

## طراحی کنترل کننده مد لغزشی برای ربات تعادلی دو چرخ

احسان عباس نژاد<sup>(۱)</sup> - عباس حریفی<sup>(۲)</sup>

(۱) کارشناس ارشد- دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، گروه برق، دانشگاه هرمزگان

(۲) استادیار- دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، گروه برق، دانشگاه هرمزگان

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۹/۲۵

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۱۲/۱۳

**خلاصه:** امروزه کنترل سیستم‌های مکانیکی نقصان تحریک یکی از مسائل چالش برانگیز مهندسان کنترل شده است. یکی از مثال‌های جذاب این دسته سیستم‌ها، ربات تعادلی دو چرخ می‌باشد که از دو چرخ در موازات هم و یک آونگ معکوس تشکیل شده است. در این پژوهش طراحی کنترل کننده به منظور حرکت بر روی سطح صاف مورد بررسی قرار گرفته است. برای طراحی کنترل کننده، ابتدا معادله دینامیکی سیستم از روش کین استخراج شد. سپس برای ربات تعادلی دو چرخ یک کنترل کننده مد لغزشی برای زاویه چرخش ربات، و با استفاده از سطح لغزشی پیشنهادی یک کنترل کننده مد لغزشی برای کنترل توام موقعیت و زاویه حفظ تعادل طراحی گردید. ویژگی کنترل کننده‌های پیشنهادی این است که همگی بر اساس دینامیک غیرخطی سیستم طراحی شده‌اند. همچنین با در نظر گرفتن حدود عدم قطعیت سیستم به هنگام طراحی، کنترل کننده‌ها نسبت به عدم قطعیت‌های موجود در مسئله مقاوم شده‌اند. مشکل متداول کنترل کننده‌های مد لغزشی پدیده چترینگ می‌باشد که با استفاده از تابع اشباع به جای تابع علامت تا حد زیادی کاهش یافته است. در نهایت مقایسه نتایج شبیه‌سازی کنترل کننده طراحی شده با پاسخ یک کنترل کننده رگولاتور درجه دوم، کارایی کنترل کننده پیشنهادی را تأیید می‌نماید.

**کلمات کلیدی:** تابع اشباع، ربات تعادلی دو چرخ، روش کین، سیستم نقصان تحریک، کنترل مد لغزشی، رگولاتور درجه دو.

## Design of a Sliding Mode Controller for Two-Wheeled Balancing Robot

Ehsan Abbasnejad<sup>(1)</sup> – Abbas Harifi<sup>(2)</sup>

(1) MSc - Department of Electrical & Computer Engineering, Hormozgan University  
e.abn23@gmail.com

(2) Assistant Professor - Department of Electrical & Computer Engineering, Hormozgan University  
abbasharifi@yahoo.com

Nowadays, the control of mechanical systems with fewer inputs than outputs (Under-actuated systems) has become a challenging problem for control engineers. Two-wheeled balancing robots is one of the appealing examples of this category. This type of robot contains two parallel wheels and an inverted pendulum. In this research, designing of controller have been investigated for flat surfaces. For controller design, the extract dynamics of the system has been achieved based on Kane's method. Then for the two-wheeled balancing robot, one sliding mode controller has been designed for yaw angle, and another sliding mode controller has been designed to control both position and pitch angle based on a proposed sliding surface. The main feature of the proposed controllers is that all of controllers have been designed based on the nonlinear dynamics of system. Also, considering the limits of uncertainties while designing systems, the robustness of controllers have been increased. The common problem of sliding mode control is chattering phenomenon that has been greatly reduced using saturation function instead of sign function. Simulation results comparison of the designed controller with a LQR controller, validates the effectiveness of the proposed controller.

**Index Terms:** Two wheeled balancing robot, TWIP, Kane's method, under-actuated system, LQR.

## ۱- مقدمه

سیستم‌هایی که دارای تعداد ورودی کمتر نسبت به درجه آزادی می‌باشند، سیستم‌های نقصان تحریک<sup>۱</sup> نامیده می‌شوند. کنترل سیستم‌های نقصان تحریک یک موضوع محبوب برای محققین است که در گستره وسیعی از علم رباتیک مانند وسایل نقلیه زبردیا، فضاپیماها و غیره مشاهده می‌شود. به منظور کاهش هزینه و وزن، بسیاری از سیستم‌ها را به صورت نقصان تحریک طراحی می‌کنند. همچنین هنگامی که محرک‌های برخی از سیستم‌ها دچار مشکل می‌شوند، به سیستم نقصان تحریک تبدیل می‌گردند. لذا در حال حاضر کنترل سیستم‌های نقصان تحریک یکی از مسایل چالش برانگیز علم کنترل شده است.

ربات تعادلی دو چرخ نیز یک مثال خوب از این دسته سیستم‌ها می‌باشد که می‌توان آن را ترکیبی از یک ربات سیار<sup>۲</sup> و یک سیستم آونگ وارونه<sup>۳</sup> در نظر گرفت. این سیستم شامل تنها دو چرخ در طرفین بدنه می‌باشد که همزمان وظیفه حفظ تعادل و انتقال ربات به مکان مورد نظر را بر عهده دارند. در واقع هدف کنترلی در این گونه ربات‌ها، تعیین مقدار گشتاور چرخ سمت چپ و راست است به گونه‌ای که ربات بتواند بدون از دست دادن تعادل خود از یک نقطه به نقطه دیگر حرکت کند.

پژوهش‌های انجام شده در زمینه ربات تعادلی دو چرخ را می‌توان از دو دیدگاه دسته بندی کرد:

- مکانیزم‌های سیستم ربات تعادلی دو چرخ
- شیوه‌های مختلف کنترل ربات تعادلی دو چرخ

در بحث مکانیزم سیستم، از جمله ربات‌های تعادلی شاخصی که تاکنون تولید شده است، می‌توان به ربات دو چرخ شرکت سگوی<sup>۴</sup> که توسط دین کالمن در سال ۲۰۰۰ ساخته شده اشاره کرد [۱]. کازو یامافوجی<sup>۵</sup> استاد الکترو-ارتباطات در توکیو برای اولین بار ربات آونگ معکوس دو چرخ را در سال ۱۹۸۶ ساخت. یامافوجی یک مدل با یک درجه آزادی که متمرکز بر روی زاویه حفظ تعادل ربات بود ساخت و با استفاده از پایداری رات-هورویتز تعادل ربات را حفظ کرد [۲]. بلکول در سال ۲۰۰۲ توانست با هزینه کمتر و قطعات ساده‌تر، نمونه‌ای مشابه سگوی بسازد. او نمونه ساخته شده‌ی خود را در یک جدول، قطعه به قطعه با سگوی مقایسه می‌کند [۳].

کلارک و همکاران در سال ۲۰۰۵ یک ربات تعادلی شبیه سگوی ارائه کردند. در این پژوهش، مدل ریاضی ربات استخراج شده است. مدل در نرم افزار متلب<sup>۶</sup> شبیه‌سازی و یک کنترل کننده تناسبی-انترگالی-مشتقی (PID)<sup>۷</sup> روی آن اعمال شده است و در نهایت نمونه‌ی واقعی ساخته شده و مورد آزمایش قرار گرفته است [۴]. دیوید اندرسون<sup>۸</sup>، رباتی به نام ان‌بوت را توسعه داد. این ربات از یک ژيروسکوپ و یک شتاب سنج که خروجی آنها با فیلتر کالمن ترکیب شده‌اند، بهره گرفته است [۵]. می‌توان کارهای انجام شده را از نظر نوع کنترل کننده در سه دسته کلی قرار داد. در بسیاری از پژوهش‌های انجام شده و

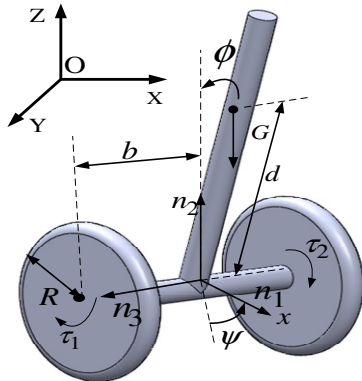
همچنین ربات‌هایی که به صورت عملی ساخته شده‌اند یک مدل خطی برای سیستم در نظر گرفته شده است و یک کنترل کننده خطی طراحی گردیده است. اما با توجه به دینامیک غیرخطی حاکم بر ربات برای بهبود عملکرد آن، در برخی پژوهش‌ها تقریب‌های خطی برای مدل به کار نمی‌رود و کنترل کننده غیرخطی طراحی می‌گردد. در برخی دیگر مقالات کنترل کننده‌های هوشمند برای ربات پیشنهاد گردیده است. لی و همکاران [۶] معادلات دینامیکی را از دو روش لاگرانژ<sup>۹</sup> و کین<sup>۱۰</sup> به دست آورده‌اند. هر دو روش به معادلات مشابهی منجر شده است. بنابراین معادلات دینامیکی مورد استفاده‌ی آن‌ها از اطمینان بالایی برخوردار است. این امر از نقاط قوت این مقاله است. که در پژوهش‌های دیگر کمتر دیده شده است. سپس معادلات دینامیکی، حول نقطه‌ی تعادل خطی شده است و برای حفظ تعادل ربات یک کنترل کننده LQR<sup>۱۱</sup> طراحی شده است. در این مقاله نیز از مدل دینامیکی لی و همکاران استفاده شده است. در [۷] یک کنترل کننده مد لغزشی مرتبه کامل ارائه شده است. در این مقاله معادلات دینامیکی بعد از خطی‌سازی به فضای حالت برده شده و یک کنترل کننده مقاوم برای پایدارسازی و یک کنترل کننده تناسبی برای حذف اغتشاش طراحی شده است. همینطور در [۸] یک کنترل کننده تناسبی-مشتقی<sup>۱۲</sup> مد لغزشی طراحی شده است، که در آن ردیابی مسیر نسبت به کنترل کننده مد لغزشی معمولی بهبود یافته است. در هر دو مقاله [۷] و [۸] خطی‌سازی، عدم ساخت ربات و نداشتن نتایج تجربی را می‌توان از کاستی‌های این پژوهش‌ها به شمار آورد. هوانگ و همکاران<sup>۱۳</sup> [۹] یک ربات تعادلی را به منظور حرکت بر روی سطوح شیب‌دار بررسی کرده‌اند. هر چند این کنترل کننده تعادل ربات را به خوبی حفظ می‌کند، اما با خطای ردیابی در کنترل سرعت ربات مواجه است. با در نظر گرفتن یک سطح لغزشی<sup>۱۴</sup> جدید و طراحی کنترل کننده جدید این نقیصه برطرف شده است. همین طور در [۱۰] یک وسیله نقلیه باریک مبتنی بر تئوری ربات تعادلی دوچرخ و صندلی متحرک، به نام uw-car ساخته شده است. براساس مدل دینامیکی سیستم و روش ترمینال مد لغزشی، دو ترمینال کنترل کننده مد لغزشی برای کنترل سرعت و ترمز گرفتن طراحی شده است. از نقایص این دو مقاله [۹] و [۱۰] می‌توان به این مطلب اشاره کرد که مدل دینامیکی سیستم تنها دارای دو درجه آزادی، زاویه حفظ تعادل و موقعیت ربات می‌باشد و از زاویه چرخش ربات صرف نظر شده است. در بعضی از مقالات از تابع علامت برای ورودی کنترلی استفاده شده است و در بعضی دیگر مقالات از تابع اشباع یا یک تابع پیچیده‌تر به جای تابع علامت برای کاهش چترینگ ورودی استفاده شده است. به عنوان مثال در [۱۱] از تابع  $s/(s+|s|)$  استفاده کرده‌اند. از دیگر مقالات که از کنترل کننده مد لغزشی خطی استفاده کرده‌اند، می‌توان از وو و همکاران<sup>۱۵</sup> [۱۲]، یو وای و همکاران<sup>۱۶</sup> [۱۳] نام برد. به طور خاص، وو و همکاران [۱۲] اغتشاشات خارجی و همچنین اغتشاشات به

می‌شوند که در بیشتر موارد مشتق زمانی مختصات عمومی<sup>۱۹</sup> می‌باشند. سرعت‌ها و شتاب‌های خطی و زاویه‌ای بر حسب سرعت‌های عمومی و مشتقاتشان نوشته می‌شوند. سپس پس از محاسبه سرعت‌های جزیی و قرار دادن آنها در رابطه زیر دینامیک سیستم به دست می‌آید [۲۰]:

$$\sum_{i=1}^N (m_i \bar{v}_i^k \cdot \bar{a}_{Gi} + \bar{\omega}_i^k \cdot \dot{\bar{H}}_{Gi}) = \sum_{i=1}^N (\bar{F}_i \cdot \bar{v}_i^k + \bar{M}_i \cdot \bar{\omega}_i^k) \quad (1)$$

$k = 12, \dots$

که  $m_i$  جرم جسم،  $v_i^k$  سرعت‌های جزیی،  $\bar{a}_{Gi}$  شتاب زاویه‌ای،  $\bar{\omega}_i^k$  سرعت جزیی زاویه‌ای،  $\bar{H}_{Gi}$  اندازه حرکت زاویه‌ای و  $\bar{F}_i$  و  $\bar{M}_i$  نیرو و گشتاوری است، که به جسم  $i$  وارد می‌شود. در رابطه‌ی (۱)،  $N$  تعداد اجسام و  $k$  اندیس مربوط به سرعت‌های عمومی است. برای تحلیل ربات از دستگاه نشان داده شده در شکل (۱)، استفاده می‌شود.



شکل (۱): دستگاه مختصات و فرضیات نیروهای اعمال شده

Fig. (1): Coordinate system of the robot and assumption of exerted forces

در شکل (۱)،  $\tau_1$  و  $\tau_2$  به ترتیب گشتاور چرخ‌های سمت راست و چپ،  $X$  موقعیت،  $\phi$  زاویه حفظ تعادل و  $\psi$  زاویه چرخش ربات می‌باشد. در جدول (۱) مقادیر پارامترهای سیستم آورده شده است [۶].

Table (1): Mechanical parameters of robot [6]

جدول (۱): مقادیر پارامترهای مکانیکی ربات [۶]

0.1 m	فاصله از مرکز جرم تا محور چرخ‌ها	$d$
5 kg	جرم بدنه	$m_s$
$3.679 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$	اینرسی چرخشی بدنه در جهت- $n_2$	$I_2$
$28.07 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$	اینرسی چرخشی بدنه در جهت- $n_3$	$I_3$
0.1 m	نصف فاصله‌ی بین چرخ‌ها	$b$
0.073 m	شعاع چرخ	$R$
0.503 kg	جرم چرخ	$m_c$

نهایتاً، معادلات حرکت به صورت زیر به دست می‌آید:

علت پارامترهای سیستم را برای نشان دادن مقاوم بودن کنترل کننده شبیه سازی کرده‌اند.

کنترل کننده مد لغزشی اغلب با ادغام استراتژی‌های کنترلی دیگر استفاده می‌شود. نصرالله و همکاران [۱۴] از مد لغزشی به عنوان یک حلقه خارجی استفاده کرده‌اند. تسای<sup>۱۷</sup> و همکاران [۱۵] روش گام به عقب و روش کنترل مد لغزشی را با هم ادغام کرده‌اند.

از دیگر کنترل کننده‌های غیرخطی می‌توان به کنترل کننده بر پایه تابع لیاپانف که به وسیله کاسور و همکاران در [۱۶] و [۱۷] طراحی و شبیه سازی شده‌اند نام برد. در انتها طرح پیشنهادی آن‌ها با یک کنترل کننده LQR مقایسه شده است. در این دو مقاله نیز مدل دینامیکی سیستم تنها دارای دو درجه آزادی است. در [۱۸] برای دستیابی به حفظ تعادل ربات و کنترل زاویه چرخش از کنترل تطبیقی به همراه شبکه عصبی RBF استفاده شده است. کنترل کننده پیشنهادی از تجزیه سیستم ربات به دو زیر سیستم زاویه چرخش ربات و حرکت آونگ معکوس تشکیل شده است. در این مقاله نیز مدل دینامیکی سیستم خطی سازی شده است.

در این مقاله در بخش دوم دینامیک سیستم با استفاده از روش کین به دست آمده است [۶]. بخش سوم شامل تمام مراحل انجام شده جهت طراحی و پیاده‌سازی کنترل کننده می‌باشد. به طوری که در قسمت اول آن، یک کنترل کننده برای زاویه چرخش به صورت یک مسئله بیان شده و حل شده است [۱۹]. در قسمت دوم که در واقع قسمت اصلی طراحی کنترل کننده مورد نظر است و سیستم به صورت نقصان تحریک عمل می‌کند، یک کنترل کننده مد لغزشی پایدار طراحی شده که برای سطح لغزشی آن از مفهوم دینامیکی سیستم استفاده شده است. و در قسمت سوم از بخش سوم نیز، مسئله پایداری کل سیستم مطرح می‌شود. در قسمت چهارم یک کنترل کننده LQR برای مقایسه با روش پیشنهادی طراحی شده است. نهایتاً در بخش چهارم نتایج شبیه سازی سیستم ارائه شده است که بیانگر مقاوم بودن کنترل کننده پیشنهادی در مقابل عدم قطعیت‌های موجود در پارامترها می‌باشد.

## ۲- مدل دینامیکی

برای تحلیل دینامیکی سیستم‌ها روش‌های مختلفی مانند نیوتن-اولبر، لاگرانژ، همیلتون، کین و... وجود دارد و استفاده از هر کدام از این روش‌ها در نهایت منجر به استخراج معادلات حرکت می‌شود. ولی میزان پیچیدگی هر کدام از این روش‌ها در مسایل مختلف، متفاوت است. روش مناسب می‌تواند با بررسی شرایط مساله، مانند تک جسمی یا چند جسمی بودن، وجود قیود سینماتیکی و لزوم محاسبه نیروهای عکس‌العملی تعیین شود.

در این مقاله برای تحلیل دینامیکی از روش کین استفاده شده است. در این روش نیازی به محاسبه نیروهای عکس‌العملی نیست و از تابع انرژی استفاده نمی‌شود. در عین حال لازم است سرعت و شتاب اجسام محاسبه شوند. در این روش ابتدا سرعت‌های عمومی<sup>۱۸</sup> انتخاب

کنترل کننده طراحی شده پرداخته می‌شود و در بخش چهارم روشی برای کاهش چترینگ ارائه می‌شود و در بخش پنجم نیز یک کنترل کننده LQR برای مقایسه با کنترل کننده مد لغزشی طراحی می‌شود.

### ۳-۲- طراحی کنترل کننده زاویه چرخش ربات

#### ۳-۲-۱- صورت مسئله

سیستم غیر خطی نقصان تحریک (۹) را در نظر بگیرید. هدف یافتن ورودی کنترلی  $u_2$  به نحوی است که متغیر حالت  $\Psi$ ، متغیر مطلوب  $\Psi_d$  را با وجود عدم قطعیت‌های آورده شده در رابطه (۹) تعقیب کند.

$$\ddot{\Psi} = f_2 + b_2 u_2$$

$$\begin{cases} |f_2(x) - \hat{f}_2(x)| < F_2 \\ 0 < b_2^- \leq \hat{b}_2 \leq b_2^+, \hat{b}_2 = \sqrt{b_2^- b_2^+} \\ B_2 = \sqrt{b_2^+ / b_2^-}, B_2^{-1} \leq \hat{b}_2 / b_2 \leq B_2 \end{cases} \quad (9)$$

#### ۳-۲-۲- حل مسئله:

بر این اساس سطح لغزشی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$s_2 = \Psi - \Psi_d + \lambda_2 (\Psi - \Psi_d) = \dot{\Psi} + \lambda_2 \Psi \quad (10)$$

حال باید معادله  $\dot{s}_2 = 0$  حل شود.

$$\begin{aligned} \dot{s}_2 &= \dot{\Psi} - \dot{\Psi}_d + \lambda_2 \dot{\Psi} = f_2 + b_2 u_2 - \dot{\Psi}_d + \lambda_2 \dot{\Psi} = 0 \\ \Rightarrow \hat{u}_2 &= \frac{-\hat{f}_2 + \dot{\Psi}_d - \lambda_2 \dot{\Psi}}{\hat{b}_2} \end{aligned} \quad (11)$$

که ورودی معادل (۱۲) و ورودی کنترلی را (۱۳) در نظر می‌گیریم.

$$u_{eq2} = -\hat{f}_2 + \dot{\Psi}_d - \lambda_2 \dot{\Psi} \quad (12)$$

$$u_2 = \hat{b}_2^{-1} [u_{eq2} - k_2 \cdot \text{sgn}(s_2)] \quad (13)$$

حال طبق [۱۴] بهره ورودی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$k_2 \geq B_2 (F_2 + \eta_2) + (B_2 - 1) |u_{eq2}| \quad (14)$$

### ۳-۳ طراحی کنترل کننده توام موقعیت و زاویه حفظ تعادل

#### ۳-۳-۱- صورت مسئله

سیستم غیر خطی را در نظر بگیرید. هدف یافتن ورودی کنترلی  $u_1$ ، به نحوی است که متغیرهای حالت  $x$  و  $\phi$  متغیرهای مطلوب  $x_d$  و  $\phi_d = 0$  را با وجود عدم قطعیت‌های آورده شده در رابطه (۱۵) تعقیب کنند.

$$\begin{cases} \ddot{x} = f_1 - b_1 u_1 \\ \ddot{\phi} = f_3 - b_3 u_1 \\ |f_3(x) - \hat{f}_3(x)| < F_3 \\ 0 < b_3^- \leq \hat{b}_3 \leq b_3^+, \hat{b}_3 = \sqrt{b_3^- b_3^+} \\ B_3 = \sqrt{b_3^+ / b_3^-}, B_3^{-1} \leq \hat{b}_3 / b_3 \leq B_3 \end{cases} \quad (15)$$

$$-\frac{\tau_1 + \tau_2}{R} = 3(m_c + m_s) \ddot{x} - m_s d \cos \phi \ddot{\phi} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} &+ m_s d \sin \phi (\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2) \\ \frac{L}{R} (\tau_1 - \tau_2) &= \left\{ \left( 3L^2 + \frac{1}{2R^2} \right) m_c + m_c d^2 \sin^2 \phi + I_2 \right\} \ddot{\psi} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} &+ m_s d^2 \sin \phi \cos \phi \dot{\psi} \dot{\phi} \\ \tau_1 + \tau_2 &= m_s d \cos \phi \ddot{x} + (-m_s d^2 - I_3) \ddot{\phi} \end{aligned} \quad (4)$$

برای راحتی به منظور پیاده سازی کنترل مد لغزشی معادلات را به فرم استاندارد فضای حالت تبدیل می‌کنیم که در آن ورودی‌های سیستم به صورت زیر می‌باشند:

$$u_1 = \tau_1 + \tau_2, \quad u_2 = \tau_1 - \tau_2 \quad (5)$$

برای زاویه حفظ تعادل ربات تعادلی دو چرخ داریم:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= \frac{1}{q\phi} [f_{1\phi} - b_{1\phi} u_1] = f_1 + b_1 u_1 \\ f_{1\phi} &= 3(m_s + m_c) [m_s d^2 \sin \phi \cos \phi \dot{\phi}^2 + m_s g d \sin \phi] \\ &- m_s^2 d^2 \cos \phi \sin \phi (\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2) \end{aligned} \quad (6)$$

$$b_{1\phi} = 3(m_s + m_c) + \frac{m_s d \cos \phi}{R}$$

$$q\phi = 3(m_s + m_c) (m_s d^2 + I_3) - m_s d^2 \cos^2 \phi$$

زاویه چرخش ربات نیز به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} &= \frac{1}{q\psi} [f_{2\psi} + b_{2\psi} u_2] = f_2 + b_2 u_2 \\ f_{2\psi} &= -m_s d^2 \sin \phi \cos \phi \dot{\psi} \dot{\phi} \end{aligned} \quad (7)$$

$$b_{2\psi} = \frac{L}{R}$$

$$q\psi = (3L^2 + (1/2)R^2) m_c + m_s d^2 \sin^2 \phi + I_2$$

و برای موقعیت ربات تعادلی دو چرخ نیز داریم:

$$\ddot{x} = \frac{1}{q_x} [f_{3x} - b_{3x} u_1] = f_3 + b_3 u_1$$

$$\begin{aligned} f_{3x} &= m_s^2 d^2 \sin \phi \cos \phi (d \cos \phi \dot{\phi}^2 + g) \\ &- (m_s d^2 + I_3) m_s g d \sin \phi (\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2) \end{aligned} \quad (8)$$

$$b_{3x} = m_s d \cos \phi + \frac{m_s d^2 + I_3}{R}$$

$$q_x = 3(m_s + m_c) (m_s d^2 + I_3) - m_s^2 d^2 \cos^2 \phi$$

### ۳- طراحی کنترل کننده

این قسمت شامل تمام مراحل انجام شده جهت طراحی و پیاده‌سازی کنترل کننده می‌باشد. به طوری که در بخش اول، یک کنترل کننده برای زاویه چرخش پیشنهاد می‌شود. در بخش دوم که در واقع قسمت اصلی طراحی کنترل کننده مورد نظر است و سیستم به صورت نقصان تحریک عمل می‌کند، یک کنترل کننده مد لغزشی پایدار طراحی می‌شود که برای سطح لغزشی آن از مفهوم دینامیکی سیستم استفاده می‌شود. در بخش سوم با تعریف یک تابع لیاپانف به اثبات پایداری

### ۳-۲-۳- حل مسئله

به دلیل اینکه سیستم‌های نقصان تحریک دارای ورودی کمتر نسبت به درجه آزادی سیستم می‌باشند، از روش معمول برای طراحی کنترل کننده نمی‌توان استفاده کرد. بر این اساس سطح لغزشی به صورت زیر پیشنهاد می‌شود:

$$\begin{cases} s_1 = \dot{\phi} + \lambda_1 \phi - \phi_d \\ \phi_d = \lambda_2 \ddot{x} + \ddot{x} \end{cases} \quad (16)$$

بدین ترتیب یک سطح لغزشی برای هر دو فضای حالت انتخاب می‌کنیم و هنگامی که سطح لغزشی با ورودی پیشنهاد شده به سمت صفر میل کند طبق رابطه‌ی (۱۷)، اهداف هر دو ورودی ایجاد می‌شود.

$$s_1 \rightarrow 0 \begin{cases} \phi \rightarrow 0 \\ \ddot{x} \rightarrow 0 \Rightarrow x \rightarrow x_d \end{cases} \quad (17)$$

در بخش (۳-۴-۱) به اثبات رابطه‌ی (۱۷) می‌پردازیم. در این جا فرض می‌کنیم رابطه‌ی (۱۷) برقرار باشد. حال باید معادله  $\dot{s}_1 = 0$  حل شود. [۱۴]

$$\dot{s}_1 = \ddot{\phi} + \lambda_3 \dot{\phi} = f_1 + b_1 u_1 + \lambda_1 \dot{\phi} = 0 \Rightarrow \hat{u}_1 = \frac{-\hat{f}_1 - \lambda_1 \dot{\phi}}{\hat{b}_1} \quad (18)$$

ورودی معادل (۱۹) و ورودی کنترلی را (۲۰) در نظر می‌گیریم.

$$u_{eq1} = -\hat{f}_1 - \lambda_1 \dot{\phi} \quad (19)$$

$$u_1 = \hat{b}_1^{-1} [u_{eq1} - k_1 \cdot \text{sgn}(s_1)] \quad (20)$$

حال طبق [۱۴] بهره ورودی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$k_1 \geq B_1 (F_1 + \eta_1) + (B_1 - 1) |u_{eq1}| \quad (21)$$

### ۳-۴-۳- بررسی پایداری

#### ۳-۴-۱- بررسی پایداری سطوح لغزشی

همان گونه که اشاره شد کنترل سیستم ربات تعادلی شامل دو بخش می‌باشد. بخش اول کنترل زاویه چرخش ربات است که با توجه به مجزا بودن کانال آن نسبت به موقعیت و زاویه تعادل می‌تواند به راحتی به صورت یک سیستم یک ورودی-یک خروجی کنترل شود و پایداری آن به راحتی قابل اثبات است. اما با فرض کنترل زاویه چرخش در مقدار مطلوب، می‌توان دینامیک سیستم را به صورت یک سیستم یک ورودی دو خروجی (موقعیت ربات و زاویه تعادل بدنه) زیر در نظر گرفت:

$$\begin{cases} -\frac{\tau_1 + \tau_2}{R} = 3(m_c + m_s) \ddot{x} \\ -m_s d \cos \phi \ddot{\phi} + m_s d \sin \phi \dot{\phi}^2 \\ \tau_1 + \tau_2 = m_s d \cos \phi \ddot{x} + (-m_s d^2 - I_3) \ddot{\phi} \\ + m_s d^2 \sin \phi \cos \phi \dot{\phi}^2 + m_s g d \sin \phi \end{cases} \quad (22)$$

برای این وضعیت هم به راحتی می‌توان نشان داد سطح لغزش  $s_1$  به سمت صفر سوق داده خواهد شد. اما نکته مهم این است که با میل کردن سطح لغزش به سمت صفر چه تضمینی وجود دارد که  $\phi$  و  $\ddot{x}$  نیز به سمت صفر میل می‌کنند؟ با فرض  $s_1 = \dot{\phi} + \lambda_1 \phi - \phi_d$

راحتی می‌توان نشان داد که در صورتی که  $s_1$  صفر گردد،  $\phi$  به سمت

$\phi_d$  میل خواهد کرد. در این حالت داریم  $\dot{\phi} = \ddot{\phi} = 0$ ، در نتیجه:

$$3R(m_c + m_s) \ddot{x} = -u_1 \quad (23)$$

$$m_s d \cos \phi_d \ddot{x} + m_s g d \sin \phi_d = u_1 \quad (24)$$

با جمع دو رابطه‌ی (۲۳) و (۲۴) داریم:

$$\frac{m_s d \cos \phi_d + 3R(m_c + m_s)}{m_s g d} \ddot{x} + \sin \phi_d = 0 \quad (25)$$

اکنون با فرض ثابت  $a$  به صورت زیر:

$$a = \frac{3R(m_c + m_s)}{m_s g d} \quad (26)$$

داریم:

$$\left( \frac{1}{g} \cos \phi_d + a \right) \ddot{x} + \sin \phi_d = 0 \quad (27)$$

اگر  $Z = \ddot{x}$  و  $Z_1 = \ddot{x}$  اگر  $\phi_d = \lambda_1 \ddot{x} + \lambda_2 \dot{x} = \lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2$

$$\phi_d = \lambda_1 \ddot{x} + \lambda_2 \dot{x} = \lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2 \quad (28)$$

اکنون می‌توان معادله غیر خطی (۲۷) را طبق فرض (۲۸) به یک

سیستم غیر خطی (۲۹) تبدیل کرد.

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -\frac{g \sin(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)}{\cos(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)} + \alpha g \end{cases} \quad (29)$$

همانطور که اشرافیون و همکاران در [۲۲ و ۲۱] این سطح لغزشی را

پیشنهاد دادند و هوانگ و همکاران در [۹ و ۱۰] برای ربات تعادلی دو

چرخ پیاده‌سازی کردند، برای بررسی پایداری سیستم (۲۹) آن را حول

نقطه تعادل  $[z_1 \quad z_2] = [0 \quad 0]$  خطی می‌کنیم. در نتیجه برای

سیستم خطی‌سازی شده داریم:

$$\dot{Z} = A \cdot Z, \quad Z = [z_1 \quad z_2]^T \quad (30)$$

که در آن:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{z}_1}{\partial z_1} & \frac{\partial \dot{z}_1}{\partial z_2} \\ \frac{\partial \dot{z}_2}{\partial z_1} & \frac{\partial \dot{z}_2}{\partial z_2} \end{bmatrix} \quad (31)$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g\lambda}{1+ag} & -\frac{g\lambda}{1+ag} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ z \end{bmatrix} \quad (32)$$

حال معادله مشخصه ماتریس  $A$  را به دست می‌آوریم:

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ \frac{g\lambda_1}{1+ag} & s + \frac{g\lambda_2}{1+ag} \end{vmatrix}$$

$$= s \left( s + \frac{g\lambda_2}{1+ag} \right) + \frac{g\lambda_1}{1+ag} \quad (33)$$

$$= s^2 + \frac{g\lambda_2}{1+ag} s + \frac{g\lambda_1}{1+ag} = 0$$

از آنجایی که  $s$  متغیر لاپلاس می‌باشد. بر طبق قانون پایداری رات هورویتز، سیستم خطی (۳۲) پایداری مجانبی است اگر داشته باشیم:

$$\frac{g\lambda}{1+ag}, \frac{g\lambda}{1+ag} > 0 \quad (34)$$

با توجه به اینکه  $g, \lambda_1, \lambda_2, \alpha$  ثابت‌های بزرگتر از صفر هستند شرط (۳۴) برآورده می‌شود. در نتیجه سطح لغزشی پیشنهادی، اهداف  $x$  و  $\phi$  را برآورده می‌سازد.

### ۳-۴-۲- بررسی پایداری کلی کنترل کننده مد لغزشی

برای بررسی پایداری کلی سیستم بعد از اعمال ورودی‌های کنترلی (۱۷) و (۲۵)، تابع لیپانف به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$V = \frac{1}{2}s_1^2 + \frac{1}{2}s_2^2 \quad (35)$$

این تابع یک تابع مثبت معین است. حال با گرفتن مشتق نسبت به زمان داریم:

$$\dot{V} = s_1\dot{s}_1 + s_2\dot{s}_2 = s_1(\ddot{\phi} + \lambda_2\dot{\phi}) + s_2(\ddot{\psi} + \lambda_2\dot{\psi}) \quad (36)$$

سیس با جایگذاری معادلات (۹) و (۱۵) در (۳۶) داریم:

$$\dot{V} = s_1(f_3 + b_3(\hat{b}_3^{-1}[-\hat{f}_3 - \lambda_1\dot{\theta} - k_3 \operatorname{sgn}(s_3)])) + \lambda_1\dot{\theta} + s_2(f_2 + b_2(\hat{b}_2^{-1} \quad (37)$$

$$[-\hat{f}_2 + \dot{\phi}_d - \lambda_3\dot{\phi} - k_3 \operatorname{sgn}(s_3)]) - \dot{\phi}_d + \lambda_3\dot{\phi}$$

با جایگذاری  $f = \hat{f} + (f - \hat{f})$  و همچنین معادلات (۱۱) و (۱۲) در معادله (۳۷) داریم:

$$\dot{V} = s_1[-(B_3 - 1)F_3 - k_3 \operatorname{sgn}(s_1)] + s_2[-(B_2 - 1)F_2 - k_2 \operatorname{sgn}(s_2)] \quad (38)$$

رابطه‌ی (۳۸) نشان می‌دهد که تابع لیپانف  $V$  پایدار مجانبی است.

### ۳-۵- کاهش چترینگ

همانطور که قبلاً بیان شد یکی از روش‌های کاهش چترینگ استفاده از تابع اشباع به جای تابع علامت است. بر این اساس معادلات (۱۸) و (۲۵) به صورت زیر تغییر پیدا می‌کنند.

$$u_1 = \hat{b}_1^{-1}[\hat{u}_1 - k_1 \operatorname{sat}(s_1)] \quad (39)$$

$$u_2 = \hat{b}_3^{-1}[\hat{u}_2 - k_2 \operatorname{sat}(s_2)] \quad (40)$$

که تابع اشباع به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\operatorname{sat}(x) = \begin{cases} x & |x| < b_{\operatorname{sat}} \\ \operatorname{sgn}(x) & |x| \geq b_{\operatorname{sat}} \end{cases} \quad (41)$$

### ۳-۶- طراحی LQR

برای طراحی LQR باید ابتدا مدل خطی سیستم را به دست آوریم. معادله فضای حالت سیستم حول نقطه تعادل

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (42)$$

$$y = Cx + Du \quad (43)$$

$$x = [\phi \ \dot{\phi} \ \psi \ \dot{\psi} \ x \ \dot{x}]^T, u = [\alpha_3 \ \beta_3]^T \quad (43)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 73 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.179 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$B = \begin{bmatrix} -24.15 & -24.15 \\ 68.12 & 68.12 \\ -1.699 & -1.699 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

برای به دست آوردن بهره فیدبک حالت بهینه، پاسخ تابع هزینه رابطه (۴۶) با حل معادله ریکاتی (۴۸) به دست می‌آید:

$$J = \int (x' Q x + u' R u) dt \quad (46)$$

$$K = R^{-1} B' P \quad (47)$$

$$-\dot{P} = A' P + P A + Q - P B R^{-1} B' P \quad (48)$$

برای انتخاب وزن‌های ماتریس‌های قطری  $Q$  و  $R$  یک راه‌حل ساده این است که برای متغیرهای که می‌خواهیم تأثیر بیشتری داشته باشند مقدار مثبت بیشتری قرار داده و بالعکس. در این ربات زاویه تعادل  $\phi$  از اهمیت بالایی برخوردار است. بدین ترتیب وزن ماتریس‌های  $Q, R$  را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم.

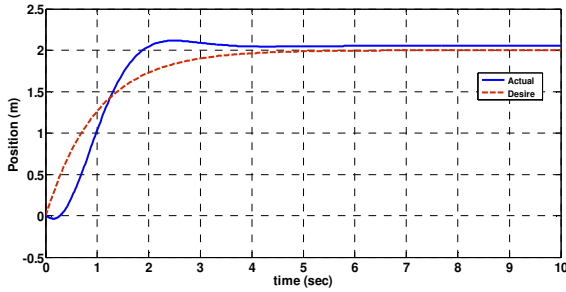
$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (49)$$

در نتیجه با حل معادله ریکاتی بهره به صورت زیر به دست می‌آید:

$$K = \begin{bmatrix} -1.0867 & 0.7144 & 3.2444 & -6.0529 & 0.7071 & 3.1623 \\ -1.0867 & -0.7144 & 3.2444 & -6.0529 & -0.7071 & 3.1623 \end{bmatrix} \quad (50)$$

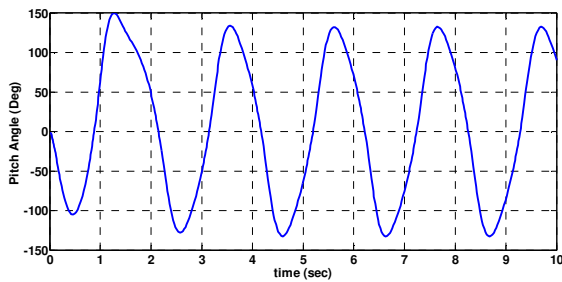
### ۴- شبیه سازی

جهت پیاده سازی مدل ربات تعادلی دوچرخ و شبیه سازی از قسمت Simulink نرم افزار متلب استفاده شده است. شکل زیر بلوک دیاگرام شبیه سازی سیستم را نشان می‌دهد.

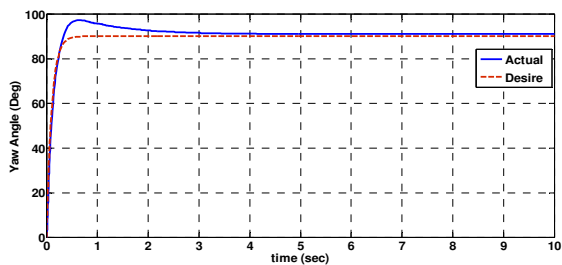


شکل (۵): جابجایی ربات با کنترل کننده LQR بدون قطعیت  
 Fig. 4: Position of robot with LQR controller without considering limits of uncertainties

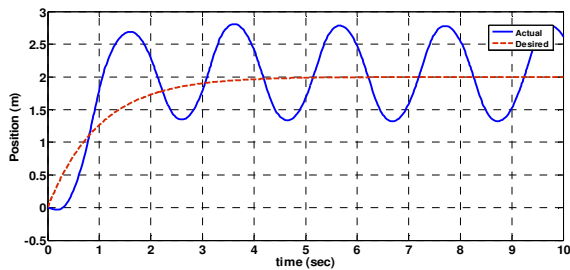
اما برای واقعی تر شدن شبیه سازی ها، ۱۰٪ عدم قطعیت در جرم بدنه ربات در نظر گرفته شد.



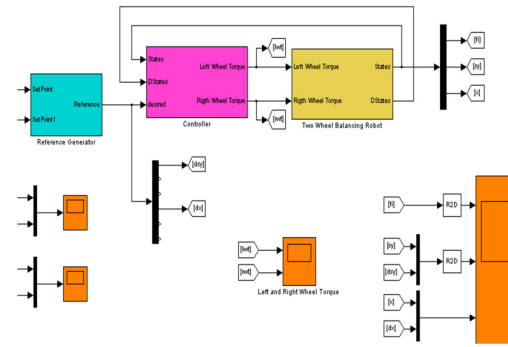
شکل (۶): زاویه حفظ تعادل ربات با کنترل کننده LQR با عدم قطعیت  
 Fig. (6): Pitch angle of robot with LQR controller of considering limits of uncertainties



شکل (۷): زاویه چرخش ربات با کنترل کننده LQR با عدم قطعیت  
 Fig. (7): Yaw Angle of robot with LQR controller considering limits of uncertainties



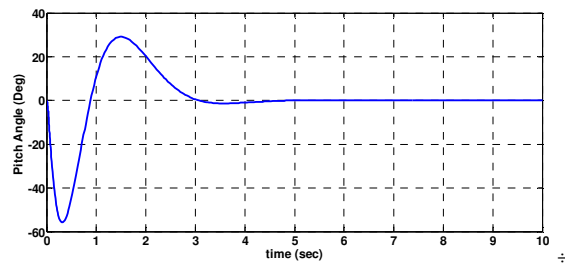
شکل (۸): موقعیت ربات با کنترل کننده LQR با عدم قطعیت  
 Fig. (8): Position of robot with LQR controller considering limits of uncertainties



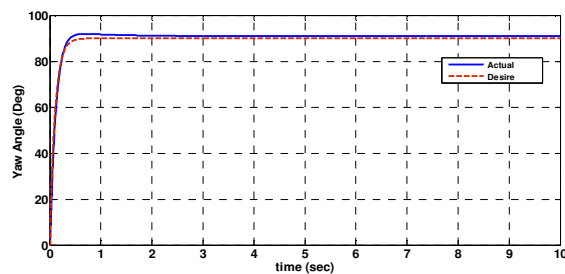
شکل (۲): بلوک دیاگرام در Simulink نرم افزار متلب  
 Fig. (2): Simulink block diagram in MATLAB

#### ۴-۱- نتایج شبیه سازی

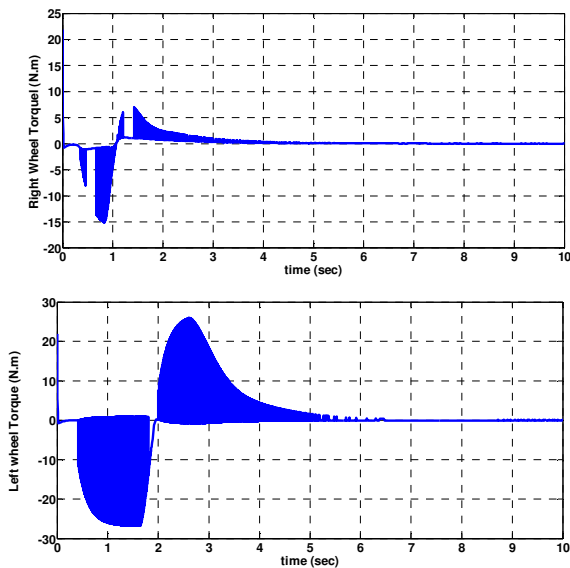
در شکل های (۳)، (۴) و (۵) به ترتیب زاویه تعادل ربات، زاویه انحراف ربات و موقعیت ربات با کنترل LQR بدون عدم قطعیت نشان داده شد است. همان طور که مشاهده می شود کنترل کننده LQR در این حالت به خوبی سیستم را کنترل می کند. برای شبیه سازی ها تمامی پارامترهای سیستم از [۸] استخراج شده است که در جدول (۱) مقدار تولید تابع ضربه در مشتقات ورودی مرجع، ورودی های مطلوب  $x_d=2m$  و  $\psi_d = 90^\circ$  پس از عبور از فیلتر  $a/(s+a)$  به سیستم اعمال شده اند. برای انجام شبیه سازی ها فرض شد که حداکثر گشتاور موتورها 30 N.m می باشد و در هر مرحله پارامترهای کنترل کننده به گونه ای تنظیم گردید که گشتاور اعمالی به سیستم از این حد تجاوز نکند.



شکل (۳): زاویه حفظ تعادل ربات با کنترل LQR بدون عدم قطعیت  
 Fig. (3): Pitch Angle of robot with LQR controller without considering limits of uncertainties

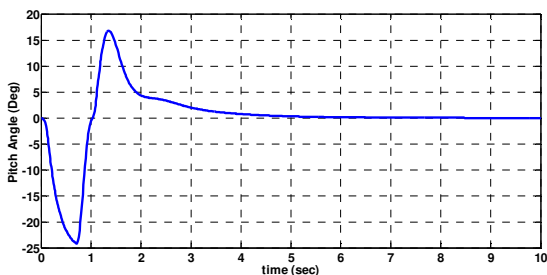


شکل (۴): زاویه چرخش ربات با کنترل کننده LQR بدون عدم قطعیت  
 Fig. (4): Yaw angle of robot with LQR controller without considering limits of uncertainties



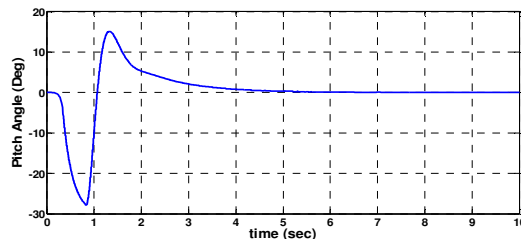
شکل (۱۲): گشتاور چرخ‌ها با کنترل مد لغزشی با تابع علامت  
 Fig. (12): Torques of wheeled of robot with sliding mode controller using sign function

همان طور که در شکل‌های (۹)، (۱۰)، (۱۱) که به ترتیب زاویه حفظ تعادل ربات، زاویه چرخش و موقعیت ربات می‌باشند مشاهده می‌شود، کنترل کننده مد لغزشی پیشنهادی در برابر عدم قطعیت‌های موجود در سیستم مقاوم می‌باشد. شکل (۱۲) نشان می‌دهد که سیگنال ورودی‌های ربات (گشتاور چرخ‌های سمت چپ و راست)، به علت استفاده از تابع علامت در ورودی کنترلی به شدت دارای چترینگ می‌باشند. لذا در این تحقیق برای کاهش چترینگ کنترل کننده از تابع اشباع به جای تابع علامت استفاده شد.

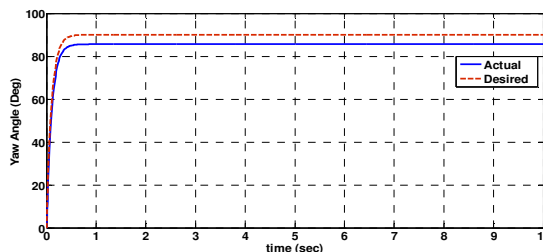


شکل (۱۳): زاویه حفظ تعادل ربات با کنترل کننده مد لغزشی با تابع اشباع  
 Fig. (13): Pitch angle of robot with sliding mode controller using saturation function

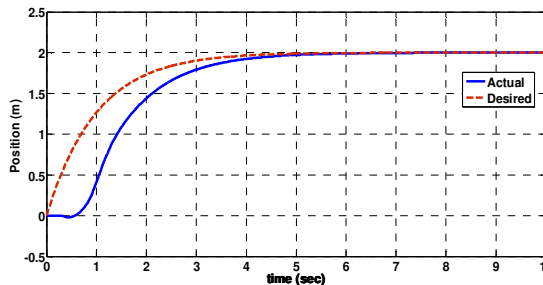
همان طور که در شکل‌های (۶)، (۷) و (۸) ملاحظه می‌شود، کنترل کننده LQR قادر به کنترل زاویه حفظ تعادل و موقعیت در حضور عدم قطعیت در جرم ربات نمی‌باشد. شکل‌های (۹)، (۱۰)، (۱۱) و (۱۲) نتایج شبیه‌سازی کنترل کننده مد لغزشی را در حضور عدم قطعیت در جرم ربات نشان می‌دهند.



شکل (۹): زاویه حفظ تعادل ربات با کنترل کننده مد لغزشی با تابع علامت  
 Fig. (9): Pitch Angle of robot with sliding mode Controller considering limits of uncertainties



شکل (۱۰): زاویه چرخش ربات با کنترل کننده مد لغزشی با تابع علامت  
 Fig. 10: Yaw Angle of robot with sliding mode Controller using sign function



شکل (۱۱): موقعیت ربات با کنترل کننده مد لغزشی با تابع علامت  
 Fig. (11): Position of robot with sliding mode controller using sign function



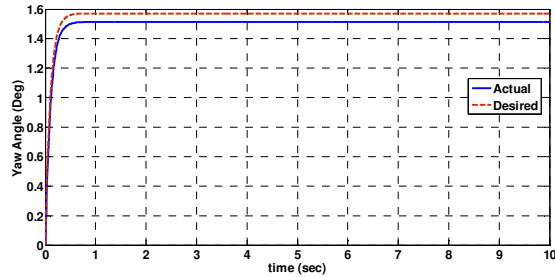
در شکل‌های (۱۳)-(۱۵) به ترتیب زاویه حفظ تعادل، زاویه چرخش ربات و موقعیت ربات با تابع اشباع نشان داده شده است. شکل (۱۶) و (۱۷) نیز سیگنال ورودی کنترلی سیستم را نشان می‌دهد که چترینگ آن به خوبی کاهش یافته است.

#### ۵- نتیجه گیری

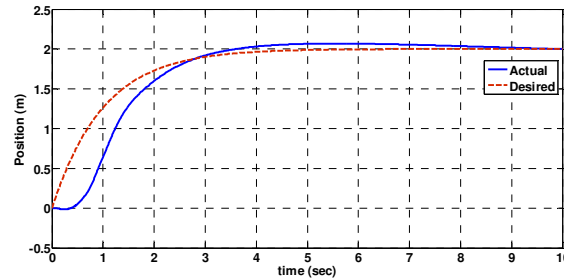
در این تحقیق یک کنترل‌کننده مد لغزشی برای کنترل ربات تعادلی دو چرخ طراحی گردید. ویژگی کنترل‌کننده طراحی شده این است که بر اساس مدل غیرخطی سیستم طراحی شده و در هنگام طراحی عدم قطعیت موجود در پارامترهای سیستم نیز در نظر گرفته شده است. همچنین برای مقایسه روش پیشنهادی یک کنترل‌کننده LQR نیز برای سیستم طراحی گردید. نتایج شبیه‌سازی‌های ربات تعادلی دو چرخ در صورت عدم وجود عدم قطعیت در سیستم نشان می‌دهد که کنترل‌کننده LQR پاسخ مناسبی در بر دارد. اما با توجه به غیر خطی بودن سیستم و وجود عدم قطعیت در شرایط عملی، کنترل مد لغزشی طراحی شده در این مقاله پاسخ قابل قبول‌تری ارائه می‌نماید که نشان می‌دهد کنترل‌کننده مد لغزشی به خوبی در مقابل عدم قطعیت‌های پارامترهای سیستم، مقاوم می‌باشد. همچنین نتایج شبیه‌سازی تایید می‌نماید که استفاده از تابع اشباع به جای تابع علامت در کاهش چترینگ موجود در سیگنال کنترلی بسیار مؤثر می‌باشد.

#### پی‌نوشت:

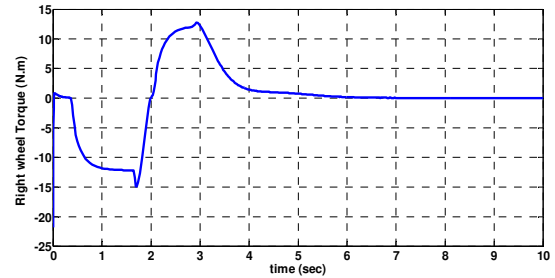
- 1- Underactuated system
- 2- Mobile Robot
- 3- Inverted Pendulum
- 4- Segway
- 5- Kazauo Yamafugi
- 6- MATLAB
- 7- Proportional -Integral-Derivative
- 8- David Anderson
- 9- Lagrange
- 10- Kane
- 11- Linear-quadratic regulator
- 12- Proportional -Derivative
- 13- Huang, J. et al
- 14- Sliding surface
- 15- Wu, J. et al
- 16- Yau, H. et al
- 17- Tsai, C. et al
- 18- Generalized Speeds
- 19- Generalized Coordinates



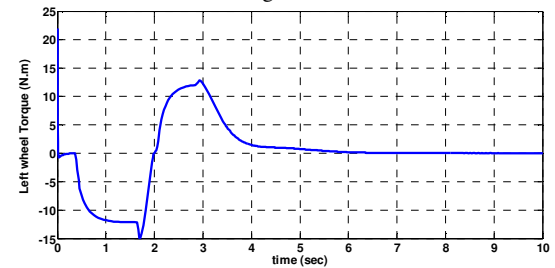
شکل (۱۴): زاویه چرخش ربات با کنترل‌کننده مد لغزشی با تابع اشباع  
Fig. (14): Pitch Angle of robot with sliding mode controller using saturation function



شکل (۱۵): موقعیت ربات با کنترل‌کننده مد لغزشی با تابع اشباع  
Fig. (15): Position of robot with sliding mode controller using saturation function



شکل (۱۶): گشتاور چرخ سمت راست با کنترل مد لغزشی با تابع اشباع  
Fig. (16): Right wheeled torque of robot with sliding mode controller using saturation function



شکل (۱۷): گشتاور چرخ سمت چپ با کنترل مد لغزشی با تابع اشباع  
Fig. (16): Left wheeled torque of robot with sliding mode controller using saturation function

## References

- [1] S. Inc, "Simply moving", Available from: <http://www.segway.com/>, 2012.
- [2] K. Yamajuji, T. Kawamura, "Postural control of a monoaxial bicycle", *Journal of the Robotics Society of Japan*, Vol. 7, No. 4, pp. 74–79, 1989.
- [3] T. Blackwell, "How to build a self balancing scooter", <http://tlb.org/scooter.html>, 2005.
- [4] M. Clark, J. Field, S. Mc Mahon, Philips, "EDGAR, a self-balancing scooter", University of Adelaide, 2005.
- [5] A.D. nBot Balancing Robot, Available from: <http://www.geology.smu.edu/~dpa-www/robo/nbot/>, 2008.
- [6] D.Y. Lee, Y.H. Kim, B.S. Kim, Y.K. Kwak, "Dynamics and control of non-holonomic two wheeled inverted pendulum robot", pp. 373-381, Springer 2006.
- [7] S.W. Nawawi, M.N. Ahmad, J.H.S. Osman, "Control of two-wheels inverted pendulum mobile robot using full order", *Proceedings of the International Conference on Man-Machine Systems*, Langkawi, Malaysia, Sep. 2006
- [8] S.W. Nawawi, M.N. Ahmad, J.H.S. Osman, A.R. Husain, M.F. Abdollah, "Controller design for two-wheels inverted pendulum mobile robot using PISM", *Proceeding of the IEEE/SCORED*, pp.194–199, Selangor, June 2006.
- [9] J. Huang, Z.H. Guan, T. Matsuno, T. Fukuda, et al., "Sliding-mode velocity control of mobile-wheeled inverted-pendulum systems", *IEEE Trans. on Robotics*, Vol. 26, No. 4, pp. 750-758, 2010.
- [10] H. Jian, F. Ding, T. Fukuda, T. Matsuno, "Modeling and velocity control for a novel narrow vehicle based on mobile wheeled inverted pendulum", *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, Vol. 21, No. 5, pp. 1607-1617, 2013.
- [11] N.M.A. Ghani, N.I.M. Yatim, N.A. Azmi, "Comparative assessment for two wheels inverted pendulum mobile robot using robust control", *Proceeding of the IEEE/ICCAS*, pp. 562–567, Gyeonggi-do, Oct. 2010.
- [12] J. Wu, Y. Liang, Z. Wang, "A robust control method of two-wheeled self balancing robot", *Proceeding of the IEEE/IFOST*, pp. 1031–1035, Harbin, Heilongjiang, Aug. 2011.
- [13] H.T. Yau, C.C. Wang, N.S. Pai, M.J. Jang, "Robust control method applied in self-balancing two-wheeled", pp. 268-271, Wuhan, Nov./Dec. 2009.
- [14] D.S. Nasrallah, H. Michalska, J. Angeles, "Controllability and posture control of a wheeled pendulum moving on an inclined plane", *IEEE Trans. on Robotics*, Vol. 23, pp. 564–577, 2007.
- [15] C.C. Tsai, S.Y. Ju, "Trajectory tracking and regulation of a self-balancing two-wheeled robot: A backstepping sliding-mode control approach", *Proceedings of the IEEE/SICE*, pp. 2411–2418, Taipei, Aug. 2010.
- [16] Z. Kausar, K. Stol, N. Patel, "Stability region estimation of statically unstable two wheeled mobile robots", *Proceeding of the IEEE/ROBIO*, pp. 1379–1384, Karon Beach, Phuket, Dec. 2011.
- [17] Z. Kausar, K. Stol, N. Patel, "Nonlinear control design using Lyapunov function for two wheeled mobile robots", *Proceeding of the IEEE/ M2VIP*, pp. 123-128, Auckland, Nov. 2012.
- [18] T. Ching-Chih, H. Hsu-Chih, L. Shui-Chun, "Adaptive neural network control of a self-balancing two-wheeled scooter", *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, Vol. 57, No. 4, pp. 1420-1428, 2010.
- [19] J.J.E. Slotine, W. Li, "Applied nonlinear control", Prentice Hall, 1991.
- [20] H.A. Shirazi, "Dynamic analysis, simulation and control of uniaxial two-wheel vehicles", M.Sc. dissertation, Mechanical Engineering, University Sanaati Sharif, 2011.
- [21] H. Ashrafiuon, R.S. Erwin, "Sliding control approach to underactuated multibody systems", *Proceeding of the IEEE/ACC*, pp. 1283–1288, Boston, MA, USA, June/July 2004.
- [22] M. Nikkhah, H. Ashrafiuon, F. Fahimi, "Robust control of under-actuated biped using sliding modes", *Robotica*, Vol. 25, No. 3, pp. 367–374, 2006.