابزارها، تکنیک‌های شبیه‌سازی به صورت کلی برای مدل‌سازی و تحقیق در مورد یک پدیده‌ی فیزیکی استفاده می‌شود. این شبیه‌سازی نیازمند حل معادلات دیفرانسیل یا معادلات دیفرانسیل جزئی پیچیده‌ی حاکم بر آن پدیده‌ها است. در روش‌های وابسته به شبکه، دامنه‌ی فضایی مسئله به صورت مش‌های پاره‌سازی شده تعریف می‌شوند. مش باید حاوی تعریف رابطه‌ای میان گره‌ها باشد. با تعریف مش مناسب و اعمال اصول مقتضی، معادلات دیفرانسیل پیچیده را می‌توان با مجموعه‌ای از معادلات جبری تقریب زد. با سرهم‌بندی مجموعه معادلات جبری برای تمام مش‌ها، سیستم معادلات جبری برای کل دامنه‌ی مسئله بدست می‌آید. از جمله روش‌های وابسته به شبکه (مش[1]) می‌توان به روش المان محدود ، المان مرزی ، المان محدود مرزی مقیاس شده و المان گسسته اشاره کرد. روش‌های بی‌نیاز از مش از معادلات جبری برای کل دامنه‌ی مسئله استفاده می‌کنند بدون آنکه از مش‌های از پیش تعریف شده استفاده کنند[۱]. این روش‌ها از مجموعه‌ای از گره‌های پخش شده در دامنه‌ی مسئله و مرز آن برای تعریف و نه پاره سازی دامنه و مرز استفاده می‌کنند. تفاوت اساسی میان روش‌های بی‌نیاز از شبکه و روش‌هایی مانند روش المان محدود در نحوه‌ی ایجاد توابع شکل می‌باشد. در روش المان محدود، توابع شکل با استفاده از المان‌ها ایجاد می‌شوند و برای تمام المان‌های مشابه توابع شکل مشابه خواهند بود. در روش‌های بی‌نیاز از مش توابع شکل هر نقطه متفاوت از دیگر نقاط می‌باشد. در ضمن، ساخت این توابع شکل در حین تحلیل ایجاد می‌شود و نه قبل از آن. در اکثر روش‌های بی‌نیاز از مش از تقریب کمترین مربعات متحرک[2] (MLS) به جای درون‌یابی چند نقطه‌ای استفاده می‌شوند. توابع شکل ساخته شده در این روش دقت بیشتری داشته و حتی برای مدل‌سازی محیط‌های انحناءدار بسیار موثرتر از توابع شکل معمولی هستند[۲]. علی‌رغم این مزایا توابع شکل MLS خاصیت مهم دلتای کرونیکر را ندارند، بنابراین برای اعمال شرایط مرزی اساسی و طبیعی نیاز به کار محاسباتی بیشتری می‌باشد. به طورکلی می‌توان گفت روش‌های بی‌نیاز از مش نسبت به روشی مانند المان محدود پر هزینه‌تر می‌باشد[۱]. البته باید توجه کرد که هزینه‌ی اضافی روش‌های بی‌نیاز از مش مربوط به رایانه بوده و زمان صرف شده در این روش توسط کاربر آموزش دیده (که امروزه مهمتر از زمان مصرفی توسط رایانه است) کمتر می‌باشد. یکی از ویژگی‌های بسیار مثبت روش‌های بی‌نیاز از مش، پیوستگی میدان تنش محاسباتی می‌باشد. در این روش‌ها، گره‌های به کاررفته برای ساخت تابع شکل یک نقطه‌ی انتگرال‌گیری توسط دامنه‌ی حمایتی مشخص می شود. برای نقاط مختلف، دامنه‌های حمایتی می‌توانند درهم تنیدگی داشته باشند. شکل ۱، نمونه‌ای از دامنه‌های حمایتی مستطیلی شکل را نشان می‌دهد[۱].



شکل ۱- دامنه‌های حمایتی در روش بی‌نیاز از مش

از انواع مختلف روش‌های بی‌نیاز از مشی که تاکنون ارائه شده اند می توان به موارد ذکر شده در جدول ۱، اشاره کرد. تفاوت عمده‌ی روش‌های ارائه شده در جدول فوق، در نحوه‌ی ایجاد توابع شکل و در نتیجه نحوه‌ی اعمال شرایط مرزی اساسی و طبیعی می‌باشد. تنها در روش درون‌یابی نقاط[3] (PIM) توابع شکل ایجاد شده خاصیت دلتای کرونیکر خواهند داشت[۲]. البته روش درون‌یابی نقاط نیز دارای مشکلات ریاضی در ایجاد توابع شکل می‌باشد[۳]. شاید بتوان گفت روش بی‌نیاز از المان گالرکین که توسط بلیتسکو و همکاران[4] [۲]، ارائه گردیده است پر کاربردترین روش در میان روش‌های بی‌نیاز از مش می‌باشد. این روش در مقایسه با روش المان محدود دارای دقت بیشتر، همگرایی سریع‌تر، پاسخ تنش نرم‌تر می‌تواند باشد[۴]. توابع شکل در روش بی‌نیاز از المان گالرکین[5]، با استفاده از تقریب کمترین خطای مربعات ایجاد می‌شوند و همانطور که پیش‌تر گفته شد این توابع شکل فاقد خاصیت دلتای کرونیکر می‌باشند. در سال ۲۰۱۲، روشی اصلاحی برای افزودن خاصیت درون‌یابی به توابع شکل روش بی‌نیاز از المان گالرکین برای کاربرد در روش المان محدود مرزی مقیاس شده، پیشنهاد گردیده است [۵].

1 Mesh
2 Moving least squares
3 Point interpolation method
4 Belytschko et al.
5 Galerkin

جدول ۱- روش‌های مهم بی‌نیاز از مش و ارائه دهندگان‌آن‌ها

ارائه دهنده و سال ارائه	نام روش
Belytschko(۱۹۹۴)	روش بی‌نیاز از المان گالرکین (EFG)
Alturi(۱۹۹۸)	روش بی‌نیاز از مش موضعی پتروف گالرکین (MLPG)
Lucy(۱۹۷۷)	هیدرودینامیک ذرات نرم (SPH)
Liu(۱۹۹۹)	روش درون‌یابی نقاط (PIM)

روش مرز مقیاس شده، با استفاده از المان گالرکین در حل مسائل استاتیکی در گذشته برای پرداختن به مسائل مختلف مورد استفاده قرار گرفته است. این تکنیک، برای تجزیه و تحلیل نشت [۶ و۷]، ایستایی [۸ و ۹] و مسائل دینامیکی [۱۰ و ۱۱] استفاده شده است. بر اساس رویکرد محلی پتروف–گالرکین[6] بدون شبکه و رویکرد گالرکین بدون عنصر، دیکس و اوگارد[7] [۱۲] و اِو[8] و همکاران[۱۳] دو نسخه بدون مش از روش مرزی مقیاس شده ارائه کردند. این تکنیک‌ها، نتایج خود را با استفاده از تقریب MLS فرموله می‌کنند. این مطالعات روش جدیدی را برای اصلاح توابع شکل MLS معرفی کرده اند زیرا استفاده از تقریب MLS در ساخت توابع شکل منجر به توابع غیر درون یابی می شود. حتی اگر توابع شکل MLS درون یابی با روش جدید ارائه می شود، روش‌های بدون مش مرز مقیاس را که قبلاً ذکر شد بسیار کُند و زمان بَر می‌کند. چندین محقق اخیراً از روش مرزی مقیاس شده مبتنی بر درونیابی نقطه شعاعی برای حل مسائل مهندسی استفاده کرده اند. RPISBM برای بررسی مشکلات الاستو استاتیک دو بعدی [۱۴] ، مشکلات تَرَک [۱۵] و تجزیه و تحلیل شکست مواد پیزوالکتریک [۱۶] استفاده کرده‌اند. مطالب مندرج در این مقاله بدین شرح زیر است که، ابتدا نحوه‌ی تشکیل توابع شکل در روش اصلاح شده‌ی بی‌نیاز از المان گالرکین توضیح داده شده است سپس به بررسی نتایج بدست آمده پرداخته شده است. در نهایت نتیجه‌گیری از نتایج حاصله ارائه گردیده است.

۲- توابع شکل در روش اصلاح شده‌ی EFG

روش تقریب کمترین مربعات متحرک در برازش داده‌ها توسط یک منحنی کاربرد دارد. در این بخش به صورت مختصر مروری بر نحوه‌ی فرمول‌بندی و محاسبه‌ی تابع شکل نقاط در روش بی‌نیاز از المان گالرکین توسط روش کمترین مربعات متحرک خواهد شد و پس از آن به بیان نحوه ی اصلاح این توابع شکل پرداخته خواهد شد. خواننده‌ی علاقه‌مند به آشنایی بیشتر با روش EFG و نحوه‌ی برنامه‌نویسی این روش می‌تواند به مراجع [۲-۶]، مراجعه کند. اگر یک تابع مکانی دو بعدی مانند u(x) داشته باشیم، این تابع مکانی را به صورت تقریبی با استفاده از پایه‌های چند جمله‌ای به صورت زیر می‌توان بیان کرد.

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^{m} p_i(x)\, a_i = P^T a \qquad (۱)$$

در رابطه‌ی فوق m تعداد پایه‌ها، P بردار توابع پایه‌ای و a بردار ضرائب مجهول می‌باشد. برای تعیین ضرائب مجهول n گره باید در دامنه‌ی حمایتی نقطه‌ی مورد نظر انتخاب شود. باید توجه داشت که همواره تعداد نقاط موجود در دامنه‌ی حمایتی بایستی از تعداد ضرائب مجهول بیشتر باشد. برای تمام گره‌های موجود در دامنه‌ی حمایتی نقطه‌ی مورد نظر می توان نوشت:

$$U_s = (P_m)_{m\times n} a_{n\times 1} \qquad (۲)$$

در رابطه‌ی فوق P_m ماتریس ممان بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$P_m = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & p_m(x_1) \\ 1 & x_2 & \cdots & p_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & p_m(x_n) \end{bmatrix} \qquad (۳)$$

حال هدف حداقل کردن مربعات وزن‌دار تفاوت میان جواب تقریبی و جواب دقیق (رابطه‌ی ۴) برای تعیین ضرائب مجهول a می‌باشد.

$$J = \sum_{i=1}^{n} w_i [u^h(x_i) - u(x_i)]^2 \qquad (۴)$$

در رابطه‌ی فوق w تابع وزن می‌باشد. به عنوان مثال می‌توان از رابطه‌ی زیر برای تعیین تابع وزن استفاده کرد.

$$w(r) = \begin{cases} 1 - 6{r_i}^2 + 8{r_i}^3 - 3{r_i}^4 0 \le r_i \le 1 \\ 0 r_i \rangle 1 \end{cases} \qquad (۵)$$

در این رابطه r اندازه‌ی دامنه‌ی گرهی بوده و به صورت زیر محاسبه می شود:

$$r_i = \beta . ds \qquad (۶)$$

کنترل اندازه‌ی دامنه‌ی گرهی توسط کمیت بدون بعد β انجام می‌پذیرد.

برای یافتن حداقل مقدار وزن‌دار مربعات تفاضل میان پاسخ دقیق و پاسخ تقریبی (رابطه‌ی ۴) مشتق J باید برابر صفر قرار داده شود:

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 0 \qquad (۷)$$

پاسخ بدست آمده برای رابطه‌ی فوق، با استفاده از رابطه‌ی ۴ و رابطه‌ی ۲ به صورت زیر خواهد بود.

[6] Petrov-Galerkin
[7] Deeks and Augarde
[8] He et al.

$$P_m{}^T w P_m a = P_m{}^T w U_s \tag{۸}$$

برای ساده‌سازی رابطه‌ی فوق ماتریس‌های ضریبی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A = P_m{}^T w P_m \tag{۹}$$

$$B = P_m{}^T w \tag{۱۰}$$

حال رابطه‌ی ۸ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$a = A^{-1} B U_s \tag{۱۱}$$

با جایگذاری رابطه‌ی فوق در رابطه‌ی ۱ مقادیر متغیر مکانی تقریبی گرهی به صورت زیر حاصل خواهد شد:

$$u^h = P^T A^{-1} B U_s \tag{۱۲}$$

با توجه به تعریف تابع شکل و با استفاده از رابطه‌ی ۱۲، توابع شکل کمترین مربعات متحرک به صورت زیر تعریف می‌گردند.

$$\varphi^T = P^T A^{-1} B \tag{۱۳}$$

همان‌طور که پیش‌تر گفته شد، توابع شکل MLS فاقد خاصیت درون‌یابی و بالتبع خاصیت تابع دلتای کرونیکر می‌باشند. حال به بررسی روش اصلاحی پیشنهاد شده پرداخته می‌شود. با توجه به تعریف تابع شکل، رابطه ی میان میدان تقریبی متغیر مکانی با مقادیر گرهی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\{u_z\} = \begin{bmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{bmatrix} \{Uz\} \tag{۱۴}$$

ماتریس مربع $n \times n$ توابع شکل MLS در نقاط گرهی را ماتریس تبدیل نامیده شده و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\{T\} = \begin{bmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{bmatrix} \tag{۱۵}$$

حال با جایگذاری رابطه‌ی ۱۵ در رابطه‌ی ۱۳ خواهیم داشت:

$$u^h = P^T A^{-1} B T^{-1} u_s = \phi^T u_s \tag{۱۶}$$

در رابطه‌ی فوق φ ماتریس توابع شکل MLS اصلاح شده می‌باشد که دارای خاصیت درون‌یابی و تابع دلتای کرونیکر می‌باشد. در محاسبه‌ی ماتریس سختی لازم است مشتقات توابع شکل نیز محاسبه شوند. برای بدست آوردن مشتقات توابع شکل از رابطه‌ی زیر استفاده خواهد شد.

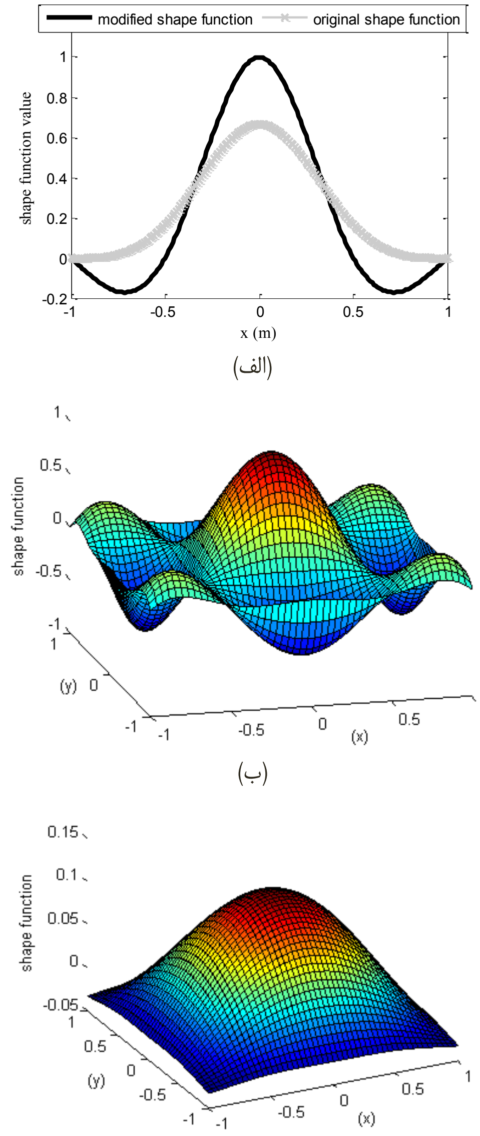
$$\phi_{,i}{}^T = \varphi_{,i}{}^T T^{-1} \tag{۱۷}$$

فلوچارت محاسبه‌ی توابع شکل اصلاح شده‌ی MLS به صورت زیر می باشد. با افزوده شدن خاصیت درون یابی به توابع شکل ایجاد شده، دیگر عملیات اضافی و تقریبی ضرائب لاگرانژ[9] یا ضریب پنالتی لازم نخواهد بود. در این حالت، شرایط مرزی اساسی و طبیعی را می‌توان مستقیما در مسئله دخالت داد. محاسبه‌ی ماتریس تبدیل T برای گره‌های موجود در دامنه‌ی حمایتی نقطه‌ی گاوسی مورد نظر باعث افزایش هزینه‌ی زمانی روش خواهد گردید. میزان این افزایش هزینه‌ی زمانی در بخش بعدی مورد ارزیابی قرار گرفته‌است. در نهایت در آخرین بحث مربوط به این بخش از مقاله، توابع‌شکل اصلاح شده و اصلاح نشده‌ی MLS در حالت یک بعدی و دو بعدی برای المان‌های به ترتیب پنج و بیست و پنج گرهی و برای گره مرکزی، به منظور ایجاد درکی مناسب تر در شکل ۳، رسم گردیده‌اند.

شکل ۲– فلوچارت محاسبه‌ی تابع شکل درون‌یاب MLS

البته این نکته در مورد شکل فوق لازم به ذکر است که تابع شکل در حالت یک بعدی با فرض قرار گرفتن تمان نقاط در دامنه‌ی حمایتی رسم شده است در حالی که در حالت دو بعدی d_{max} برابر ۴ فرض شده است.

[9] Lagrange



(الف)

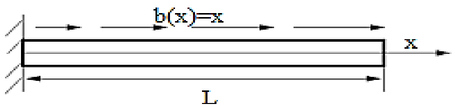
(ب)

(ج)

شکل ۳- الف، مقایسه‌ی تابع شکل یک بعدی اصلاح شده و نشده‌ی MLS، المان ۵ گرهی، رسم برای گره مرکزی، ب، تابع شکل دوبعدی اصلاح شده‌ی MLS برای گره مرکزی از المان ۲۵ گرهی، ج، تابع شکل دوبعدی اصلاح نشده‌ی MLS برای گره مرکزی از المان ۲۵ گرهی.

۳- بحث و نتیجه گیری

در بخش نتایج این مقاله دو عامل در بررسی کاربرد و کارآیی روش اصلاح شده‌ی بدون المان گالرکین مدنظر قرار گرفته‌است. دقت و میزان خطای جواب‌های بدست آمده و زمان لازم برای حل مسائل دو عامل اساسی مورد ارزیابی قرار گرفته می‌باشند. در این بخش ابتدا به مقایسه‌ی میان روش اصلاح شده و روش اصلی بی‌نیاز از المان گالرکین در حل مسائل یک بعدی پرداخته می‌شود. شکل ۴ مسئله‌ی مورد ارزیابی قرار گرفته، یک میله‌ی یک بعدی با طول واحد تحت اعمال نیروی حجمی خطی با شدت x را نشان می‌دهد. از جابه‌جایی میله در انتهای سمت چپ میله جلوگیری شده و انتهای سمت راست میله از اعمال نیروی سطحی مبرا است. میله‌ی مفروض دارای سطح مقطع ثابت با مقدار واحد بوده و ضریب ارتجاعی آن نیز واحد فرض شده است.

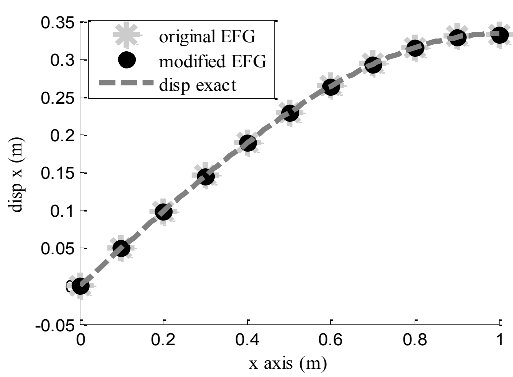


شکل ۴- میله‌ی الاستیک یک بعدی تحت بار حجمی خطی

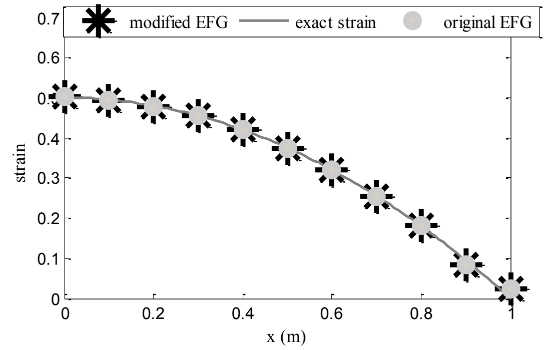
پاسخ دقیق تحلیلی برای این مسئله به صورت زیر می‌باشد:

$$u(x) = \frac{1}{E}(0.5x - \frac{x^3}{6}) \qquad (۱۸)$$

این پاسخ برای تعیین دقت روش عددی به کار رفته مورد استفاده قرار خواهد گرفت. با اعمال روش بی‌نیاز از المان گالرکین اصلاح شده و اصلاح نشده پاسخ بدست آمده به صورت شکل ۵، خواهد بود. همان‌طور که شکل ۵، نشان می‌دهد در مسئله‌ی مفروض یک بعدی حل شده، دو روش اصلاح شده و اصلاح نشده‌ی بدون المان گالرکین تقریبا دقتی معادل هم دارند. به عبارت دیگر استفاده از روش ضرائب لاگرانژ در حالت اصلاح نشده دقت چندانی از روش نکاسته است. همچنین با بررسی انجام شده دیده می‌شود که به ازای ۱۱ گره در مدل مفروض ($dx=0.1$)، روش اصلاح شده ۰/۰۸۳ ثانیه و روش اولیه ۰/۱۸۳ ثانیه زمان برای پردازش نیاز دارد. با افزایش تعداد گره‌ها به ۱۰۱ گره ($dx=0.01$) دیده شد که روش اصلاح شده در ۱/۵۹ ثانیه و روش اولیه در ۰/۶۴ ثانیه پردازش شد. با توجه به این که در حالت یک بعدی فرض شد تمام گره‌ها در دامنه‌ی حمایتی نقطه ی مورد نظر می‌باشند، این افزایش زمان در روش اصلاح شده با توجه به تشکیل ماتریس تبدیل T در هر گام انتگرال گیری عددی طبیعی به نظر می‌رسد. در مسئله دوبعدی که در سطور بعدی مورد ارزیابی قرار گرفته است، تاثیر نوع تابع شکل به زمان مورد نیاز برای پردازش در دو روش اصلاح‌شده و اصلاح‌نشده مجدداً، مورد بررسی قرار گرفته است.



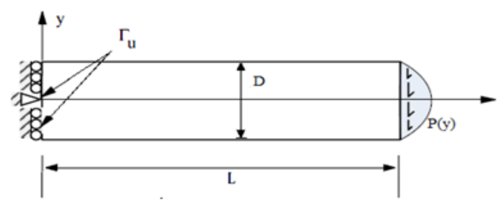
(الف)



(ب)

شکل ۵- مقایسه‌ی میان روش‌های حل تحلیلی، بی‌نیاز از المان اصلاح شده و بی‌نیاز از المان اصلاح نشده (الف) برای جابه‌جایی (ب) برای کرنش در طول میله

برای بررسی مسائل دو بعدی، حل مسئله‌ی تیر تیموشنکو مورد ارزیابی قرار گرفته است. تیری با طول ۴۸ و ارتفاع ۱۲، متر و عمق واحد در نظر گرفته می‌شود. مدول الاستیک تیر برابر ۱۰۷×۳ و ضریب پواسون تیر برابر ۰/۳ در نظر گرفته‌شده است. مطابق شکل ۶، یک بار سهموی به بزرگی ۱۰۰۰ در انتهای راست تیر وارد و شرایط تکیه‌گاهی مشخصی در انتهای سمت چپ تیر اعمال شده‌است.



شکل ۶- تیر طره‌ای در نظر گرفته شده برای مسئله‌ی دوبعدی

پاسخ تحلیلی ارائه شده توسط تیموشنکو[10] [۱۷]، برای جابه‌جایی قائم و افقی به صورت روابط ۱۹ و ۲۰، می‌باشد.

$$u_x = -\frac{py}{6EI}((6L-3x)x + (2+v)(y^2 - \frac{D^2}{4})) \quad (۱۹)$$

$$u_y = \frac{p}{6EI}(3vy^2(L-x) + (4+5v)\frac{D^2x}{4} + (3L-x)x^2) \quad (۲۰)$$

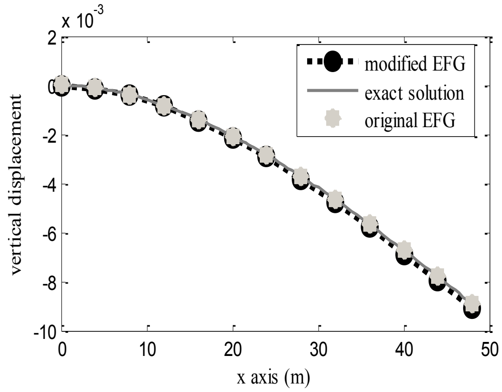
در این روابط، I، ممان اینرسی تیر می‌باشد. تیموشنکو همچنین روابط تحلیلی ۲۱ تا ۲۳، را برای محاسبه‌ی تنش‌های مرتبط با جابه‌جایی‌های فوق، ارائه کرده‌است.

$$\sigma_x = -\frac{P(L-x)y}{I} \quad (۲۱)$$

$$\sigma_Y = 0 \quad (۲۲)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{Py}{2I}(\frac{D^2}{4} - y^2) \quad (۲۳)$$

برای انتگرال‌گیری عددی در هر سلول انتگرال‌گیری از نقاط و وزن‌های ۴×۴ کوادراتور گاوس–لژاندر استفاده شده است. از پایه‌های چند جمله‌ای خطی در هر دو روش اصلاح شده و اصلاح نشده استفاده شده‌است. فاصله ی گره‌ها در جهت افقی ۴ و در جهت قائم ۲ در نظر گرفته شده‌است (تعداد ۹۱ گره مورد استفاده قرار گرفته است). جابه‌جایی قائم حاصله بر روی تار خنثی تیر به صورت شکل ۷، می‌باشد.



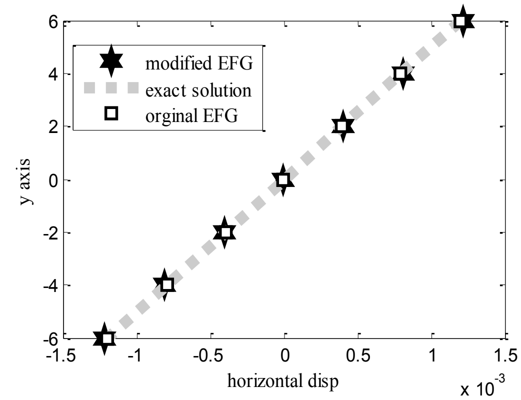
شکل ۷- جابه‌جایی قائم تار خنثی در تیر طره‌ای مفروض

همان‌طور که شکل فوق نشان می‌دهد دو روش اصلاح شده و اصلاح نشده در محاسبه‌ی جابه‌جایی قائم تیر دقت تقریبا یکسانی داشته‌اند اگر که دقت روش اولیه‌ی EFG با توابع شکل تقریب زننده اندکی بیشتر از روش اصلاح شده می‌باشد. البته لازم به ذکر است که مزایای تابع شکل درون‌یاب مانند سهولت ترکیب روش با سایر روش‌های عددی و اعمال شرایط مرزی ممکن است در برخی موارد بیشتر مورد توجه قرار بگیرد. در ادامه به مقایسه‌ی جواب‌های بدست آمده برای جابه‌جایی افقی روی خط قائم در مکان $x=L/2$ پرداخته شده است. شکل ۸، پاسخ بدست آمده را نشان می‌دهد. این شکل نیز دقتی یکسان برای هر دو روش اصلاح شده و اولیه را نشان می‌دهد.

همانطور که پیش‌تر اشاره شد یکی از مزایای مهم روش EFG در مقایسه با روش المان محدود دقت بیشتر این روش در محاسبه‌ی تنش‌های ایجادی می‌باشد. به منظور اینکه اثر اصلاح روش EFG بر تنش‌های محاسبه شده بررسی شود، مولفه‌ی x و xy تنش در مسئله‌ی تیر تیموشنکو مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. شکل (۹–الف) به مقایسه‌ی مولفه‌ی x تنش محاسبه شده توسط ۳ روش بی‌نیاز از المان به فرم اولیه، بی‌نیاز از المان اصلاح شده و حل تحلیلی تیموشنکو پرداخته شده است. شکل (۹–ب) این مقایسه را برای مولفه‌ی xy تنش ارائه می‌دهد. با توجه به نتایج بدست آمده می‌توان گفت که افزودن خاصیت درون‌یابی به توابع شکل MLS در

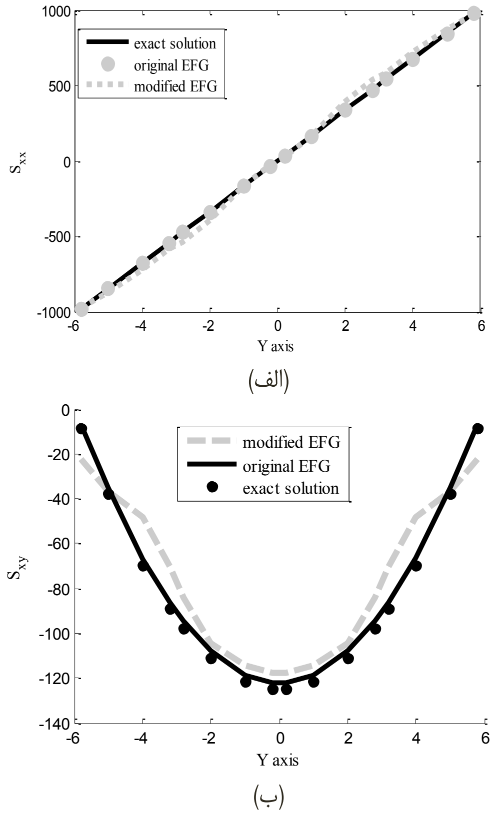
[10] Timoshenko

روش EFG باعث می‌شود این روش مقداری از دقت خود به ویژه در محاسبه‌ی مقادیر تنش را نسبت به حالت اولیه از دست بدهد. در بررسی های انجام گرفته در این مقاله مشاهده شد که روش اولیه‌ی EFG برای حل مسئله‌ی تیر تیموشنکو با ۹۱ گره، ۳/۸۵۰۹ ثانیه برای پردازش و محاسبه‌ی بردار جابه‌جایی نیاز دارد. روش اصلاح شده‌ی EFG برای مسئله‌ی مشابه نیازمند ۲۱۰ ثانیه زمان برای پردازش می‌باشد. این امر نشان می‌دهد که محاسبه‌ی ماتریس تبدیل T تا چه اندازه هزینه‌ی زمانی روش را افزایش می‌دهد. برای مقایسه‌ی میان روش اصلاح شده‌ی بی‌نیاز از المان گالرکین با روش المان محدود و روش بی‌نیاز از المان درون‌یاب نقاط (RPIM) تعداد گره‌ها را به ۱۷۵ گره افزایش می‌دهیم.

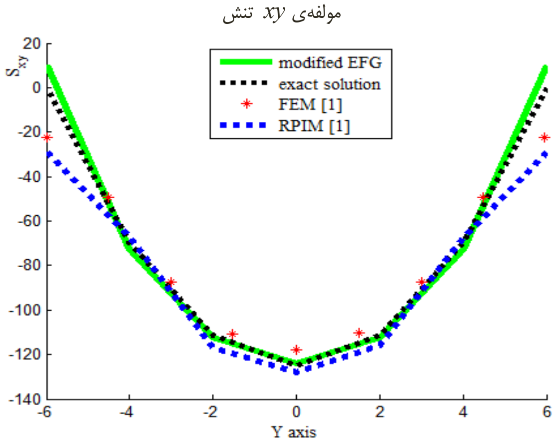


شکل ۸- تغییرات جابه‌جایی افقی در عمق تیر طرهای (-6<y<6)، در وسط تیر (x=24)

در این تحلیل به جای$dmax$ =۳/۵ از $dmax$=۳/۸۵ استفاده شده است. نتایج روش المان محدود و بی‌نیاز از المان درون‌یاب نقاط از مرجع [۱]، استخراج شده است. شکل (۱۰) نتایج این بررسی انجام گرفته را نشان می دهد. همان‌طور که شکل ۱۰، نشان می‌دهد با تعداد گره یکسان نتایج روش اصلاح شده‌ی بی نیاز از المان گالرکین بسیار دقیق‌تر از روش المان محدود و روش بی‌نیاز از مش درون‌یاب نقاط می‌باشد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت اگرچه افزودن خاصیت درون‌یابی به روش EFG کمی از دقت روش در محاسبه‌ی تنش‌ها با تعداد گره کم می‌کاهد لکن اولا با افزایش تعداد گره‌ها این کاهش دقت جبران می‌شود و ثانیا با تعداد گره یکسان روش اصلاح شده‌ی مورد ارزیابی قرار گرفته دقت بیشتری از روش المان محدود و روش بی‌نیاز از مش درون‌یاب نقاط خواهد داشت. البته روش اصلاح شده‌ی EFG همچنان به هزینه‌ی زمانی بیشتری نسبت به سایر روش‌های اشاره شده دارد.



شکل ۹- مقایسه‌ی مقادیر تنش در عمق تیر ($x=L/2$) (الف) مولفه‌ی xx تنش (ب) مولفه‌ی xy تنش



شکل ۱۰- مقایسه‌ی مقادیر تنش برشی در عمق تیر ($x=L/2$)، تعداد گره به کار رفته در مدل ۱۷۵ گره

۴- نتیجه گیری

در این مقاله برای نخستین بار به بررسی و ارزیابی کاربرد و کارآیی روش اصلاح شده‌ی بی‌نیاز از المان گالرکین برای حل مسائل در کل دامنه (و نه در روش‌های المان مرزی) پرداخته شده است. روش اصلاحی به کار رفته، خاصیت درون‌یابی را به توابع شکل MLS مورد استفاده قرار گرفته در روش، می‌افزاید و به این توابع شکل اجازه می‌دهد خاصیت دلتای کرونیکر را ایفا کنند. بر اساس بررسی‌های انجام گرفته مشاهده شد که

اصلاح صورت گرفته باعث بروز دو مشکل اساسی در روش مبنای EFG نسبت به حالت اولیه شده است. اولین مشکل کاهش دقت روش EFG در محاسبه مقادیر تنش می‌باشد. البته این مشکل با افزایش درجات آزادی به کار گرفته شده بر طرف خواهد شد. اگرچه روش اصلاح شده به ویژه در محاسبه‌ی تغییر مکان‌ها با تعداد گره کم نیز همچنان دقت مناسبی دارد اما افزایش خطای مشاهده شده در محاسبه‌ی تنش‌ها ملموس می باشد. دومین مشکل مشاهده شده افزایش هزینه‌ی زمانی در روش اصلاح شده به نسبت روش مبنای EFG می‌باشد. در روش اصلاح شده لازم است برای هر نقطه‌ی انتگرال گیری ماتریس تبدیل T برای تمام گره‌های موجود در دامنه‌ی حمایتی مربوطه احیاء شود که همین امر موجب افزایش قابل ملاحظه‌ی هزینه‌ی زمانی در روش اصلاح شده می‌گردد. با تمام این وجود افزودن خاصیت دلتای کرونیکر به توابع شکل مورد استفاده، روش اصلاح شده را قادر به اعمال مستقیم شرایط مرزی اساسی و طبیعی می سازد و از روش‌هایی مانند ضرائب لاگرانژ یا پنالتی برای اعمال شرایط مرزی استقلال می‌بخشد. همچنین خاصیت درون‌یابی روش، امکان استفاده از آن را در روش‌های ترکیبی مانند زیرسازه‌ها آسان‌تر می‌سازد. همان‌طور که گفته شد خطای مشاهده شده در محاسبه‌ی تنش‌ها، با افزایش درجات آزادی سیستم قابل رفع می‌باشد. در مقایسه‌ای که میان روش اصلاح شده‌ی EFG با روش‌های المان محدود و روش بی‌نیاز از مش درون‌یاب نقاط انجام شد، مشاهده گردید که روش اصلاح شده‌ی EFG دقت به مراتب بالاتری را در محاسبه‌ی مقادیر تنش نسبت به دو روش ذکر شده تامین می‌کند.

منابع

1.Liu GR, Gu YT. An introduction to meshfree methods and their programming. Springer Science and Business Media. 2005 Dec 5.

2.Belytschko T, Lu YY, Gu L. Element-free Galerkin methods. International journal for numerical methods in engineering. 1994 Jan 30;37(2):229-56. doi.org/10.1002/nme.1620370205

3.Liu GR, Gu Y. A point interpolation method for two-dimensional solids. International journal for numerical methods in engineering. 2001;50(4):937-51. doi.org/10.1002/1097-0207

4.Deeks AJ, Augarde CE. A meshless local Petrov-Galerkin scaled boundary method. Computational Mechanics. 2005;36:159-70. doi.org/10.1007/s00466-004-0649-y

5.He Y, Yang H, Deeks AJ. An Element-free Galerkin (EFG) scaled boundary method. Finite Elements in Analysis and Design. 2012;62:28-36. 10.1016/j.finel.2012.07.001

6.Bazyar MH, Talebi A. Transient seepage analysis in zoned anisotropic soils based on the scaled boundary finite-element method. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. 2015;39(1):1-22. doi.org/10.1002/nag.2291

7.LI F. Scaled boundary finite-element method for seepage free surfaces analysis. Chinese Journal of Computational Physics. 2009;26(5):665.

8.Song C, Wolf JP. The scaled boundary finite-element method–a primer solution procedures. Computers and Structures. 2000;78(1-3):211-25. doi.org/10.1016/S0045-7949(00)00100-0

9.Song C, Wolf JP. Body loads in scaled boundary finite-element method. Computer methods in applied mechanics and engineering. 1999;180(1-2):117-35. doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00052-3

10.Hajialilue-Bonab M, Tohidvand HR. A modified scaled boundary approach in frequency domain with diagonal coefficient matrices. Engineering Analysis with Boundary Elements. 2015;50:8-18. doi.org/10.1016/j.enganabound.2014.07.001

11.Deeks AJ, Augarde CE. A meshless local Petrov-Galerkin scaled boundary method. Computational Mechanics. 2005; 36:159-70. doi.org/10.1007/s00466-004-0649-y

12.He Y, Yang H, Deeks AJ. An Element-free Galerkin (EFG) scaled boundary method. Finite Elements in Analysis and Design. 2012; 62:28-36. doi.org/10.1016/j.finel.2012.07.001

13.Chen SS, Wang J, Li QH. Two-dimensional fracture analysis of piezoelectric material based on the scaled boundary node method. Chinese Physics B. 2016;25(4):040203. doi.org/10.1088/1674-1056/25/4/040203

14.Chen SS, Li QH, Liu YH. A scaled boundary node method applied to two-dimensional crack problems. Chinese Physics B. 2012; 21(11):110207. doi.org/10.1088/1674-1056/21/11/110207

15.Hajiazizi M, Graili A. A scaled boundary radial point interpolation method for 2-D elasticity problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2017;112(7):832-51. doi.org/10.1002/nme.5534

16.Timoshenko S. History of strength of materials: with a brief account of the history of theory of elasticity and theory of structures. Courier Corporation; 1983.

بررسی کارایی روش اصلاح شده‌ی بی‌نیاز از المان گالرکین در حل مسائل استاتیکی و به‌سازی

علی زارع
گروه مهندسی عمران، واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران
رامین وفایی پورسرخابی*
گروه مهندسی عمران، واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران
مرکز تحقیقات رباتیک و فناوری های نرم، واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران
علیرضا علیزاده مجد
گروه مهندسی عمران، واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران
مرکز تحقیقات رباتیک و فناوری های نرم، واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران
فریبا بهروز سرند
گروه مهندسی عمران، واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران
raminvafaei@yahoo.com

تاریخ دریافت : ۲۰ اسفند ۱۴۰۱ تاریخ پذیرش: ۰۵ تیر ۱۴۰۲

چکیده

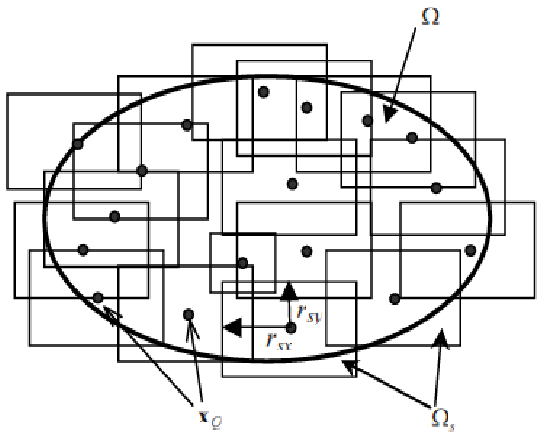
روش اجزای محدود (FEM) به طور گسترده‌ای در تحقیقات پیشین مورد استفاده قرار گرفته است. اگرچه روش اجزای محدود دقت کافی در تخمین مقادیر تغییرشکل و جابجایی‌ها دارد، اما محاسبه میدان تنش توسط این روش از دقت پایینی برخوردار است. در این مقاله روش بدون المان گالرکین (EFG) اصلاح شده برای حل مسائل الاستوستاتیک به صورت عددی پیشنهاد شده و مورد استفاده قرار گرفته است. برای توضیح ساده‌تر روابط پیشنهادی، ابتدا یک میله‌ی الاستیک یک بعدی در نظر گرفته شده است که تحت نیروی حجمی با تغییرات خطی در طول میله می‌باشد. مقایسه‌ای میان روش اصلی گالرکین بدون المان، روش گالرکین بدون المان اصلاح شده و راه حل دقیق برای بررسی دقت، کارایی و هزینه زمانی مورد نیاز انجام شده است. مطالعه‌ی ارائه شده نشان می‌دهد که روش‌های ذکر شده دارای دقت یکسانی هستند، اما روش اصلاح شده EFG در مقایسه با روش‌های دیگر نیاز به هزینه زمانی بیشتری برای حل مسائل با تعداد زیادی درجه آزادی دارد. پاسخ‌های روش گالرکین اصلاح شده و بدون المان اصلاح نشده با پاسخ های تحلیلی تیموشنکو برای خمش یک تیر الاستیک مقایسه شده است. این مقایسه نشان می دهد که روش‌های اصلاح شده و اصلی تطابق بسیار خوبی با روش‌های تحلیلی در محاسبه مقادیر جابجایی‌ها دارند. با وجود یکسانی دقت در تخمین جابجایی‌ها، محاسبه میدان تنش نشان می‌دهد که روش اصلاح شده دقت کمتری نسبت به روش اصلی دارد. نشان داده شده است که با افزایش تعداد درجات آزادی، دقت روش اصلاح شده برای تخمین میدان تنش بهبود می‌یابد. با این حال، روش اصلاح‌شده EFG نسبت به روش‌های دیگر زمان‌برتر است. بر اساس تمام نتایج فوق، روش گالرکین بدون المان اصلاح شده را می‌توان به عنوان یک روش قدرتمند بدون شبکه مبتنی بر حداقل مربعات متحرک که دارای توابع شکل با خواص درون یابی است معرفی کرد. برخورداری از توابع شکل درونیاب در این روش ترکیب آن را با سایر روش‌های عددی مقدور ساخته و اعمال شرایط مرزی را با هزینه محاسباتی کمتر مقدور می‌سازد. نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که خطای محاسبات جابجایی در روش ارائه شده حداکثر به میزان ۵٪ نسبت به روش حل تحلیلی بوده است. همچنین میزان حداکثر خطا در روش ارائه شده برای تخمین تنش‌ها برابر با ۱۵٪ بوده است.

کلید واژگان: روش گالرکین، کمترین مربعات متحرک، مدلسازی عددی.

فصلنامه علمی
آنالیز سازه-زلزله
دوره ۲۰، شماره ۳، پاییز ۱۴۰۲

۱-مقدمه

طراحی سیستم‌های مهندسی پیشرفته نیازمند استفاده از ابزارهای یاری‌رسان رایانه‌ای طراحی می‌باشد. در این ابزارها، تکنیک‌های شبیه‌سازی به صورت کلی برای مدل‌سازی و تحقیق در مورد یک پدیده‌ی فیزیکی استفاده می‌شود. این شبیه‌سازی نیازمند حل معادلات دیفرانسیل یا معادلات دیفرانسیل جزئی پیچیده‌ی حاکم بر آن پدیده‌ها است. در روش‌های وابسته به شبکه، دامنه‌ی فضایی مسئله به صورت مش‌های پاره‌سازی شده تعریف می‌شوند. مش باید حاوی تعریف رابطه‌ای میان گره‌ها باشد. با تعریف مش مناسب و اعمال اصول مقتضی، معادلات دیفرانسیل پیچیده را می‌توان با مجموعه‌ای از معادلات جبری تقریب زد. با سرهم‌بندی مجموعه معادلات جبری برای تمام مش‌ها، سیستم معادلات جبری برای کل دامنه‌ی مسئله بدست می‌آید. از جمله روش‌های وابسته به شبکه (مش[1]) می‌توان به روش المان محدود ، المان مرزی ، المان محدود مرزی مقیاس شده و المان گسسته اشاره کرد. روش‌های بی‌نیاز از مش از معادلات جبری برای کل دامنه‌ی مسئله استفاده می‌کنند بدون آنکه از مش‌های از پیش تعریف شده استفاده کنند[۱]. این روش‌ها از مجموعه‌ای از گره‌های پخش شده در دامنه‌ی مسئله و مرز آن برای تعریف و نه پاره سازی دامنه و مرز استفاده می‌کنند. تفاوت اساسی میان روش‌های بی‌نیاز از شبکه و روش‌هایی مانند روش المان محدود در نحوه‌ی ایجاد توابع شکل می‌باشد. در روش المان محدود، توابع شکل با استفاده از المان‌ها ایجاد می‌شوند و برای تمام المان‌های مشابه توابع شکل مشابه خواهند بود. در روش‌های بی‌نیاز از مش توابع شکل هر نقطه متفاوت از دیگر نقاط می‌باشد. در ضمن، ساخت این توابع شکل در حین تحلیل ایجاد می‌شود و نه قبل از آن. در اکثر روش‌های بی‌نیاز از مش از تقریب کمترین مربعات متحرک[2] (MLS) به جای درون‌یابی چند نقطه‌ای استفاده می‌شوند. توابع شکل ساخته شده در این روش دقت بیشتری داشته و حتی برای مدل‌سازی محیط‌های انحناءدار بسیار موثرتر از توابع شکل معمولی هستند[۲]. علی‌رغم این مزایا توابع شکل MLS خاصیت مهم دلتای کرونیکر را ندارند، بنابراین برای اعمال شرایط مرزی اساسی و طبیعی نیاز به کار محاسباتی بیشتری می‌باشد. به طورکلی می‌توان گفت روش‌های بی‌نیاز از مش نسبت به روشی مانند المان محدود پر هزینه‌تر می‌باشد[۱]. البته باید توجه کرد که هزینه‌ی اضافی روش‌های بی‌نیاز از مش مربوط به رایانه بوده و زمان صرف شده در این روش توسط کاربر آموزش دیده (که امروزه مهمتر از زمان مصرفی توسط رایانه است) کمتر می‌باشد. یکی از ویژگی‌های بسیار مثبت روش‌های بی‌نیاز از مش، پیوستگی میدان تنش محاسباتی می‌باشد. در این روش‌ها، گره‌های به کاررفته برای ساخت تابع شکل یک نقطه‌ی انتگرال‌گیری توسط دامنه‌ی حمایتی مشخص می شود. برای نقاط مختلف، دامنه‌های حمایتی می‌توانند درهم تنیدگی داشته باشند. شکل ۱، نمونه‌ای از دامنه‌های حمایتی مستطیلی شکل را نشان می‌دهد[۱].



شکل ۱- دامنه‌های حمایتی در روش بی‌نیاز از مش

از انواع مختلف روش‌های بی‌نیاز از مشی که تاکنون ارائه شده اند می توان به موارد ذکر شده در جدول ۱، اشاره کرد. تفاوت عمده‌ی روش‌های ارائه شده در جدول فوق، در نحوه‌ی ایجاد توابع شکل و در نتیجه نحوه‌ی اعمال شرایط مرزی اساسی و طبیعی می‌باشد. تنها در روش درون‌یابی نقاط[3] (PIM) توابع شکل ایجاد شده خاصیت دلتای کرونیکر خواهند داشت[۲]. البته روش درون‌یابی نقاط نیز دارای مشکلات ریاضی در ایجاد توابع شکل می‌باشد[۳]. شاید بتوان گفت روش بی‌نیاز از المان گالرکین که توسط بلیتسکو و همکاران[4] [۲]، ارائه گردیده است پر کاربردترین روش در میان روش‌های بی‌نیاز از مش می‌باشد. این روش در مقایسه با روش المان محدود دارای دقت بیشتر، همگرایی سریع‌تر، پاسخ تنش نرم‌تر می‌تواند باشد[۴]. توابع شکل در روش بی‌نیاز از المان گالرکین[5]، با استفاده از تقریب کمترین خطای مربعات ایجاد می‌شوند و همانطور که پیش‌تر گفته شد این توابع شکل فاقد خاصیت دلتای کرونیکر می‌باشند. در سال ۲۰۱۲، روشی اصلاحی برای افزودن خاصیت درون‌یابی به توابع شکل روش بی‌نیاز از المان گالرکین برای کاربرد در روش المان محدود مرزی مقیاس شده، پیشنهاد گردیده است [۵].

1 Mesh
2 Moving least squares
3 Point interpolation method
4 Belytschko et al.
5 Galerkin

جدول ۱- روش‌های مهم بی‌نیاز از مش و ارائه دهندگان‌آن‌ها

ارائه دهنده و سال ارائه	نام روش
Belytschko(۱۹۹۴)	روش بی‌نیاز از المان گالرکین (EFG)
Alturi(۱۹۹۸)	روش بی‌نیاز از مش موضعی پتروف گالرکین (MLPG)
Lucy(۱۹۷۷)	هیدرودینامیک ذرات نرم (SPH)
Liu(۱۹۹۹)	روش درون‌یابی نقاط (PIM)

روش مرز مقیاس شده، با استفاده از المان گالرکین در حل مسائل استاتیکی در گذشته برای پرداختن به مسائل مختلف مورد استفاده قرار گرفته است. این تکنیک، برای تجزیه و تحلیل نشت [۶ و۷]، ایستایی [۸ و ۹] و مسائل دینامیکی [۱۰ و ۱۱] استفاده شده است. بر اساس رویکرد محلی پتروف-گالرکین[6] بدون شبکه و رویکرد گالرکین بدون عنصر، دیکس و اوگارد[7] [۱۲] و اِو[8] و همکاران[۱۳] دو نسخه بدون مش از روش مرزی مقیاس شده ارائه کردند. این تکنیک‌ها، نتایج خود را با استفاده از تقریب MLS فرموله می‌کنند. این مطالعات روش جدیدی را برای اصلاح توابع شکل MLS معرفی کرده اند زیرا استفاده از تقریب MLS در ساخت توابع شکل منجر به توابع غیر درون یابی می شود. حتی اگر توابع شکل MLS درون یابی با روش جدید ارائه می شود، روش‌های بدون مش مرز مقیاس را که قبلاً ذکر شد بسیار کُند و زمان بَر می‌کند. چندین محقق اخیراً از روش مرزی مقیاس شده مبتنی بر درونیابی نقطه شعاعی برای حل مسائل مهندسی استفاده کرده اند. RPISBM برای بررسی مشکلات الاستو استاتیک دو بعدی [۱۴] ، مشکلات تَرَک [۱۵] و تجزیه و تحلیل شکست مواد پیزوالکتریک [۱۶] استفاده کرده‌اند. مطالب مندرج در این مقاله بدین شرح زیر است که، ابتدا نحوه‌ی تشکیل توابع شکل در روش اصلاح شده‌ی بی‌نیاز از المان گالرکین توضیح داده شده است سپس به بررسی نتایج بدست آمده پرداخته شده است. در نهایت نتیجه‌گیری از نتایج حاصله ارائه گردیده است.

۲- توابع شکل در روش اصلاح شده‌ی EFG

روش تقریب کمترین مربعات متحرک در برازش داده‌ها توسط یک منحنی کاربرد دارد. در این بخش به صورت مختصر مروری بر نحوه‌ی فرمول‌بندی و محاسبه‌ی تابع شکل نقاط در روش بی‌نیاز از المان گالرکین توسط روش کمترین مربعات متحرک خواهد شد و پس از آن به بیان نحوه ی اصلاح این توابع شکل پرداخته خواهد شد. خواننده‌ی علاقه‌مند به آشنایی بیشتر با روش EFG و نحوه‌ی برنامه‌نویسی این روش می‌تواند به مراجع [۲-۶]، مراجعه کند. اگر یک تابع مکانی دو بعدی مانند u(x) داشته باشیم، این تابع مکانی را به صورت تقریبی با استفاده از پایه‌های چند جمله‌ای به صورت زیر می‌توان بیان کرد.

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^{m} p_i(x)\, a_i = P^T a \qquad (۱)$$

در رابطه‌ی فوق m تعداد پایه‌ها، P بردار توابع پایه‌ای و a بردار ضرائب مجهول می‌باشد. برای تعیین ضرائب مجهول n گره باید در دامنه‌ی حمایتی نقطه‌ی مورد نظر انتخاب شود. باید توجه داشت که همواره تعداد نقاط موجود در دامنه‌ی حمایتی بایستی از تعداد ضرائب مجهول بیشتر باشد. برای تمام گره‌های موجود در دامنه‌ی حمایتی نقطه‌ی مورد نظر می توان نوشت:

$$U_s = (P_m)_{m\times n} a_{n\times 1} \qquad (۲)$$

در رابطه‌ی فوق P_m ماتریس ممان بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$P_m = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & p_m(x_1) \\ 1 & x_2 & \cdots & p_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & p_m(x_n) \end{bmatrix} \qquad (۳)$$

حال هدف حداقل کردن مربعات وزن‌دار تفاوت میان جواب تقریبی و جواب دقیق (رابطه‌ی ۴) برای تعیین ضرائب مجهول a می‌باشد.

$$J = \sum_{i=1}^{n} w_i [u^h(x_i) - u(x_i)]^2 \qquad (۴)$$

در رابطه‌ی فوق w تابع وزن می‌باشد. به عنوان مثال می‌توان از رابطه‌ی زیر برای تعیین تابع وزن استفاده کرد.

$$w(r) = \begin{cases} 1 - 6{r_i}^2 + 8{r_i}^3 - 3{r_i}^4 & 0 \le r_i \le 1 \\ 0 & r_i > 1 \end{cases} \qquad (۵)$$

در این رابطه r اندازه‌ی دامنه‌ی گرهی بوده و به صورت زیر محاسبه می شود:

$$r_i = \beta . ds \qquad (۶)$$

کنترل اندازه‌ی دامنه‌ی گرهی توسط کمیت بدون بعد β انجام می‌پذیرد.

برای یافتن حداقل مقدار وزن‌دار مربعات تفاضل میان پاسخ دقیق و پاسخ تقریبی (رابطه‌ی ۴) مشتق J باید برابر صفر قرار داده شود:

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 0 \qquad (۷)$$

پاسخ بدست آمده برای رابطه‌ی فوق، با استفاده از رابطه‌ی ۴ و رابطه‌ی ۲ به صورت زیر خواهد بود.

6 Petrov-Galerkin
7 Deeks and Augarde
8 He et al.

$$P_m{}^T w P_m a = P_m{}^T w U_s \qquad (۸)$$

برای ساده‌سازی رابطه‌ی فوق ماتریس‌های ضریبی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A = P_m{}^T w P_m \qquad (۹)$$

$$B = P_m{}^T w \qquad (۱۰)$$

حال رابطه‌ی ۸ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$a = A^{-1} B U_s \qquad (۱۱)$$

با جایگذاری رابطه‌ی فوق در رابطه‌ی ۱ مقادیر متغیر مکانی تقریبی گرهی به صورت زیر حاصل خواهد شد:

$$u^h = P^T A^{-1} B U_s \qquad (۱۲)$$

با توجه به تعریف تابع شکل و با استفاده از رابطه‌ی ۱۲، توابع شکل کمترین مربعات متحرک به صورت زیر تعریف می‌گردند.

$$\varphi^T = P^T A^{-1} B \qquad (۱۳)$$

همان‌طور که پیش‌تر گفته شد، توابع شکل MLS فاقد خاصیت درون‌یابی و بالتبع خاصیت تابع دلتای کرونیکر می‌باشند. حال به بررسی روش اصلاحی پیشنهاد شده پرداخته می‌شود. با توجه به تعریف تابع شکل، رابطه ی میان میدان تقریبی متغیر مکانی با مقادیر گرهی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\{u_z\} = \begin{bmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{bmatrix} \{Uz\} \qquad (۱۴)$$

ماتریس مربع $n \times n$ توابع شکل MLS در نقاط گرهی را ماتریس تبدیل نامیده شده و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\{T\} = \begin{bmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{bmatrix} \qquad (۱۵)$$

حال با جایگذاری رابطه‌ی ۱۵ در رابطه‌ی ۱۳ خواهیم داشت:

$$u^h = P^T A^{-1} B T^{-1} u_s = \phi^T u_s \qquad (۱۶)$$

در رابطه‌ی فوق φ ماتریس توابع شکل MLS اصلاح شده می‌باشد که دارای خاصیت درون‌یابی و تابع دلتای کرونیکر می‌باشد. در محاسبه‌ی ماتریس سختی لازم است مشتقات توابع شکل نیز محاسبه شوند. برای بدست آوردن مشتقات توابع شکل از رابطه‌ی زیر استفاده خواهد شد.

$$\phi,_i{}^T = \varphi,_i{}^T \, T^{-1} \qquad (۱۷)$$

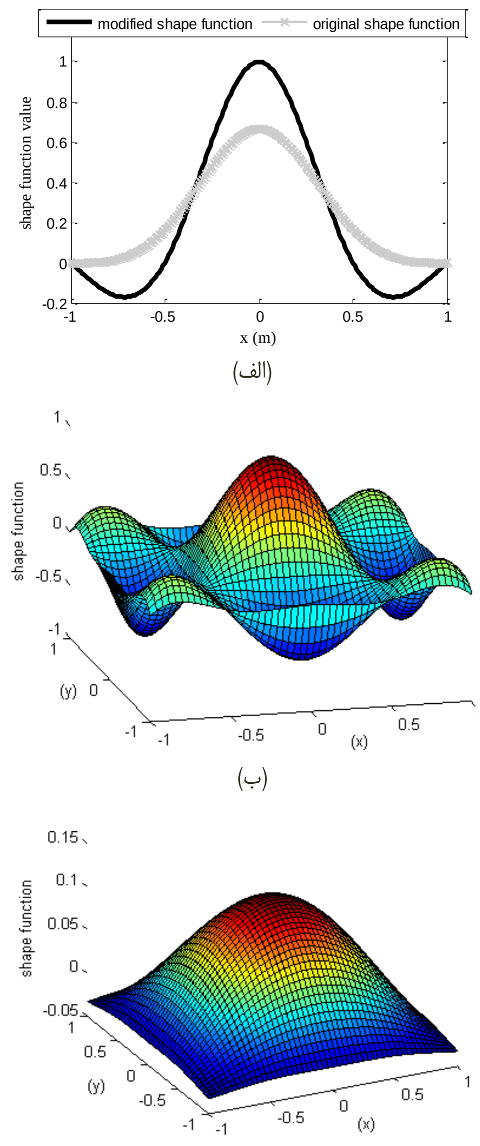
فلوچارت محاسبه‌ی توابع شکل اصلاح شده‌ی MLS به صورت زیر می باشد. با افزوده شدن خاصیت درون یابی به توابع شکل ایجاد شده، دیگر عملیات اضافی و تقریبی ضرائب لاگرانژ[9] یا ضریب پنالتی لازم نخواهد بود. در این حالت، شرایط مرزی اساسی و طبیعی را می‌توان مستقیما در مسئله دخالت داد. محاسبه‌ی ماتریس تبدیل T برای گره‌های موجود در دامنه‌ی حمایتی نقطه‌ی گاوسی مورد نظر باعث افزایش هزینه‌ی زمانی روش خواهد گردید. میزان این افزایش هزینه‌ی زمانی در بخش بعدی مورد ارزیابی قرار گرفته‌است. در نهایت در آخرین بحث مربوط به این بخش از مقاله، توابع‌شکل اصلاح شده و اصلاح نشده‌ی MLS در حالت یک بعدی و دو بعدی برای المان‌های به ترتیب پنج و بیست و پنج گرهی و برای گره مرکزی، به منظور ایجاد درکی مناسب تر در شکل ۳، رسم گردیده‌اند.

شکل ۲- فلوچارت محاسبه‌ی تابع شکل درون‌یاب MLS

البته این نکته در مورد شکل فوق لازم به ذکر است که تابع شکل در حالت یک بعدی با فرض قرار گرفتن تمان نقاط در دامنه‌ی حمایتی رسم شده است در حالی که در حالت دو بعدی d_{max} برابر ۴ فرض شده است.

[9] Lagrange

فصلنامه علمی آنالیز سازه - زلزله
دوره ۲۰، شماره ۳، پاییز ۱۴۰۲

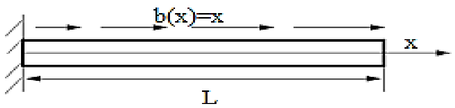


(ج)

شکل ۳- الف، مقایسه‌ی تابع شکل یک بعدی اصلاح شده و نشده‌ی MLS، المان ۵ گرهی، رسم برای گره مرکزی، ب، تابع شکل دوبعدی اصلاح شده‌ی MLS برای گره مرکزی از المان ۲۵ گرهی، ج، تابع شکل دوبعدی اصلاح نشده‌ی MLS برای گره مرکزی از المان ۲۵ گرهی.

۳- بحث و نتیجه گیری

در بخش نتایج این مقاله دو عامل در بررسی کاربرد و کارآیی روش اصلاح شده‌ی بدون المان گالرکین مدنظر قرار گرفته‌است. دقت و میزان خطای جواب‌های بدست آمده و زمان لازم برای حل مسائل دو عامل اساسی مورد ارزیابی قرار گرفته می‌باشند. در این بخش ابتدا به مقایسه‌ی میان روش اصلاح شده و روش اصلی بی‌نیاز از المان گالرکین در حل مسائل یک بعدی پرداخته می‌شود. شکل ۴ مسئله‌ی مورد ارزیابی قرار گرفته، یک میله‌ی یک بعدی با طول واحد تحت اعمال نیروی حجمی خطی با شدت x را نشان می‌دهد. از جابه‌جایی میله در انتهای سمت چپ میله جلوگیری شده و انتهای سمت راست میله از اعمال نیروی سطحی مبرا است. میله‌ی مفروض دارای سطح مقطع ثابت با مقدار واحد بوده و ضریب ارتجاعی آن نیز واحد فرض شده است.

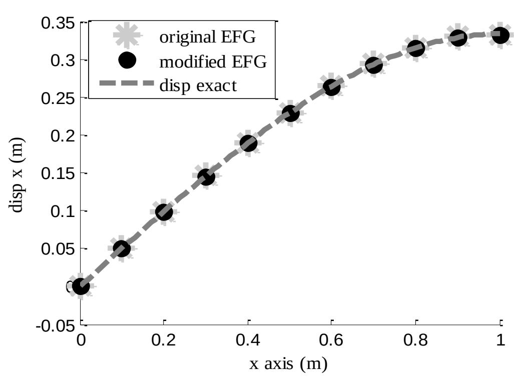


شکل ۴- میله‌ی الاستیک یک بعدی تحت بار حجمی خطی

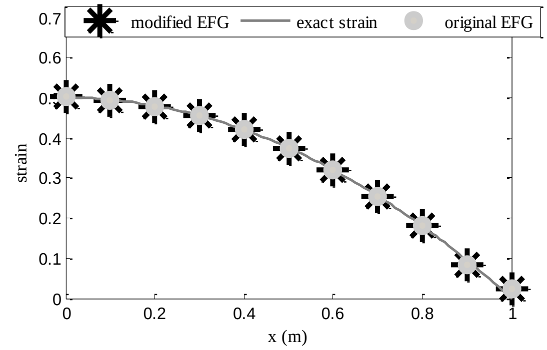
پاسخ دقیق تحلیلی برای این مسئله به صورت زیر می‌باشد:

$$u(x)=\frac{1}{E}\left(0.5x-\frac{x^3}{6}\right) \qquad (۱۸)$$

این پاسخ برای تعیین دقت روش عددی به کار رفته مورد استفاده قرار خواهد گرفت. با اعمال روش بی‌نیاز از المان گالرکین اصلاح شده و اصلاح نشده پاسخ بدست آمده به صورت شکل ۵، خواهد بود. همان‌طور که شکل ۵، نشان می‌دهد در مسئله‌ی مفروض یک بعدی حل شده، دو روش اصلاح شده و اصلاح نشده‌ی بدون المان گالرکین تقریبا دقتی معادل هم دارند. به عبارت دیگر استفاده از روش ضرائب لاگرانژ در حالت اصلاح نشده دقت چندانی از روش نکاسته است. همچنین با بررسی انجام شده دیده می‌شود که به ازای ۱۱ گره در مدل مفروض ($dx=0.1$)، روش اصلاح شده ۰/۰۸۳ ثانیه و روش اولیه ۰/۱۸۳ ثانیه زمان برای پردازش نیاز دارد. با افزایش تعداد گره‌ها به ۱۰۱ گره ($dx=0.01$) دیده شد که روش اصلاح شده در ۱/۵۹ ثانیه و روش اولیه در ۰/۶۴ ثانیه پردازش شد. با توجه به این که در حالت یک بعدی فرض شد تمام گره‌ها در دامنه‌ی حمایتی نقطه ی مورد نظر می‌باشند، این افزایش زمان در روش اصلاح شده با توجه به تشکیل ماتریس تبدیل T در هر گام انتگرال گیری عددی طبیعی به نظر می‌رسد. در مسئله دوبعدی که در سطور بعدی مورد ارزیابی قرار گرفته است، تاثیر نوع تابع شکل به زمان مورد نیاز برای پردازش در دو روش اصلاح‌شده و اصلاح‌نشده مجدداً، مورد بررسی قرار گرفته است.



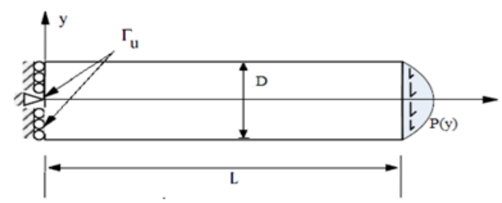
(الف)



(ب)

شکل ۵- مقایسه‌ی میان روش‌های حل تحلیلی، بی‌نیاز از المان اصلاح شده و بی‌نیاز از المان اصلاح نشده (الف) برای جابه‌جایی (ب) برای کرنش در طول میله

برای بررسی مسائل دو بعدی، حل مسئله‌ی تیر تیموشنکو مورد ارزیابی قرار گرفته است. تیری با طول ۴۸ و ارتفاع ۱۲، متر و عمق واحد در نظر گرفته می‌شود. مدول الاستیک تیر برابر ۱۰۷×۳ و ضریب پواسون تیر برابر ۰/۳ در نظر گرفته‌شده است. مطابق شکل ۶، یک بار سهموی به بزرگی ۱۰۰۰ در انتهای راست تیر وارد و شرایط تکیه‌گاهی مشخصی در انتهای سمت چپ تیر اعمال شده‌است.



شکل ۶- تیر طره‌ای در نظر گرفته شده برای مسئله‌ی دوبعدی

پاسخ تحلیلی ارائه شده توسط تیموشنکو[10] [۱۷]، برای جابه‌جایی قائم و افقی به صورت روابط ۱۹ و ۲۰، می‌باشد.

$$u_x = -\frac{py}{6EI}\left((6L-3x)x + (2+v)\left(y^2 - \frac{D^2}{4}\right)\right) \quad (۱۹)$$

$$u_y = \frac{p}{6EI}\left(3vy^2(L-x) + (4+5v)\frac{D^2x}{4} + (3L-x)x^2\right) \quad (۲۰)$$

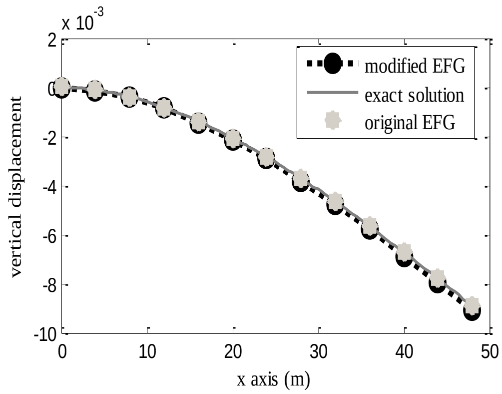
در این روابط، I ممان اینرسی تیر می‌باشد. تیموشنکو همچنین روابط تحلیلی ۲۱ تا ۲۳، را برای محاسبه‌ی تنش‌های مرتبط با جابه‌جایی‌های فوق، ارائه کرده‌است.

$$\sigma_x = -\frac{P(L-x)y}{I} \quad (۲۱)$$

$$\sigma_Y = 0 \quad (۲۲)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{Py}{2I}\left(\frac{D^2}{4} - y^2\right) \quad (۲۳)$$

برای انتگرال‌گیری عددی در هر سلول انتگرال‌گیری از نقاط و وزن‌های ۴×۴ کوادراتور گاوس–لژاندر استفاده شده است. از پایه‌های چند جمله‌ای خطی در هر دو روش اصلاح شده و اصلاح نشده استفاده شده‌است. فاصله ی گره‌ها در جهت افقی ۴ و در جهت قائم ۲ در نظر گرفته شده‌است (تعداد ۹۱ گره مورد استفاده قرار گرفته است). جابه‌جایی قائم حاصله بر روی تار خنثی تیر به صورت شکل ۷، می‌باشد.



شکل ۷- جابه‌جایی قائم تار خنثی در تیر طره‌ای مفروض

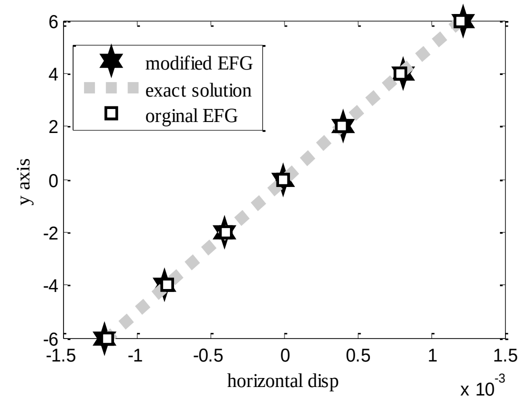
همان‌طور که شکل فوق نشان می‌دهد دو روش اصلاح شده و اصلاح نشده در محاسبه‌ی جابه‌جایی قائم تیر دقت تقریبا یکسانی داشته‌اند اگر چه دقت روش اولیه‌ی EFG با توابع شکل تقریب زننده اندکی بیشتر از روش اصلاح شده می‌باشد. البته لازم به ذکر است که مزایای تابع شکل درون‌یاب مانند سهولت ترکیب روش با سایر روش‌های عددی و اعمال شرایط مرزی ممکن است در برخی موارد بیشتر مورد توجه قرار بگیرد. در ادامه به مقایسه‌ی جواب‌های بدست آمده برای جابه‌جایی افقی روی خط قائم در مکان $x=L/2$ پرداخته شده است. شکل ۸، پاسخ بدست آمده را نشان می‌دهد. این شکل نیز دقتی یکسان برای هر دو روش اصلاح شده و اولیه را نشان می‌دهد.

همانطور که پیش‌تر اشاره شد یکی از مزایای مهم روش EFG در مقایسه با روش المان محدود دقت بیشتر این روش در محاسبه‌ی تنش‌های ایجادی می‌باشد. به منظور اینکه اثر اصلاح روش EFG بر تنش‌های محاسبه شده بررسی شود، مولفه‌ی x و xy تنش در مسئله‌ی تیر تیموشنکو مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. شکل (۹–الف) به مقایسه‌ی مولفه‌ی X تنش محاسبه شده توسط ۳ روش بی‌نیاز از المان به فرم اولیه، بی‌نیاز از المان اصلاح شده و حل تحلیلی تیموشنکو پرداخته شده است. شکل (۹–ب) این مقایسه را برای مولفه‌ی xy تنش ارائه می‌دهد. با توجه به نتایج بدست آمده می‌توان گفت که افزودن خاصیت درون‌یابی به توابع شکل MLS در

[10] Timoshenko

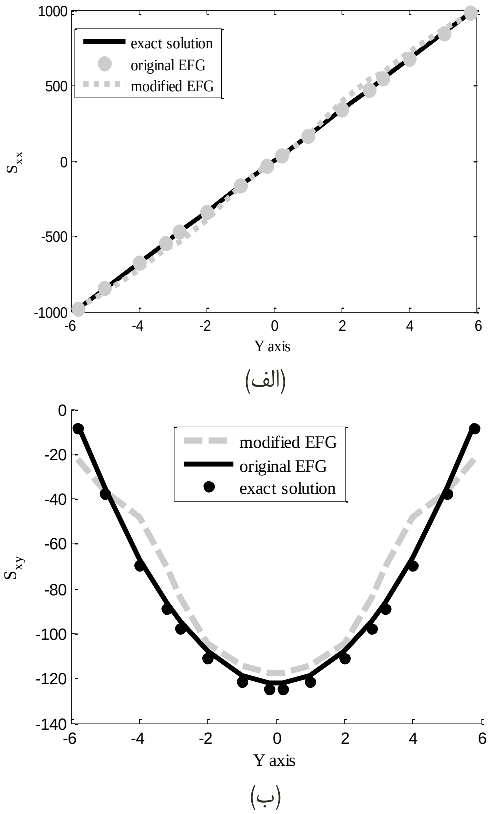
فصلنامه‌علمی
آنالیز سازه-زلزله
دوره ۲۰، شماره ۳، پاییز ۱۴۰۲

روش EFG باعث می‌شود این روش مقداری از دقت خود به ویژه در محاسبه‌ی مقادیر تنش را نسبت به حالت اولیه از دست بدهد. در بررسی های انجام گرفته در این مقاله مشاهده شد که روش اولیه‌ی EFG برای حل مسئله‌ی تیر تیموشنکو با ۹۱ گره، ۳/۸۵۰۹ ثانیه برای پردازش و محاسبه‌ی بردار جابه‌جایی نیاز دارد. روش اصلاح شده‌ی EFG برای مسئله‌ی مشابه نیازمند ۲۱۰ ثانیه زمان برای پردازش می‌باشد. این امر نشان می‌دهد که محاسبه‌ی ماتریس تبدیل T تا چه اندازه هزینه‌ی زمانی روش را افزایش می‌دهد. برای مقایسه‌ی میان روش اصلاح شده‌ی بی‌نیاز از المان گالرکین با روش المان محدود و روش بی‌نیاز از المان درون‌یاب نقاط (RPIM) تعداد گره‌ها را به ۱۷۵ گره افزایش می‌دهیم.

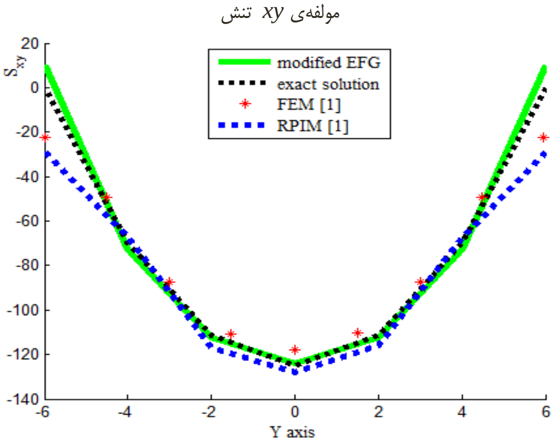


شکل ۸- تغییرات جابه‌جایی افقی در عمق تیر طره‌ای (6>y>6-)، در وسط تیر (x=24)

در این تحلیل به جای $dmax$ =۳/۵ از $dmax$=۳/۸۵ استفاده شده است. نتایج روش المان محدود و بی‌نیاز از المان درون‌یاب نقاط از مرجع [۱]، استخراج شده است. شکل (۱۰) نتایج این بررسی انجام گرفته را نشان می دهد. همان‌طور که شکل ۱۰، نشان می‌دهد با تعداد گره یکسان نتایج روش اصلاح شده‌ی بی نیاز از المان گالرکین بسیار دقیق‌تر از روش المان محدود و روش بی‌نیاز از مش درون‌یاب نقاط می‌باشد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت اگرچه افزودن خاصیت درون‌یابی به روش EFG کمی از دقت روش در محاسبه‌ی تنش‌ها با تعداد گره کم می‌کاهد لکن اولا با افزایش تعداد گره‌ها این کاهش دقت جبران می‌شود و ثانیا با تعداد گره یکسان روش اصلاح شده‌ی مورد ارزیابی قرار گرفته دقت بیشتری از روش المان محدود و روش بی‌نیاز از مش درون‌یاب نقاط خواهد داشت. البته روش اصلاح شده‌ی EFG همچنان به هزینه‌ی زمانی بیشتری نسبت به سایر روش‌های اشاره شده دارد.



شکل ۹- مقایسه‌ی مقادیر تنش در عمق تیر ($x=L/2$) (الف) مولفه‌ی xx تنش (ب) مولفه‌ی xy تنش



شکل ۱۰- مقایسه‌ی مقادیر تنش برشی در عمق تیر ($x=L/2$)، تعداد گره به کار رفته در مدل ۱۷۵ گره

۴- نتیجه گیری

در این مقاله برای نخستین بار به بررسی و ارزیابی کاربرد و کارآیی روش اصلاح شده‌ی بی‌نیاز از المان گالرکین برای حل مسائل در کل دامنه (و نه در روش‌های المان مرزی) پرداخته شده است. روش اصلاحی به کار رفته، خاصیت درون‌یابی را به توابع شکل MLS مورد استفاده قرار گرفته در روش، می‌افزاید و به این توابع شکل اجازه می‌دهد خاصیت دلتای کرونیکر را ایفا کنند. بر اساس بررسی‌های انجام گرفته مشاهده شد که

اصلاح صورت گرفته باعث بروز دو مشکل اساسی در روش مبنای EFG نسبت به حالت اولیه شده است. اولین مشکل کاهش دقت روش EFG در محاسبه مقادیر تنش می‌باشد. البته این مشکل با افزایش درجات آزادی به کار گرفته شده بر طرف خواهد شد. اگرچه روش اصلاح شده به ویژه در محاسبه‌ی تغییر مکان‌ها با تعداد گره کم نیز همچنان دقت مناسبی دارد اما افزایش خطای مشاهده شده در محاسبه‌ی تنش‌ها ملموس می باشد. دومین مشکل مشاهده شده افزایش هزینه‌ی زمانی در روش اصلاح شده به نسبت روش مبنای EFG می‌باشد. در روش اصلاح شده لازم است برای هر نقطه‌ی انتگرال گیری ماتریس تبدیل T برای تمام گره‌های موجود در دامنه‌ی حمایتی مربوطه احیاء شود که همین امر موجب افزایش قابل ملاحظه‌ی هزینه‌ی زمانی در روش اصلاح شده می‌گردد. با تمام این وجود افزودن خاصیت دلتای کرونیکر به توابع شکل مورد استفاده، روش اصلاح شده را قادر به اعمال مستقیم شرایط مرزی اساسی و طبیعی می سازد و از روش‌هایی مانند ضرائب لاگرانژ یا پنالتی برای اعمال شرایط مرزی استقلال می‌بخشد. همچنین خاصیت درون‌یابی روش، امکان استفاده از آن را در روش‌های ترکیبی مانند زیرسازه‌ها آسان‌تر می‌سازد. همان‌طور که گفته شد خطای مشاهده شده در محاسبه‌ی تنش‌ها، با افزایش درجات آزادی سیستم قابل رفع می‌باشد. در مقایسه‌ای که میان روش اصلاح شده‌ی EFG با روش‌های المان محدود و روش بی‌نیاز از مش درون‌یاب نقاط انجام شد، مشاهده گردید که روش اصلاح شده‌ی EFG دقت به مراتب بالاتری را در محاسبه‌ی مقادیر تنش نسبت به دو روش ذکر شده تامین می‌کند.

منابع

1.Liu GR, Gu YT. An introduction to meshfree methods and their programming. Springer Science and Business Media. 2005 Dec 5.

2.Belytschko T, Lu YY, Gu L. Element-free Galerkin methods. International journal for numerical methods in engineering. 1994 Jan 30;37(2):229-56. doi.org/10.1002/nme.1620370205

3.Liu GR, Gu Y. A point interpolation method for two-dimensional solids. International journal for numerical methods in engineering. 2001;50(4):937-51. doi.org/10.1002/1097-0207

4.Deeks AJ, Augarde CE. A meshless local Petrov-Galerkin scaled boundary method. Computational Mechanics. 2005;36:159-70. doi.org/10.1007/s00466-004-0649-y

5.He Y, Yang H, Deeks AJ. An Element-free Galerkin (EFG) scaled boundary method. Finite Elements in Analysis and Design. 2012;62:28-36. 10.1016/j.finel.2012.07.001

6.Bazyar MH, Talebi A. Transient seepage analysis in zoned anisotropic soils based on the scaled boundary finite-element method. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. 2015;39(1):1-22. doi.org/10.1002/nag.2291

7.LI F. Scaled boundary finite-element method for seepage free surfaces analysis. Chinese Journal of Computational Physics. 2009;26(5):665.

8.Song C, Wolf JP. The scaled boundary finite-element method–a primer solution procedures. Computers and Structures. 2000;78(1-3):211-25. doi.org/10.1016/S0045-7949(00)00100-0

9.Song C, Wolf JP. Body loads in scaled boundary finite-element method. Computer methods in applied mechanics and engineering. 1999;180(1-2):117-35. doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00052-3

10.Hajialilue-Bonab M, Tohidvand HR. A modified scaled boundary approach in frequency domain with diagonal coefficient matrices. Engineering Analysis with Boundary Elements. 2015;50:8-18. doi.org/10.1016/j.enganabound.2014.07.001

11.Deeks AJ, Augarde CE. A meshless local Petrov-Galerkin scaled boundary method. Computational Mechanics. 2005; 36:159-70. doi.org/10.1007/s00466-004-0649-y

12.He Y, Yang H, Deeks AJ. An Element-free Galerkin (EFG) scaled boundary method. Finite Elements in Analysis and Design. 2012; 62:28-36. doi.org/10.1016/j.finel.2012.07.001

13.Chen SS, Wang J, Li QH. Two-dimensional fracture analysis of piezoelectric material based on the scaled boundary node method. Chinese Physics B. 2016;25(4):040203. doi.org/10.1088/1674-1056/25/4/040203

14.Chen SS, Li QH, Liu YH. A scaled boundary node method applied to two-dimensional crack problems. Chinese Physics B. 2012; 21(11):110207. doi.org/10.1088/1674-1056/21/11/110207

15.Hajiazizi M, Graili A. A scaled boundary radial point interpolation method for 2-D elasticity problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2017;112(7):832-51. doi.org/10.1002/nme.5534

16.Timoshenko S. History of strength of materials: with a brief account of the history of theory of elasticity and theory of structures. Courier Corporation; 1983.