فصلنامه مدلسازی اقتصادی (سال دهم، شماره ۳ «پیاپی ۳۵» پاییز ۱۳۹۵، صفحات ۱۶۹- ۱۴۱)

مدل ادوار تجاری حقیقی با شکل‌گیری عادات: راه حلی برای معمای صرف سهام

سیدفخرالدین فخرحسینی*

تاریخ دریافت: ۹۵/۰۲/۱۰ تاریخ پذیرش: ۹۵/۰۷/۱۹

چکیده

در ادبیات اقتصادی، شکل‌گیری عادات در بازتولید برخی از اطلاعات مالی تاریخی موفق بوده است و می‌تواند مشکلات مربوط به شبیه‌سازی متغیرهای بازارهای مالی و ادوار تجاری را آسان‌تر کند. هدف این مقاله بررسی عملکرد شکل‌گیری عادات با جدایی‌ناپذیری بین مصرف و فراغت می‌باشد. داده‌های مورد استفاده در این مقاله مربوط به قیمت‌های ثابت ۱۳۸۳ بوده و به طور سالانه برای دوره زمانی ۱۳٤۵-۹۳ می‌باشند. بر این اساس، پس از لگاریتم‌گیری از متغیرها با استفاده از فیلتر هدریک- پرسکات، متغیرها روندزدایی شدند. معادلات نهایی الگو، پیرامون وضعیت باثبات خطی شده و با استفاده از رهیافت اُهلیگ (۱۹۹۹) معادلات تصادفی خطی شده، به صورت یک الگوی فضا- حالت در محیط برنامه‌نویسی «Matlab» تصریح شد. نتایج نشان می‌دهد افزودن پارامتر شکل‌گیری عادات می‌تواند نسبت شارپ یا نوسانات دارایی بدون ریسک را افزایش دهد و جداناپذیری بین مصرف و فراغت، می‌تواند معمای صرف سهام را تبیین نماید.

طبقه‌بندی JEL: C11, C22, E17, E32, E25

واژگان کلیدی: مدل DSGE، هزینه تعدیل سرمایه، شکل‌گیری عادات، مدل قیمت‌گذاری دارائی.

---

* استادیار گروه حسابداری و مدیریت بازرگانی، واحد تنکابن، دانشگاه آزاد اسلامی، مازندران، ایران (نویسنده مسئول)، پست الکترونیکی: f_fkm21@yahoo.com

۱. مقدمه

از آنجا که در اقتصاد کلان، بازدهی دارایی‌ها نقش مهمی در هدایت شاخص‌های اقتصادی دارد، این سوال همیشه مطرح بوده است که کدام الگوی ادوار تجاری حقیقی می‌تواند حقایق بازار دارایی، به ویژه، معمای صرف سهام[1] را توضیح دهد؟ در ادبیات قیمت‌گذاری دارایی، لوکاس (۱۹۷۸) با استفاده از مدل‌های اقتصادی به بررسی داده‌های بازارهای مالی پرداخت. مطالعات بعدی سه معمای معروف، در ادبیات قیمت‌گذاری دارایی مطرح نمودند. در ابتدا مهرا و پرسکات[2](۱۹۸۵) معمای صرف سهام و به دنبال آن معمای بازدهی دارایی بدون ریسک[3] توسط ویل[4] (۱۹۸۹) معرفی شد و در نهایت، کمپبل[5] (۱۹۹۶) معمای نوسانات قیمت دارایی‌ها را با هموارسازی مصرف، مطرح کرد؛ یعنی، نوسانات مصرف در حالت‌های مختلف، نقش مهمی در ادبیات قیمت‌گذاری دارایی‌های مبتنی بر مصرف، بازی می‌کند.

شالوده این مقاله بکارگیری شکل‌گیری عادات[6] در تابع مطلوبیت خانوار است که یکی از ساختارهای جدید در ترجیحات مصرف‌کننده شناخته می‌شود. شکل‌گیری عادات در توضیح‌دهی حقایق کلیدی بازارهای مالی موفق بوده است. بسیاری از مقالات در ادبیات قیمت‌گذاری دارایی‌ها، بازتولیدکننده اطلاعات مالی و تاییدکننده نتایج تحقیقات مربوط به ادوار تجاری بوده‌اند. الگوهای قیمت‌گذاری دارایی سنتی فرض می‌کنند ترجیحات جداپذیر زمانی هستند؛ بنابراین مصرف‌های آنی، نمی‌توانند حقایق قیمت‌گذاری دارایی مانند بازدهی دارایی بدون ریسک، صرف سهام و نسبت شارپ را توضیح دهند و برای حل این موضوع باید از مدل‌های شکل‌گیری عادات با ترجیحات جداناپذیر استفاده نمود. شکل‌گیری عادات مصرفی، موجب افزایش ریسک‌گریزی شده و افراد تمایلی به تغییر در عادات مصرفی‌شان نخواهند داشت. با افزایش ضریب ریسک‌گریزی، رشد مصرف کل، خیلی هموارتر خواهد شد و ارتباط خیلی کم با نسبت شارپ سهام خواهد داشت که بدین دلیل می‌تواند معمای صرف سهام را تبیین کند. در این تحقیق با استفاده از فرمول قیمت‌گذاری با یک سیستم لگاریتم خطی

[1] Equity Premium Puzzle
[2] Mehra and Prescott
[3] Risk-free Rate Puzzle
[4] Weil
[5] Campbell
[6] Habit Formation

برای متغیرهای اقتصاد کلان، می‌توان صرف ریسک را توضیح داد. همچنین ترجیحات شکل‌گیری عادات، می‌تواند صرف سهام را توضیح دهد. مصرف در چارچوب مدل RBC[1] می‌تواند درون‌زا باشد و عاملان اقتصادی تلاش می‌کنند، مسیر مصرف را از طریق اضافه نمودن محدودیت به این مدل‌ها هموار سازند. هدف این مقاله، ارائه مفاهیم قیمت‌گذاری دارایی و همچنین توانایی شکل‌گیری عادات با جداناپذیری بین مصرف و فراغت، برای نشان دادن واقعیت‌های ادوار تجاری است. این تحقیق بررسی می‌کند که ترجیحات در تعادل عمومی، چگونه بازدهی سهام و ادوار تجاری را توضیح می‌دهند. همچنین این تحقیق نشان می‌دهد، در مدل ادوار تجاری حقیقی با فرض وجود هزینه تعدیل سرمایه و شکل‌گیری عادات، صرف سهام، نسبت شارپ و حقایق ادوار تجاری چگونه تبیین می‌شود.

در ادامه در بخش دوم به ادبیات موضوع و پیشینه تحقیق پرداخته می‌شود و در بخش سوم، مفاهیم قیمت‌گذاری دارایی با توابع مطلوبیت متفاوت بحث می‌شود و در بخش‌های بعدی معرفی مدل و تجزیه و تحلیل مدل و در پایان نتیجه‌گیری، پیشنهادها و پیوست ارائه می‌شود.

۲. مروری بر ادبیات

لوکاس (۱۹۷۸) برای اولین‌بار با فرض مصرف‌کنندگان همگن در یک مدل قیمت‌گذاری دارایی‌های مبتنی بر مصرف، تغییرات تصادفی بازده دارایی را مورد بررسی و مدل قیمت‌گذاری دارایی سرمایه مبتنی بر مصرف را ارائه نمود که در آن هر ریسک دارایی، باید بتواند کوواریانس بین مصرف سرانه و بازدهی دارایی را نشان دهد.

یکی از ضعف‌های نظریه‌های عمومی مبتنی بر مطلوبیت قیمت‌گذاری دارایی، عدم پاسخ به اختلاف بین مقدار بازدهی حقیقی خرید اوراق قرضه دولتی آمریکا حدود ۱ درصد در سال و مقدار برآورد شده بازدهی سهام شرکت‌های آمریکا حدود ۷ درصد در سال بوده است. همچنین این سوال مطرح شده است که چرا سرمایه‌گذاران، اوراق قرضه با بازدهی پایین را به سهامی با بازدهی بالا ترجیح می‌دهند؟ نظریه‌های اقتصادی بیان می‌کنند، بازدهی سهام باید از بازدهی اوراق قرضه به علت صرف ریسک، بیشتر باشد. همچنین مهرا و پرسکات (۱۹۸۵) در یک مدل تعادل عمومی با عاملان اقتصادی ناهمگن و وجود بازارهای ناقص و ضریب

[1] Real Business Cycle

ریسک‌گریزی نسبی، نشان دادند که بازدهی سهام برای سال‌های ۱۸۸۹–۱۹۷۸ برابر ۰/۳٤ درصد برآورد گردید که کمتر از مقادیر حقیقی آن یعنی ٦/۱۸ درصد بوده است؛ یعنی این بازدهی سهام برآورد شده بیشتر از مقدار مدل بهینه‌سازی بوده است؛ بنابراین این پدیده در اقتصاد به معمای صرف سهام نامیده شد. این معما ریشه در تفاوت‌های مشاهده شده بین نرخ‌های بازدهی سهام و دارایی‌ها با ریسک پایین دارد. قطعاً برآورد مدل دقیق نیست؛ زیرا صرف سهام را بیش از حد برآورد می‌کند.

ویل (۱۹۸۹) برای توضیح معمای بازدهی بدون ریسک این سوال را مطرح می‌کند که چرا از نگاه ترجیحات سرمایه‌گذاران، بازدهی اوراق قرضه کمتر از بازدهی سهام است. اگر سرمایه‌گذاران تمایل به بازدهی بیشتری دارند، چرا سرمایه‌گذاری آنها در اوراق قرضه دولتی بیشتر از سهام است؟ اگر سرمایه‌گذاران در سهام، سرمایه‌گذاری بیشتری کرده بودند، بازدهی سهام می‌بایست کاهش و بازدهی اوراق قرضه دولتی افزایش و صرف سهام کاهش می‌یافت. همچنین این معما بیان می‌کند در مدل‌های ترجیحات استاندارد، افراد با ریسک‌گریزی زیاد، صرف ریسک زیادتری نیز نصیبشان خواهد شد و این افراد تمایل کمتری به رشد مصرف دارند که این نکته با نرخ بازدهی دارایی بدون ریسک زیاد سازگار است. اما از لحاظ تجربی، برای بازدهی دارایی بدون ریسک، عدد پایینی مشاهده شده است و این امر بدان معناست که افراد به رشد مصرف تمایل دارند. از آن پس، ادبیات مربوط به دنبال حل این دو معما بوده است. محققان در مطالعات خود با بکارگیری بازارهای ناقص و همچنین ترجیحات آلترناتیو در حل این معما تلاش نمودند. ریتز[1](۱۹۸۸) بیان می‌کند سرمایه‌گذاران معتقدند حادثه‌های سهمگین برای قیمت دارایی‌ها بندرت اتفاق می‌افتد؛ بنابراین سرمایه‌گذار حداکثر نمودن صرف سهام را با حداقل نمودن بازدهی دارایی بدون ریسک و نیز ریسک‌گریزی نسبی کم و سهم مصرف بالا همراه خواهد کرد. کنستانتندیس[2] (۱۹۹۰) شکل‌گیری عادات مصرفی را در تابع مطلوبیت خانوار نمونه وارد نمود تا معمای صرف سهام را حل کند. به اعتقاد وی، نقش کلیدی ماندگاری عادات، پلی بین ریسک‌گریزی نسبی و عکس کشش جانشینی بین دوره‌ای در مصرف ایجاد می‌کند. وی از مدل رشد نئوکلاسیک پیوسته با عادات مصرفی، نتیجه می‌گیرد

[1] Rietz
[2] Constantinides

این ضریب کمتر از ۲/۸۱ خواهد بود.

فیورر[1](۲۰۰۰) توضیح می‌دهد که مصرف‌کنندگان تمایلی ندارند که مصرفشان را برای یک دوره به دوره بعدی سریعاً کاهش دهند. مصرف‌کنندگان برای نگهداری دارایی‌های ریسکی در یک مدل شکل‌گیری عادات، صرف ریسک سهام بیشتری تقاضا دارند. لتو و اُهلیگ[2](۲۰۰۰) با واردکردن شکل‌گیری عادات مصرفی در تابع مطلوبیت، نشان دادند که پاسخ متغیر مصرف به شوک تکنولوژی در مقایسه با زمانی که در تابع مطلوبیت شکل‌گیری عادات مصرفی وجود ندارد، خیلی کم و ناچیز خواهد بود. آن‌ها نشان دادند معمای تغییرپذیری مصرف با وجود عادات مصرفی به دلیل معمای قیمت‌گذاری دارایی ایجاد خواهد شد.

اوه[3] (۲۰۱۱) یک مدل DSGE[4] همراه با شکل‌گیری عادات و هزینه تعدیل سرمایه را معرفی نمود. وی با هزینه تعدیل سرمایه، نوسانات سرمایه‌گذاری و با وارد کردن شکل‌گیری عادات، نوسانات مصرف و رفتار متغیرهای بازار مالی را نشان داد. وی نتیجه گرفت رشد مصرف برون‌زا و هزینه تعدیل سرمایه موجب خواهد شد، نوسانات سرمایه‌گذاری کاهش و نوسانات مصرف افزایش یابد. چن و همکاران[5] (۲۰۱۲) در مقاله خود نتیجه گرفتند با تغییر پارامتر ریسک‌گریزی، تغییرپذیری تولید، سرمایه‌گذاری و بازدهی سهام افزایش پیدا می‌کند. با ریسک‌گریزی بالا قیمت دارائی‌ها و متغیرهای کلان مطابق با نظریه‌های اقتصادی نوسان می‌کنند؛ یعنی، مصرف و نرخ بازدهی بدون ریسک تغییرپذیری کم و تولید، سرمایه‌گذاری تغییرپذیری بیشتری از خود نشان می‌دهند.

۳. مفاهیم قیمت‌گذاری دارایی با توابع مطلوبیت متفاوت

۳-۱. نظریه قیمت‌گذاری دارایی پایه

نقطه عزیمت بسیاری از موقعیت‌های سرمایه‌گذاری، فرض تصمیم‌گیری معمولی از ارزش‌گذاری جریان وجوه نقد در حالت نامشخص است. افراد می‌خواهند بدانند قیمت p_t از

[1] Fuhrer
[2] Lettau and Uhlig
[3] Jonghyeon Oh
[4] Dynamic Stochastic General Equilibrium
[5] Zhanhui Che, Ilan Cooper, Paul Ehling and Costas Xiouros

یک سرمایه‌گذاری با بازدهی x_{t+1} در $t+1$، چقدر است؛ به طور مثال، اگر سرمایه‌گذار یک سهام خریداری کند، بین قیمت سهام در دوره بعدی p_{t+1} و سود سهام d_{t+1} تمایز قائل شده است. متغیر x_{t+1} تصادفی است؛ بنابراین سرمایه‌گذاری تنها یک انتظار در زمان t که در زمان $t+1$ حاصل می‌شود، دارد. مقدار سرمایه‌گذاری بستگی به تابع مطلوبیت سرمایه‌گذار دارد:

$$U(c_t, c_{t+1}) = u(c_t) + \beta E_t[u(c_{t+1})]$$

تابع مطلوبیت افزایشی، نشان‌دهنده مصرف بیشتر و مقعر بودن، نشان‌دهنده مطلوبیت نهائی نزولی از یک واحد مصرف بیشتر است. پارامترβ عامل تنزیل ذهنی نرخی است که فرد، مصرف آینده را نسبت به حال وزن‌دهی می‌کند. سرمایه‌گذار نمونه برای حداکثرنمودن تابع خود مقدار ζ از دارایی قابل مبادله را انتخاب می‌کند؛ پس داریم:

$$\max_{\zeta} \quad u(c_t) + \beta E_t[u(c_{t+1})] \qquad (1)$$
$$\text{s.t.} \quad c_t = e_t - p_t\zeta \qquad \text{و} \qquad c_{t+1} = e_{t+1} + x_{t+1}\zeta$$

متغیر e عبارت است از درآمدی که سرمایه‌گذار می‌تواند بدون هیچ سرمایه‌گذاری مصرف کند. شرط مرتبه اول برای این مسئله:

$$\frac{\partial U(c_t, c_{t+1})}{\partial \zeta} = -p_t u'(c_t) + E_t[\beta u'(c_{t+1}) x_{t+1}] = 0$$

شرط نهائی یک مقدار بهینه دارایی، نقطه‌ای است که در آن، سرمایه‌گذار بین خرید و فروش دارایی بی‌تفاوت است؛ یعنی، منافع مطلوبیت نهائی انتظاری دارایی برابر هزینه مطلوبیت نهائی آن است. هزینه مطلوبیت نهائی، زیان مطلوبیت برای سرمایه‌گذار است، اگر وی یک واحد کوچک از دارایی را بخرد. منافع مطلوبیت نهائی انتظاری، افزایش تنزیل شده در مطلوبیت سرمایه‌گذار از بازدهی سرمایه‌گذاری است و آن چیزی است که وی از خرید مقدار دارایی در زمان t و فروش آن در $t+1$ انتظار دارد، به دست آورد. بازنویسی معادله اخیر یا رابطه (۲) به فرمول «قیمت‌گذاری دارایی لوکاس» معروف است. بنابراین خواهیم داشت:

$$1 = E_t\left[m_{t+1} R^i_{t+1}\right] \qquad (2)$$

متغیر $m_{t+1}=\frac{\beta u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}$ عامل تنزیل تصادفی یا هسته اصلی قیمت‌گذاری[1] است. علاوه بر این R_{t+1}^{i} بازدهی ناخالص دارایی برابر x_{t+1}/p_t است. بازدهی دارایی بدون ریسک (R_t^f) پیش از زمان[2] شناخته می‌شود که معادله (۲) به صورت $1=E_t[m_{t+1}]R_t^f$ نوشته می‌شود؛ بنابراین، بازدهی دارایی بدون ریسک فقط به هسته اصلی قیمت‌گذاری مرتبط می‌شود:

$$\frac{1}{\mathrm{E}_t[m_{t+1}]}=R_t^f \tag{۳}$$

با استفاده از تجزیه کوواریانس، معادله (۲) به شکل زیر صورت‌بندی می‌شود:

$$1=\mathrm{E}_t[m_{t+1}]\mathrm{E}_t\left[R_{t+1}^i\right]+\mathrm{cov}\left(m_{t+1},R_{t+1}^i\right)$$

پس، برای هر دارایی شرط زیر باید صدق نماید:

$$\frac{1-\mathrm{cov}\left(m_{t+1},R_{t+1}^i\right)}{\mathrm{E}_t[m_{t+1}]}=\mathrm{E}_t\left[R_{t+1}^i\right] \tag{٤}$$

این معادله نشان می‌دهد بازدهی‌های انتظاری، متناسب با کوواریانس هسته اصلی قیمت‌گذاری شده و بازدهی دارایی محسوب می‌شود. گفتنی است عبارت کوواریانس، تعدیل ریسک یک دارایی است. اگر کوواریانس برابر صفر باشد، غالباً دارایی بتا، صفر[3] نامیده می‌شود که همان عبارت بازدهی بدون ریسک خواهد بود. صرف ریسک یک دارایی از اختلاف بین بازدهی‌ها یعنی تفاوت معادله (٤) و (۳) حاصل می‌شود:

$$\mathrm{E}_t\left[R_{t+1}^i\right]-R_t^f=-R_t^f.\mathrm{cov}\left(m_{t+1},R_{t+1}^i\right) \tag{۵}$$

کمبل و دیگران (۱۹۹۷) نتیجه گرفتند اگرکوواریانس بین بازدهی یک دارایی و m_{t+1} کوچک باشد؛ بدین معناست که مطلوبیت نهائی مصرف برای سرمایه‌گذار بالا است، آنگاه سرمایه‌گذار تمایل دارد دارایی‌هایی با بازدهی کم نگهداری کند. بنابراین سرمایه‌گذار تقاضای نگهداری دارایی‌هایی را خواهد داشت که صرف ریسک بالایی دارند. آنها از معادله (۲) که رابطه بین بازدهی دارایی و عامل تنزیل تصادفی را نشان می‌دهد، بعد از لگاریتم‌گیری معادله زیر را صورت‌بندی نمودند:

---

1. Pricing Kernel
2. Ahead of Time
3. Zero-Beta Asset

$$0 = \mu_{R^i} + \mu_m + 0.5\left(\sigma_{R^i}^2 + \sigma_m^2 + 2\sigma_{R^im}\right) \quad (٦)$$

که μ_R و μ_m میانگین بازدهی دارایی مرکب[1] و هسته اصلی قیمت‌گذاری ترکیب شده، و σ_R و σ_m، σ_{Rm} انحراف استاندارد غیرشرطی و کوواریانس logR و logm هستند. می‌دانیم واریانس و کوواریانس بازدهی دارایی بدون ریسک، صفر است؛ پس، داریم:

$$\hat{R}_t^f = \mu_R = -\mu_m - 0.5\sigma_m^2 \quad (٧)$$

علامت ^ نشان‌دهنده لگاریتم بازدهی دارایی بدون ریسک است. برای لگاریتم بازدهی سهام داریم:

$$E_t\left[\hat{R}_{t+1}^i - \hat{R}_t^f\right] + 0.5\sigma_{R^i}^2 = -\sigma_{R^im} \quad (٨)$$

عبارت سمت چپ معادله (۸) تعدیل نابرابری جنسن[2] نامیده می‌شود که این معادله را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت. او با خارج کردن لگاریتم، بازدهی ریسک جدید را معادله زیر دانسته است:

$$logE_t\left(\frac{R_{t+1}^i}{R_t^f}\right) = -\sigma_{R^im} \quad (٩)$$

سرانجام، نسبت بین بازدهی ریسک (بازدهی مازاد) و انحراف استاندارد یک دارایی به نسبت شارپ[3] معروف است. نسبت شارپ به صورت $\frac{E[R^i]-R^f}{\sigma_{R^i}}$ بیان می‌شود. با توجه به رابطه $cov(y,z) = E[yz] - E[y]E[z]$، رابطه اخیر بازنویسی می‌شود:

$$E[R^i] - R^f = -\rho_{R^i,m}\frac{\sigma_m}{E[m]}\sigma_{R^i}$$

ضریب همبستگی بیشتر از یک نمی‌تواند باشد؛ بنابراین داریم:

$$\left|\frac{E[R^i]-R^f}{\sigma_{R^i}}\right| \le \frac{\sigma_m}{E[m]}\sigma_{R^i} \quad (١٠)$$

معادله (۱۰) نسبت شارپ را توصیف می‌کند؛ یعنی، این نسبت محدود به تغییرپذیری عامل تنزیل (m) است.

---

1 Compounded Asset Returns
2 Jensen's Inequality Adjustment
3 Sharpe Ratio

۳-۲. قیمت‌گذاری دارایی با مطلوبیت قوی[1]

این نوع تابع مطلوبیت در ادبیات قیمت‌گذاری دارایی نقش چشم‌گیری داشته است. عامل اقتصادی نمونه تابع مطلوبیت جداپذیر- زمانی خود را حداکثر می‌کند:

$$U(c_t) = \frac{{c_t}^{1-\gamma}-1}{1-\gamma} \quad (۱۱)$$

این تابع مطلوبیت یک تابع مطلوبیت ریسک‌گریزی نسبی (CRRA) است که پارامتر $\gamma > 0$ ریسک‌گریزی نسبی یا کشش جانشینی بین دوره‌ای و c_t مصرف کل نامیده می‌شود. مطلوبیت نهائی برابر با $U'(c_t) = {c_t}^{-\gamma}$ است که عامل تنزیل تصادفی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$m_{t+1} = \beta \left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\gamma} \quad (۱۲)$$

از معادله اولر حاصل می‌شود:

$$1 = E_t\left[\beta \left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\gamma} . R_{t+1}^i\right] \quad (۱۳)$$

از معادله (٦) استفاده نموده و معادله (۱۳) را بازنویسی می‌کنیم:

$$0 = -log\beta + \mu_{R^i} - \gamma\mu_c + 0.5\left(\sigma_{R^i}^2 + \sigma_c^2 - 2\gamma\sigma_{R^ic}\right) \quad (۱٤)$$

که μ_c نشان‌دهنده $E_t[\Delta log c_t]$ است. همچنین σ_c واریانس غیرشرطی رشد لگاریتم مصرف و σ_{R^ic} واریانس غیرشرطی بین لگاریتم بازدهی دارایی (i) و رشد لگاریتم مصرف است. بنابراین معادله بازدهی دارایی بدون ریسک (۷) را می‌توان نشان داد:

$$logR_t^f = -log\beta + \gamma\mu_c - 0.5\gamma^2\sigma_c^2 \quad (۱۵)$$

بازدهی بدون ریسک بستگی خطی به رشد لگاریتم مصرف با شیب γ دارد. در ادبیات این موضوع مانند کمبل و دیگران (۱۹۹۷) اثر منفی عبارت دوم در طرف راست معادله را به عنوان پس‌اندازهای احتیاطی تفسیر می‌کنند. حال برای بازدهی ریسک می‌توان به دست آورد:

$$logE_t\left[R_{t+1}^i\right] - logR_{t+1}^f = \gamma\sigma_{R^ic} \quad (۱٦)$$

[1] Power Utility

برای نتیجه‌گیری مفاهیم قیمت‌گذاری دارائی از یک مدل مطلوبیت قوی، می‌توان نسبت شارپ (معادله۱۰) را به صورت تقریبی نوشت:

$$\left|\frac{E[R^i]-R^f}{\sigma_{R^i}}\right| \leq \frac{\sigma_m}{E[m]}\sigma_{R^i} \approx \gamma\rho_{R^i c}\,\sigma_c \tag{۱۷}$$

مهرا و پرسکات (۱۹۸۵) برای تفسیر معادله (۱۷) فرض می‌کنند که قیمت یک دارائی همگن از درجه یک در سود سهام است، $p_t = w.d_t$، و بازدهی یک دارائی کاملا با سود سهام مرتبط است. این فرض را از روابط (۱۵–۱۷) می‌توان به دست آورد که بیشتر بستگی به رشد سود سهام انتظاری دارد. مهرا و پرسکات (۱۹۸۵) مقدار γ در معادله (۱۵) را حدود ۱ برآورد نموده‌اند؛ اما مقدار حقیقی بیشتر از آن بوده است؛ بدین ترتیب همان معمای صرف سهام نامیده می‌شود. برای حل این معما باید مقدار γ بالا باشد؛ یعنی این با نرخ بازدهی دارایی بدون ریسک بالا همراه خواهد بود. اما مشاهدات تجربی نشان می‌دهد این نرخ حدود ۲ درصد است. علاوه بر این، چنانچه γ بالا باشد، عامل تنزیل β بیشتر از یک خواهد بود که به مفهوم آن است که ترجیحات زمانی منفی است که این موضوع همان معمای بازدهی بدون ریسک مطرح شده توسط ویل (۱۹۸۹) است. به عبارت دیگر، افراد در زمان حال بیشتر قرض می‌کنند تا مصرف بیشتری داشته باشند؛ بنابراین نرخ بازدهی بدون ریسک افزایش می‌یابد که این امر توسط داده‌های تجربی تایید نمی‌شود.

۳-۳. شکل‌گیری عادات با جداناپذیری بین مصرف و فراغت

با تمرکز بر مدل کنستانتین (۱۹۹۰) به فرمول قیمت‌گذاری دارائی لوکاس خواهیم رسید. عادات تابع خطی از مصرف و فراغت در دوره‌های گذشته است. فرض می‌شود یک سرمایه‌گذار نمونه با عمر نامحدود که مطلوبیت انتظاری را با توجه به مصرف و فراغت حداکثر می‌کند:

$$E\left[\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t \frac{\left(C_t{}^{\chi} l_t{}^{1-\chi}-x_t\right)^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}\right] \tag{۱۸}$$

که γ عکس کشش جانشینی بین زمانی مصرف و بزرگ‌تر از صفر، χ سهم مصرف سرمایه‌گذار در تابع مطلوبیت با مقدار ثابت، x_t موجودی عادات که تابع نامشخصی و بستگی

به مصرف و فراغت گذشته دارد،[1] علامت (^) لگاریتم نرخ رشد است. برای ساده‌سازی فرض می‌شود $\zeta = \gamma/1 - \theta\bar{g}_l^{\chi-1}\bar{g}_c^{-\chi}$ پس داریم: $\psi_c = (1-\zeta)(1-\chi)$ و $\psi_c = \zeta\chi - \chi + 1$.
با استفاده از توزیع لوگنرمال شرطی و همسانی واریانس معادله (۲۵) بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} 0 = log\beta + \psi_c\mu_{c,t+1} + \psi_l\mu_{l,t+1} + \mu_{R^i,t+1} + (\rho\chi - \gamma\chi)\hat{g}_{c,t} \\ + (\gamma\chi + \rho - \gamma - \rho\chi)\hat{g}_{l,t} \\ + 0.5\big(\sigma_{R^i}^2 + \psi_c^2\sigma_c^2 + \psi_l^2\sigma_l^2 - 2\psi_c\psi_l\sigma_{cl} + 2\psi_c\sigma_{cr_e} \\ - 2\psi_l\sigma_{lr_e}\big) \end{aligned} \tag{۱۹}$$

بعد از به دست آوردن این معادله، معادله بازدهی دارایی بدون ریسک استخراج می‌شود:

$$\begin{aligned} logE_t\big[R_{t+1}^f\big] = -log\beta + a\mu_c + b\mu_l - 0.5(\psi_c^2\sigma_c^2 + \psi_l^2\sigma_l^2 - 2\psi_c\psi_l\sigma_{cl}) \\ logE_t\big[R_{t+1}^f\big] = -log\beta + a\mu_c + b\mu_l - 0.5(\psi_c^2\sigma_c^2 + \psi_l^2\sigma_l^2 - 2\psi_c\psi_l\sigma_{cl} \\ - -2\psi_c\sigma_{cr_e} + -2\psi_l\sigma_{cl}) \end{aligned} \tag{۲۰}$$

با استفاده از تعدیل نابرابری جنسن، بازدهی ریسک به دست می‌آید:

$$logE_t[RP_{t+1}] = logE_t\big[r_{t+1}^i\big] - logR_{t+1}^f = \psi_c\sigma_{cr_e} - \psi_l\sigma_{lr_e}$$

بازدهی ریسک بستگی به واریانس غیرشرطی رشد مصرف و بازدهی‌های دارائی، همچنین وابسته به واریانس غیرشرطی رشد فراغت و بازدهی‌های دارائی است. زیرا ψ_c مثبت و ψ_l منفی است که برای محاسبه γ,χ و θ لازم و موجب ایجاد یک جداناپذیری بین مصرف و فراغت و رابطه منفی فراغت و بازدهی‌های دارائی یعنی یک اثر غیرحقیقی می‌شود. γ ریسک‌گریزی نسبی که با کاهش آن ریسک‌گریزی نسبی مصرف افزایش و ریسک‌گریزی نسبی فراغت افزایش می‌یابد. در مطلوبیت سرمایه‌گذار ریسک‌گریزی نسبی مبتنی بر مصرف از طریق شروط مرتبه اول و دوم نسبت به مصرف به دست می‌آید. برای ریسک‌گریزی مطلق را این طور به دست می‌آوریم:

$$ara_c = \frac{\gamma\chi c^{\chi-1}l^{1-\chi}}{c^\chi l^{1-\chi} - x} - \frac{\chi - 1}{c}$$

حال این ریسک‌گریزی نسبی مبتنی بر مصرف به صورت زیر به دست می‌آید:[1]

---

[1] برای اثبات معادله لطفاً به پیوست ۲ مراجعه شود.

$$rra_c = \frac{\gamma\chi}{1-\theta\frac{c_{-1}^{\chi} l_{-1}^{1-\chi}}{c^{\chi} l^{1-\chi}}} - \chi + 1 = \left[\frac{\gamma\chi}{1-\theta \hat{g}_c^{-\chi} \hat{g}_l^{\chi-1}}\right] - \chi + 1 = \psi_c \quad (۲۱)$$

ریسک‌گریزی نسبی مبتنی بر فراغت به صورت زیر خواهد بود:

$$rra_l = \frac{\gamma(1-\chi)}{1-\theta \bar{g}_c^{-\chi} \bar{g}_l^{\chi-1}} - \chi = 1 - \psi_l \quad (۲۲)$$

فرمول قیمت‌گذاری دارائی لوکاس بستگی به مطلوبیت نهائی واحدهای اضافی مصرف دارد. اما با تقریب بازدهی ریسک به وسیله rra_c و rra_l حاصل خواهد شد.

۳-٤. مدل RBC با شکل‌گیری عادات

در اینجا با بسط مدل لتاو و اهلیگ (۲۰۰۰) به تبیین چگونگی ایجاد نوسانات تجارتی می‌پردازیم. خانواده نمونه با عمری نامحدود، از مصرف کالاها مطلوبیت کسب می‌کند و به خاطر کارکردن از مطلوبیتش کاسته می‌شود؛ بنابراین با توجه به شکل تبعی تابع مطلوبیت، ارزش حال مطلوبیت‌هایی که این خانوار در طول حیات خود به دست می‌آورد به شکل زیر خواهد بود:

$$max_{\{C_t;L_t\}} E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\frac{\left(C_t{}^{\chi}(1-n_t)^{1-\chi}-x_t\right)^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}\right] \quad (۲۳)$$

با محدودیت $C_t + I_t = W_t N_t + D_t K_{t-1}$ که در آن $0 < \beta < 1$ ، C_t مصرف واقعی در حالی که N_t عرضه نیروی‌کار برای فعالیت‌های بازار باشد که قسمتی از کل زمان در دسترس است. پس، $1 - n_t$ برابر زمان فراغت می‌باشد. γ عکس کشش جانشینی بین زمانی مصرف و χ سطحی که عامل اقتصادی تمایل به مصرف دارد.

$$x_t = \theta C_{t-1}{}^{\chi} l_{t-1}{}^{1-\chi} \quad (۲٤)$$

پارامتر $0 < \theta < 1$ نشان‌دهنده بخشی از جمع کل با وقفه مصرف و فراغت است که یک سطح ماندگاری عادات از مصرف و فراغت از دوره‌های گذشته را برای دوره جاری ایجاد می‌کند.[۲] اگر $\chi = 1$ و $\theta = 0$ باشد تابع جداپذیر زمانی برای مصرف خواهد بود. در طی دوره

---

[۱] اگر ریسک‌گریزی نسبی مبتنی بر متغیر x باشد $\mathrm{rra_c} = \mathrm{x}.\frac{\partial^2 \mathrm{U_x(x)}}{\partial \mathrm{x}^2}.\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \mathrm{U_x(x)}}$

[۲] سطح ماندگاری عادات θ اگر بالا باشد، منعکس‌کننده صرف ریسک است.

t خانوارها اقدام به عرضه عوامل تولید، یعنی کار و سرمایه به بنگاه‌های تولیدکننده کالاها می‌کنند. در هر دوره سود حاصل از سرمایه‌گذاری در سرمایه بنگاه در دوره گذشته، D_t، نیز دریافت می‌کند. خانوار منابع خود را صرف خرید محصول تولیدی بنگاه تولیدکننده کالا کرده و بخشی از آن را سرمایه‌گذاری کرده و بقیه را مصرف می‌کند. در هر دوره مقدار پولی که عامل اقتصادی سرمایه‌گذاری می‌کند، بستگی به هزینه‌های تعدیل سرمایه، ϕ_t، در این دوره دارد؛ زیرا هر واحد سرمایه مانند سهام که سودهای متفاوتی دارند، قیمت‌های مختلفی نیز دارند؛ این تفاوت بستگی به بازدهی انتظاری از هر واحد سرمایه دارد. با انتخاب $\{C_t, L_t, k_t\}$ برای $t = 0,1,2,\ldots$ خانوار منتخب در هر دوره جمع تنزیل شده انتظاری جریان مطلوبیت را با توجه به قید انباشت سرمایه و قید بودجه حداکثر می‌کند. این مسئله را می‌توان به شکل معادله بلمن بهینه‌سازی کرد:

$$V(k_{t-1}, \Omega_t) = \max_{\{C_t, L_t, k_{t-1}\}} \{u(C_t, L_t) + \beta E_t[V(k_t, \Omega_{t+1})]\}$$

که در آن Ω_t مجموعه اطلاعات به صورت انتظاری در دوره t می‌باشد. ضریب لاگرانژ λ_t همرا با قید بودجه و شرط مرتبه اول برای C_t، L_t، K_{t-1}، λ_t برابر:

$$S_t^{-\gamma} \chi \left(\frac{L_t}{C_t}\right)^{1-\chi} - \lambda_t = 0 \qquad (۲۵)$$

$$S_t^{-\gamma} (1-\chi) \left(\frac{L_t}{C_t}\right)^{-\chi} - \lambda_t W_t = 0 \qquad (۲۶)$$

$$\beta E_t\left[\lambda_{t+1} R_{t+1}^f\right] - \lambda_t = 0 \qquad (۲۷)$$

$$W_t N_t + D_t K_{t-1} - I_t - C_t = 0 \qquad (۲۸)$$

که $S_t = c_t^{\chi} L_t^{1-\chi} - \theta c_t^{\chi} L_t^{1-\chi}$ مازاد بین تصمیم مصرف و فراغت در زمان t و موجودی عادات در t است. معادله (۲۵) و (۲۶) نرخ نهائی جانشینی بین مصرف و عرضه نیروی کار به دستمزد واقعی را نشان می‌دهد. $R_{t+1}^f = D_t \left[\frac{\left(a_1/\left(1-\frac{1}{\zeta}\right)\right)}{\phi_{t-1} - a_2}\right]^{\zeta/(\zeta-1)}$ در معادله (۲۷) همان معادله اولر است. معادله (۲۸) همان قید بودجه خانوار نمونه را نشان می‌دهد.

- **بنگاه**

فرض می‌کنیم بنگاه نمونه تولیدکننده کالا در یک تصمیم پویا در یک زمان صفر جمع جریان سود انتظاری خود را بر اطلاعات در دسترس نسبت به K_{t-1} ، N_t حداکثر می‌کند:

$$max_{\{K_{t-1};N_t\}} \mathbb{E}_0[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \lambda_t \Pi_t] \tag{۲۹}$$

تابع سود آنی[1] به صورت زیر خواهد بود:

$$\Pi_t = Y_t - W_t N_t - D_t K_{t-1}$$

تابع تکنولوژی یک تابع کاب- داگلاس با بازدهی ثابت نسبت به مقیاس به صورت زیر باشد:

$$Y_t = \bar{\kappa} e^{z_t} K_{t-1}{}^{\alpha} N_t{}^{1-\alpha} \quad 0 \le \alpha \le 1 \tag{۳۰}$$

با $1 > \alpha > 0$ عامل وزنی این دو متغیر، K_{t-1} موجودی سرمایه، N_t نیروی کار تقاضا شده و Z_t بهره‌وری کل عوامل تولید (TFP)، از یک فرایند اتورگرسیون مرتبه اول تبعیت می‌کند:

$$z_{t+1} = \rho_z z_{t-1} + \varepsilon_{zt+1} \qquad z > 0$$

که $\rho_Z \in (-1,1)$، ε_{Zt} تکانه غیرهمبسته سریالی که دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و انحراف استاندارد σ_Z می‌باشد. خانوار منابع خود را صرف خرید محصول تولیدی بنگاه تولیدکننده کالا کرده و بخشی از آن را سرمایه‌گذاری کرده و بقیه را مصرف می‌کند. در هر دوره با توجه به سرمایه‌گذاری انجام شده توسط خانوار و وجود استهلاک، موجودی سرمایه اقتصاد به شیوه زیر تغییر می‌کند:

$$K_t = (1-\delta)K_{t-1} + \phi_t K_t \tag{۳۱}$$

که δ نرخ استهلاک سرمایه و تابع ϕ_t هزینه تعدیل سرمایه مطابق با جرمان[2] (۱۹۹۸) و بولدرین و دیگران[3] (۲۰۰۱) یک تابع مثبت مقعر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\phi_t = \frac{a_1}{1-{}^1/_\zeta}\left(\frac{I_t}{K_t}\right)^{1-{}^1/_\zeta} + a_2 \tag{۳۲}$$

پارامتر ζ کشش سرمایه‌گذاری I_t باتوجه به q توبین که اگر $\zeta = \infty$ تابع انباشت سرمایه استاندارد خواهیم داشت:

$$K_t = (1-\delta)K_{t-1} + K_t$$

عامل تنزیل بنگاه با فرایند تصادفی $\beta^t\lambda_t$، که λ_t مطلوبیت نهائی دارائی‌های واقعی نشان داده می‌شود. شروط مرتبه اول از معادله بلمن بهینه‌سازی می‌شود:

---

1 Instantaneous Profit
2 Jermann
3 Boldrin et al.

$$V(K_{t-1},N_t,\Omega_t)=\underset{\{K_{t-1},N_t\}}{max}\{\lambda_t\Pi_t+\beta E_t[V(K_t,\Omega_{t+1})]\}$$

این شروط عبارتند از:

$$D_t=\alpha Z_t(K_{t-1})^{\alpha-1}(N_t)^{1-\alpha}=\alpha\frac{Y_t}{K_{t-1}} \quad (۳۳)$$

$$W_t=(1-\alpha)\bar{\kappa}e^{z_t}(K_{t-1})^{\alpha}(N_t)^{-\alpha}=(1-\alpha)\frac{Y_t}{N_t} \quad (۳٤)$$

٤. نتایج مدل

٤-۱. کالیبره کردن

مدل DSGE شامل جملات انتظارات عقلایی از برخی متغیرهاست، حل آن از حل مدل‌های پویا بدون وجود انتظارات عقلایی دشوارتر است. رهیافت اُهلیگ (۱۹۹۹) بر روش ضرایب نامعین[1] مبتنی است. این رهیافت زمان‌گذاری متغیرها، مشکلات مربوط به تعیین متغیرهای از پیش تعیین‌شده و از پیش تعیین‌نشده را برطرف می‌سازد. بدین ترتیب، هر متغیر درون‌زایی که با زمان t-1 یا پیشتر مشخص شود، می‌تواند به عنوان یک متغیر وضعیت در نظر گرفته شود. برای حل مدل رهیافت اُهلیگ، مدل پس از لگارتیم- خطی، به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$0=Ax_t+B\mathrm{x}_{t-1}+\mathrm{Cy_t}+\mathrm{Dz_t}$$
$$0=\mathrm{E_t}[\mathrm{Fx_{t+1}}+\mathrm{Gx_t}+\mathrm{Hx_{t-1}}+\mathrm{Jy_{t+1}}+\mathrm{Ky_t}+\mathrm{Lz_{t+1}}+\mathrm{Mz_t}]$$
$$\mathrm{z_{t+1}}=\mathrm{Nz_t}+\varepsilon_{\mathrm{t+1}}؛\ \mathrm{E_t}[\varepsilon_{t+1}]=0$$

که معادله اول، کلیه معادلات غیرانتظاری و معادله دوم، کلیه معادلات غیرانتظاری و نیز معادله تکانه‌ها را شامل می‌شود. در اینجا فرض می‌شود، رتبه ماتریس C برابر n (یعنی حداقل به اندازه متغیرهای از پیش تعیین‌نشده باشد؛ یعنی n معادله غیرانتظاری مستقل وجود داشته باشد) و قواعد بازگشتی تغییر تعادلی به صورت زیر باشد:

$$\mathrm{x_t}=\mathrm{Px_{t-1}}+\mathrm{Qz_t}$$
$$\mathrm{y_t}=\mathrm{Rx_{t-1}}+\mathrm{Sz_t}$$

که در این رابطه X_t معرف متغیرهای حالت سیستم و z_t معرف تکانه‌ها یا متغیرهای سیاست‌گذاری است. دوازده پارامتر در معادلات بالا رفتار اطراف حالت باثبات را نشان می‌دهند:

$$\alpha,\delta,\beta,\gamma,\chi,\zeta,\rho_z,\sigma_z,\theta,\bar{\kappa}exp(\bar{z}),\bar{N}$$

[1] Undetermined Coefficients

حال با مقداردهی پارامترهای الگو به تحیل الگو ادوار تجاری حقیقی می‌پردازیم. لازم به توضیح است؛ متغیرها در حالت باثبات که برخی از آنها در جدول (۱) آمده است، از حل معادلات به صورت حالت باثبات به دست می‌آید.

جدول ۱. پارامترهای مقداردهی شده (کالیبره شده)

پارامتر	تعریف	مقدار	منبع
α	سهم سرمایه در تولید	۰/٤۱۲	شاهمرادی (۱۳۸۷)
δ	نرخ استهلاک سرمایه فیزیکی	۰/۰٤۲	فخرحسینی (۱۳۹۵)
β	عامل تنزیل در تابع مطلوبیت	۰/۹۸	فخرحسینی (۱۳۹۰)
γ	عکس کشش جانشینی بین زمانی مصرف	۱/۵	فخرحسینی (۱۳۹۰)
η	عکس کشش عرضه نیروی‌کار به دستمزد	۲/۱۷	فخرحسینی (۱۳۹۳)
χ	اهمیت فراغت به مصرف در تابع مطلوبیت	۰/۰۵	والش (۲۰۰۳)
ρ_z	ضریب اتورگرسیو فرایند تکنولوژی	۰/۷۲	فخرحسینی (۱۳۹۵)
σ_z	انحراف استاندارد اختلالات تکنولوژی	۰/۰٤۵	فخرحسینی (۱۳۹۵)
ζ	کشش سرمایه‌گذاری	۰/۳	مجدزاده (۱۳۸۲)
θ	ماندگاری عادات مصرفی	۰/۵	مقدار بهینه در مدل
$\bar{\kappa}exp(\bar{z})$	حالت باثبات سطح تکنولوژی	۱	نرمال شده
$\bar{N}$	حالت باثبات سطح اشتغال	۰/۷	یافته‌های تحقیق

منبع: یافته‌های تحقیق

٤-۲. نتایج شبیه‌سازی

برای تعیین قدرت توضیح‌دهی الگو، روش متداول در مدل‌های RBC استفاده می‌شود. نمونه مورد بررسی حاوی داده‌های سالانه از سال ۱۳٤۵ - ۱۳۹۳ است. تمام داده‌های مربوط به دنیای واقعی عرضه شده در این مقاله، بر اساس قیمت‌های ثابت سال ۱۳۸۳ است. پس از لگاریتم‌گیری، با به کار گرفتن فیلتر هدریک- پرسکات (با احتساب$\lambda = 100$) روندزدایی شده‌اند. جدول (۲) مقادیر حقیقی را با مقادیر متناظر به دست آمده از شبیه‌سازی الگو، مقایسه می‌کند. براساس این جدول مشاهده می‌شود که الگو به خوبی مقادیر فوق را برای متغیرها

شبیه‌سازی نموده است؛ برای مثال، انحراف معیار داده‌های واقعی برای تولید واقعی ۰/۰۵۳ و برای دو حالت شبیه‌سازی برابر ۰/۰۵۹ و ۰/۰٦٦ که هم‌جهت می‌باشد. نتایج در مورد مصرف واقعی و سرمایه‌گذاری نیز قابل قبول است.

جدول ۲. مقایسه انحراف معیار متغیرهای کلان اقتصادی و قیمت دارائی شبیه‌سازی شده و داده‌های واقعی

داده‌های شبیه‌سازی شده و حقیقی		داده واقعی	مقدار شبیه‌سازی شده	
			$\chi = 0.95$ و $\theta = 0$	$\chi = 0.95$ و $\theta = 0.5$
متغیرهای کلان	تولید واقعی	۰/۰۵۳	۰/۰۵۹	۰/۰٦٦
	نیروی کار	۰/۰۳٦	۰/۰۱۵	۰/۰۱۷
	مصرف واقعی	۰/۰٤۵	۰/۰۵	۰/۰۵
	سرمایه‌گذاری	۰/۲٤٤	۰/۱۲۱	۰/۱۲۷
متغیرهای قیمت دارائی	بازدهی سهام	۰/٤۳	۰/۱٤۱	۰/۱۷
	بازدهی بدون ریسک	۰/۰۲۲	۰/۰۱۹	۰/۰۲۱
	صرف ریسک سهام	۰/٤۳	۰/۱۲۲	۰/۱٤۹
	نسبت شارپ	۰/٦۱	۰/٦۷	۰/۸۲

منبع: یافته‌های تحقیق

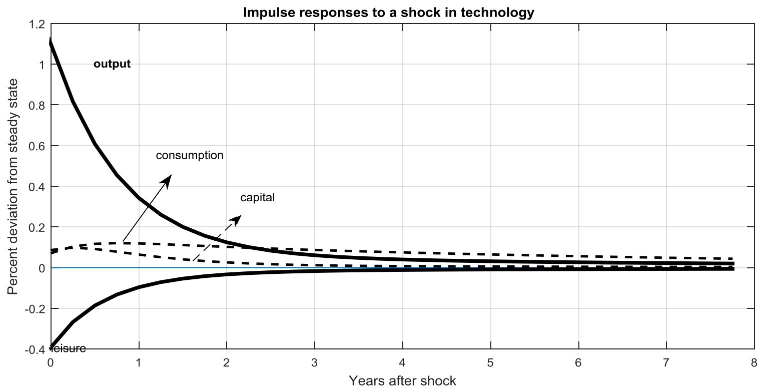
٤-۳. پاسخ آنی مدل

حال با ارائه نتیجه محاسبات و ارائه نمودار، پاسخ‌های آنی متغیرهای مختلف اقتصادی را نشان خواهیم داد. علاوه بر این، با کمک معادلات اساسی، اثرات متغیرها مورد نظر با اعمال تکانه تکنولوژی و تکانه عادات مصرفی و فراغت، مورد بررسی و تفسیر قرار خواهند گرفت.

- **تکانه تکنولوژی**

نمودار(۱) پاسخ‌های اولیه برخی از متغیرها به یک تکانه تکنولوژی و انتشار آنها بر یک افق زمانی بلندمدت را نشان می‌دهد. به طورکلی نتایج با یافته‌های نظری و تجربی سازگار است؛ یعنی، فراغت به یک تکانه تکنولوژی در ابتدای دوره واکنش منفی حدود ۰/۳- درصد انحراف

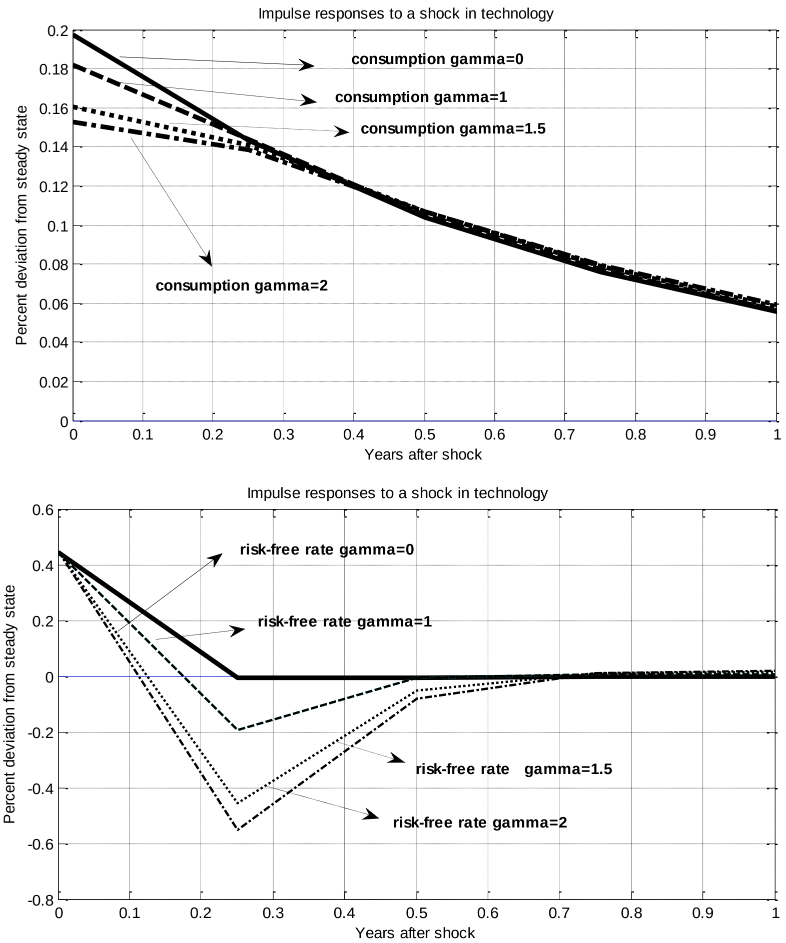
منفی از حالت باثبات نشان می‌دهد. همان طور که از تابع تولید می‌توان مشاهده نمود، یک درصد افزایش در تکنولوژی، به طور مستقیم باعث افزایش تولید می‌شود؛ یعنی، کالاهای زیادی برای مصرف و سرمایه‌گذاری بیشتر در دسترس خواهند بود؛ لذا این دو متغیر نیز افزایش خواهند یافت. در حقیقت این افزایش بیش از ۱/۱ درصد است. همچنین سرمایه که کمی بیشتر از حالت باثبات خواهد داشت که این تغییر از کانال سرمایه‌گذاری ایجاد می‌شود و اثر آن دیرتر از تغییرات تولید از بین خواهد رفت. اما در مورد مصرف باید گفت کمتر از۰/۲ درصد افزایش انحراف از حالت باثبات در مصرف ایجاد می‌شود. در واقع تغییرات مصرف بستگی به ترجیحات آنها دارد که بیشتر در کشش جانشینی بین زمانی مصرف نمایان خواهد شد.



نمودار ۱. پاسخ متغیرها به تکانه تکنولوژی

حال به بررسی پویایی مصرف و بازدهی دارایی بدون ریسک بعد از اعمال تکانه تکنولوژی با مقداردهی مختلف به پارامتر ریسک‌گریزی نسبی می‌پردازیم. پاسخ متغیر مصرف و بازدهی دارایی بدون ریسک به تکانه تکنولوژی زمانی که این پارامتر $\gamma = 0{,}1{,}1.5{,}2$ باشد، در نمودار (۲) مورد بررسی قرار می‌گیرد. در حالت کلی، مصرف بعد از این تکانه افزایش می‌یابد؛ زیرا مطلوبیت نهائی مصرف افزایش خواهد یافت. این افزایش کم خواهد بود؛ زیرا انباشت عادات نقش مهمی بر تصمیم‌گیری مصرف افراد خواهد گذاشت؛ یعنی، عادات مصرفی افراد بر مصرف حال آنها تاثیر می‌گذارد و بعد از دو دوره به حالت باثبات خود باز خواهد

گشت. متغیر بازدهی دارایی بدون ریسک به وسیله رشد انتظاری مصرف تعیین می‌گردد؛ این متغیر نیز بعد از این تکانه همانند افزایش در مصرف، افزایش سریعی از خود نشان می‌دهد و بالاتر از سطح باثبات خواهد بود و سریعاً کاهش می‌یابد و منفی خواهد داشت و عکس متغیر مصرف عمل خواهد نمود.



نمودار ۲. پاسخ متغیر مصرف و بازدهی بدون ریسک به تکانه تکنولوژی با مقداردهی $\gamma = 0,1,1.5,2$

همان طور که از نمودار (۲) مشخص است، هرچقدر این پارامتر افزایش یابد، واکنش متغیر مصرف کاهش خواهد یافت؛ یعنی، این متغیر هموارتر خواهد بود یا واکنش کمتری از خود نشان می‌دهد؛ که این کاهش در تغییرپذیری مصرف به عنوان معمای تغییرپذیری مصرف شناخته می‌شود. همان طورکه گفته شد مهرا و پرسکات (۱۹۸۵) مقدار این پارامتر(γ) را نزدیک یک برآورد نموده‌اند؛ اما مقدار حقیقی این پارامتر بیشتر از آن بوده است که همان معمای صرف سهام نامیده می‌شود. برای حل این معما باید مقدار γ افزایش یابد؛ یعنی با افزایش این پارامتر، نرخ بازدهی دارایی بدون ریسک نیز افزایش خواهد یافت (همانند نمودار (۲)) و مشاهدات تجربی نشان می‌دهد این نرخ حدود ۲ درصد است.

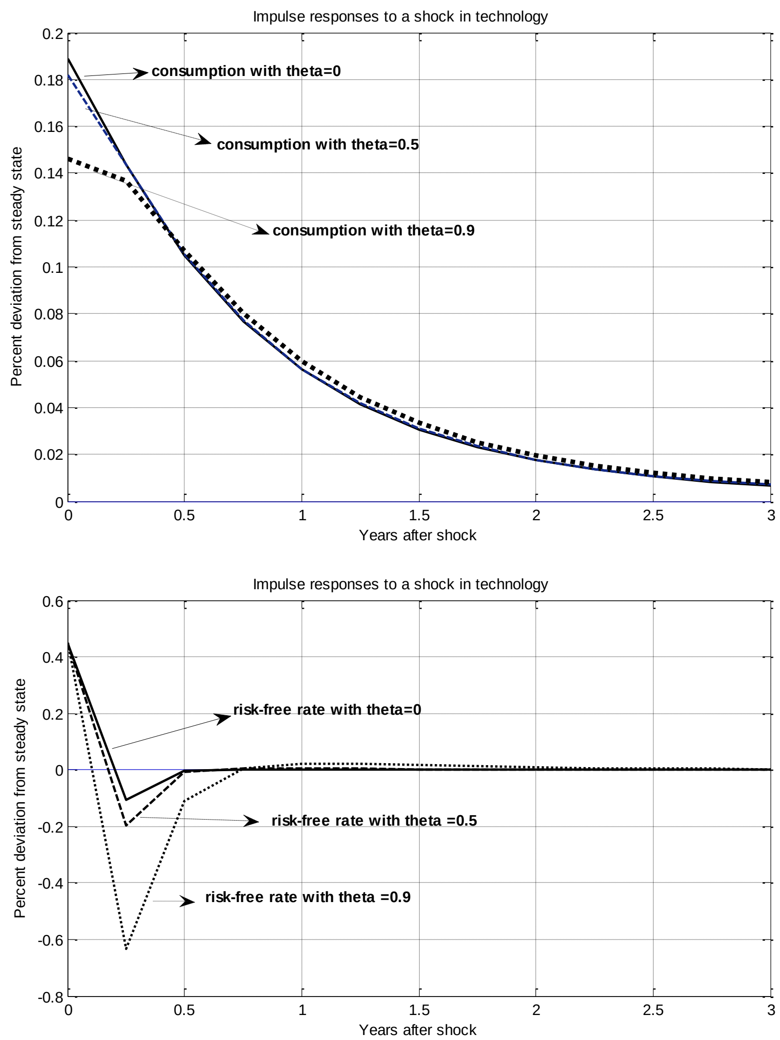
همچنین در نمودار(۳) نشان داده شده است که واکنش متغیرهای مصرف و نرخ بازدهی دارایی بدون ریسک، به تکانه تکنولوژی با فرض وجود حالت‌های مختلف پارامتر انباشت عادات مصرفیθ متفاوت خواهد بود. با افزایش این پارامتر، واکنش مصرف به این تکانه کمتر می‌شود؛ یعنی، واکنش مصرف هموارتر خواهد شد. در این واکنش مصرف، ابتدا یک افزایش ناگهانی از خود نشان می‌دهد و سپس شروع به کاهش می‌کند؛ زیرا خانوار نمونه مصرف گذشته خود را برای زمان طولانی به خاطر می‌آورند. اگر در تابع مطلوبیت مصرف‌کننده شکل‌گیری عادات مصرفی مهم شود (با بزرگ شدنθ)، تغییرات آنی مصرف از حالت باثبات آهسته‌تر خواهد شد.

به عبارت دیگر، خانوار نمونه واکنش کندتری به شوک‌های وارد شده از خود نشان می‌دهند و با کمتر شدن θ، مردم واکنش سریع‌تری به شوک‌ها نشان خواهند داد که به آن اثر هموارسازی[1] گفته می‌شود. این نتایج مطابق با مقاله لتاو و اهلیگ (۲۰۰۰) است؛ هنگامی که شکل‌گیری عادات مصرفی در مدل وارد می‌شود، مردم واکنش کمتری به تکانه تکنولوژی نسبت به زمانی که این پارامتر در تابع مطلوبیت وجود نداشته باشد، از خود نشان می‌دهند؛ بنابراین C_t ملایم‌تر خواهد شد. در عوض، خانوار نمونه تصمیم خواهند گرفت، کار خود را کاهش دهند؛ زیرا آنها انتظار دارند که مصرف در آینده افزایش نخواهد یافت و فراغت خود را بیشتر می‌کنند که همه بستگی به شکل‌گیری عادات مصرفی دارد. همانند حالت قبل، رشد انتظاری مصرف، متغیر بازدهی بدون ریسک را تعیین می‌کنند؛ عکس متغیر مصرف عمل

[1] Smoothing Effect

خواهد نمود. با افزایش پارامتر انباشت عادات مصرفی، متغیر مصرف هموارتر شده اما متغیر بازدهی بدون ریسک، نوسان بیشتری از خود نشان خواهد داد. این افزایش در تغییرپذیری متغیر نرخ بازدهی دارایی بدون ریسک به عنوان معمای نوسانات متغیر نرخ بازدهی دارایی بدون ریسک شناخته می‌شود.

$$\theta = 0,0.5,0.9$$



نمودار ۳. پاسخ متغیر مصرف و بازدهی بدون ریسک به تکانه تکنولوژی با مقداردهی

۵. نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این تحقیق، با استفاده از فرمول قیمت‌گذاری لوگ نرمال با یک سیستم لگاریتم خطی برای متغیرهای اقتصاد کلان در چارچوب الگویRBC سعی شد صرف سهام توضیح داده شود. همان گونه که از رهیافت‌های ادوار تجاری حقیقی متداول است، انحراف معیار شبیه‌سازی شده برای متغیرهای منتخب قابل دفاع بوده و هم‌جهت با مقادیر آن در اقتصاد ایران می‌باشند. به‌طور خلاصه، نتایج نشان می‌دهد الگوی ادوار تجاری واقعی که در آن شکل‌گیری عادات مصرفی، ریسک‌گریزی نسبی و سطحی که عامل اقتصادی تمایل به مصرف تصریح شده باشد، قادر خواهد بود نتایج سازگار با اقتصاد ایران را شبیه‌سازی کند.

پاسخ متغیر مصرف و بازدهی دارایی بدون ریسک به تکانه تکنولوژی، زمانی که پارامتر ریسک‌گریزی نسبی (γ) مقادیر مختلفی به خود می‌گیرند، افزایش خواهند یافت. اختلاف بین مقدار برآورد شده این پارامتر (مقدار۱) و مقدار حقیقی آن (حدود۲) به عنوان معمای صرف سهام که توسط مهرا و پرسکات (۱۹۸۵) مطرح شده بود که نتایج نشان می‌دهد با افزایش مقدار این پارامتر، متغیر مصرف واکنش کمتری از خود در پاسخ به تکانه تکنولوژی از خود نشان خواهد داد. هرگاه رشد انتظاری مصرف در افراد وجود داشته باشد؛ یعنی افراد مصرف آتی خود را افزایش دهند، موجب خواهد شد تغییرات متغیر بازدهی دارایی بدون ریسک افزایش یابد. از طرف دیگر، وجود انباشت عادات مصرفی در تابع مطلوبیت افراد می‌تواند از تغییرات متغیر مصرف بکاهد. می‌توان نتیجه گرفت با افزایش پارامتر ریسک‌گریزی نسبی، متغیر مصرف و بازدهی دارایی بدون ریسک کاهش خواهد یافت، این کاهش در تغییرپذیری مصرف به عنوان معمای تغییرپذیری مصرف شناخته می‌شود. همچنین در پاسخ به تکانه تکنولوژی با افزایش پارامتر انباشت عادات مصرفی(θ) متفاوت، متغیر مصرف هموارتر شده اما متغیر بازدهی بدون ریسک، نوسان بیشتری از خود نشان خواهد داد. این افزایش در تغییرپذیری متغیر بازدهی بدون ریسک به عنوان معمای نوسانات متغیر بازدهی بدون ریسک شناخته می‌شود. با افزایش پارامتر شکل‌گیری عادات مصرفی در مدل، موجب بروز اثر هموارسازی خواهد شد و واکنش مصرف کندتر و هموارتر خواهد بود.

بنابراین پیشنهاد می‌گردد سیاست‌گذاران برای تعیین سیاست‌ها و برنامه‌های خود به پارامترهای ساختاری در اقتصاد توجه کافی نمایند. برخی از این پارامترها از جمله شکل‌گیری

عادات مصرفی و ریسک‌گریزی می‌تواند موجب تغییر در اثرگذاری سیاست‌ها گردد. برای مطالعات آتی پیشنهاد می‌شود تغییرات قیمتی و چسبندگی آن در الگو گنجانده شود تا تغییرات مصرفی و تولید با توجه به شکل‌گیری عادات و تغییرات قیمتی در اقتصاد مورد بررسی قرار گیرد.

منابع

- شاهمرادی، اصغر (۱۳۸۷). بررسی اثرات تغییر قیمت‌های انرژی بر سطح قیمت، تولید و رفاه در اقتصاد ایران. طرح پژوهشی مربوط به وزارت اقتصاد و دارایی.
- فخرحسینی، سید فخرالدین، شاهمرادی، اصغر، احسانی، محمد علی (۱۳۹۱). چسبندگی قیمت و دستمزد و سیاست پولی در اقتصاد ایران. *فصلنامه پژوهش‌های اقتصادی*، ۱۲ (۱): ۱–۳۰.
- فخرحسینی، سید فخرالدین(۱۳۹۳). ادوار تجاری حقیقی تحت ترجیحات مصرفی و فراغت در اقتصاد ایران: رهیافت تعادل عمومی پویای تصادفی. *فصلنامه مطالعات اقتصادیِ کاربردی ایران*، ۸۱:۱۱–۱۰۶.
- فخرحسینی، سید فخرالدین(۱۳۹۵). مدل دستمزد کارایی پویا با ادوار تجاری واقعی. *فصلنامه مدلسازی اقتصادی*، ۱۰(۱): ۱۰۷–۱۳۲.

- Boldrin, M., Christiano, L., & J. and Fisher, Jonas D. M.(2001). Habit Persistence, Asset Returns, and the Business Cycle. American Economic Review, 1: 149–166.
- Campbell, J. Y. & J. H. Cochrene (1999). By force of habit: A consumption-based explanation of aggregate stock market behavior. *The Journal of Political Economy*, 107: 205–251.
- Campbell, J. Y. (1996). Understanding risk and return. *The Journal of Political Economy*, 104(2), 298–345.
- Chen, Zhanhui and Cooper, Ilan and Ehling, Paul and Xiouros , Costas: Risk Aversion Sensitive Real Business Cycles. Working paper.
- Constantinides, George M.(1990). Habit Formation: A Resolution of the Equity Premium Puzzle. *Journal of Political Economy*, 3: 519–543.
- Fuhrer, Jeffrey C.(2000). Habit Formation in Consumption and Its Implications for Monetary-Policy Models. *American Economic Review*, 3: 367–390.

- Jermann, U. J. (1998). Asset pricing in production economies. *Journal of Monetary Economics*, 41: 257–76.
- Lettau, Martin and Uhlig, Harald(2000). Can Habit Formation be Reconciled with Business Cycle Facts? *Review of Economic Dynamics*, 1: 79–99
- Lucas, R. E. (1987). Asset prices in an exchange economy. Econometrica, 46(6): 1429–45.
- Mehra, R., & Prescott, E. C. (1985). The Equity Premium: A Puzzle. *Journal of Monetary Economics*: 145–161
- Oh, Jonghyeon: A DSGE Model with Habit Formation and Nonconvex Capital Adjustment Costs. Working paper, August 2011. Department of Economics, The Ohio State University.
- Rietz, T. A., (1988). The equity risk premium: A solution. *Journal of Monetary Economics*, 22:117–131.
- Uhlig, Harald: A Toolkit for Analyzing Nonlinear Dynamic Stochastic Models Easily. Federal Reserve Bank of Minneapolis.
- Weil, P. (1989). The equity premium puzzle and the risk – free rate puzzle. *Journal of Monetary Economics*, 24: 401–421.

پیوست ۱

اگر لگاریتم یک متغیر z توزیع نرمال IID باشد: $\ln z \sim N(\mu_z, \sigma_z^2)$. برای انتظارات متغیر داریم: $E(z^a) = E[exp(alnz)] = exp\big(a\mu_z + 0.5(a^2\sigma_z^2)\big)$ که عبارت $\sigma_z^2 = E_t[(logz - E_t[logz])^2]$ می‌توان بصورت $\sigma_z^2 = var_t\big[logz - E_t[logz]\big]$ نوشت. برای دو متغیر متفاوت $a \ln z + b \ln x \sim N(a\mu_z + b\mu_x + 0.5(a^2\sigma_z^2 + b^2\sigma_x^2 + 2ab\rho\sigma_x\sigma_z))$ که ρ پارامتر همبستگی و کوواریانس $cov(z,x) = \sigma_{xz} = \rho\sigma_x\sigma_z$ و $E(z^a x^b) = exp(a\mu_z + b\mu_x + 0.5(a^2\sigma_z^2 + b^2\sigma_x^2 + 2ab\rho\sigma_x\sigma_z)$. واریانس توزیع لگاریتمی متغیر x بصورت زیر معرفی می‌شود:

$$\begin{aligned} var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 &= exp(2\mu_x + 2\sigma_x^2) - exp(2\mu_x + \sigma_x^2) \\ &= exp(2\mu_x + \sigma_x^2)\,[exp(\sigma_x^2 - 1)] = [E(x)]^2[exp(\sigma_x^2 - 1)] \Longrightarrow \sigma_x^2 \\ &= ln\left\{1 + \frac{var(x)}{[E(x)]^2}\right\} \end{aligned}$$

پیوست ۲

$$x_t = f(c_{t-1}l_{t-1}, c_{t-2}l_{t-2}, \dots, c_{t-L}l_{t-L})$$

با مشتق گیری از رابطه(۱۸) مطلوبیت نهائی مصرف خواهد بود:

$$\begin{aligned} MU_t = \left({C_t}^{\chi}{l_t}^{1-\chi} - x_t\right)^{1-\gamma}\chi\left(\frac{l_t}{C_t}\right)^{1-\chi} E\Bigg[1 \\ - \sum_{j=0}^{L}\beta^j\left(\frac{{C_{t+j}}^{\chi}{l_{t+j}}^{1-\chi} - x_{t+j}}{{C_{t+1}}^{\chi}{l_{t+1}}^{1-\chi} - x_{t+1}}\right)^{-\gamma}\chi\left(\frac{l_{t+j}}{C_{t+j}}\right)^{1-\chi}\frac{\vartheta x_{t+j}}{\vartheta c_{t+1}}\Bigg] \end{aligned} \quad (۱)$$

ا جایگذاری در شرط عامل تنزیل تصادفی می‌توان نوشت:

(۲)

$$m_{t+1} = \beta\frac{MU_{t+1}}{MU_t} = \beta\left(\frac{{C_{t+1}}^{\chi}{l_{t+1}}^{1-\chi} - x_{t+1}}{{C_t}^{\chi}{l_t}^{1-\chi} - x_t}\right)^{-\gamma}$$

$$\left(\frac{l_{t+1}}{l_t}\right)^{1-\chi}\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{\chi-1}\frac{E\left[1 - \sum_{j=0}^{L}\beta^j\left(\frac{{C_{t+j+1}}^{\chi}{l_{t+j+1}}^{1-\chi} - x_{t+j+1}}{{C_{t+1}}^{\chi}{l_{t+1}}^{1-\chi} - x_{t+1}}\right)^{-\gamma}\chi\left(\frac{l_{t+j+1}}{C_{t+j+1}}\right)^{1-\chi}\frac{\vartheta x_{t+j+1}}{\vartheta c_{t+1}}\right]}{E\left[1 - \sum_{j=0}^{L}\beta^j\left(\frac{{C_{t+j}}^{\chi}{l_{t+j}}^{1-\chi} - x_{t+j}}{{C_{t+1}}^{\chi}{l_{t+1}}^{1-\chi} - x_{t+1}}\right)^{-\gamma}\chi\left(\frac{l_{t+j}}{C_{t+j}}\right)^{1-\chi}\frac{\vartheta x_{t+j}}{\vartheta c_{t+1}}\right]}$$

با کمی تغییر در معادله(۲۰) به فرمول قیمت‌گذاری دارائی لوکاس می‌رسیم:

$$1 = E_t\left[\beta\left(\frac{C_{t+1}{}^{\chi}l_{t+1}{}^{1-\chi}-x_{t+1}}{C_t{}^{\chi}l_t{}^{1-\chi}-x_t}\right)^{-\gamma}\left(\frac{l_{t+1}}{l_t}\right)^{1-\chi}\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{\chi-1}R_{t+1}^{i}\tilde{F}_{i,t+1}\right] \qquad (۳)$$

با

$$\tilde{F}_{i,t+1} \equiv 1-\sum_{j=0}^{L}\beta^{j}\left(\frac{C_{t+j+1}{}^{\chi}l_{t+j+1}{}^{1-\chi}-x_{t+j+1}}{C_{t+1}{}^{\chi}l_{t+1}{}^{1-\chi}-x_{t+1}}\right)^{-\gamma}\chi\left(\frac{l_{t+j+1}}{C_{t+j+1}}\right)^{1-\chi}\frac{\vartheta x_{t+j+1}}{\vartheta c_{t+1}} + \sum_{j=0}^{L}\beta^{j-1}\left(\frac{C_{t+j}{}^{\chi}l_{t+j}{}^{1-\chi}-x_{t+j}}{C_{t+1}{}^{\chi}l_{t+1}{}^{1-\chi}-x_{t+1}}\right)^{-\gamma}\chi\left(\frac{l_{t+j}}{C_{t+j}}\right)^{1-\chi}\frac{\vartheta x_{t+j}}{\vartheta c_{t+1}}\frac{1}{R_{e,t+1}}\left(\frac{l_{t+1}}{l_t}\right)^{\chi-1}\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{1-\chi}$$

معادله(۲۱) هرنوع شکل‌گیری عادات خارجی و داخلی بصورت خطی و غیرخطی در خود دارد. بدین ترتیب باید تصمیم گرفت کدام نوع عادات در مدل باشد. فرض کنید عادات خارجی در الگو باشد یعنی $\tilde{F}_{i,t+1}=1$، موجودی عادات تابعی از دوره گذشته باشد،

$$x_t = \theta C_{t-1}{}^{\chi}l_{t-1}{}^{1-\chi} \qquad (٤)$$

که $0<\theta<1$ ماندگاری عادات نامیده می‌شود. لذا فرمول قیمت‌گذاری دارائی لوکاس بصورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$1 = E_t\left[\beta\left(\frac{C_{t+1}{}^{\chi}l_{t+1}{}^{1-\chi}-\theta C_t{}^{\chi}l_t{}^{1-\chi}}{C_t{}^{\chi}l_t{}^{1-\chi}-\theta C_{t-1}{}^{\chi}l_{t-1}{}^{1-\chi}}\right)^{-\gamma}\left(\frac{l_{t+1}}{l_t}\right)^{1-\chi}\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{\chi-1}R_{t+1}^{i}\right] \qquad (۵)$$

عامل تنزیل تصادفی را نیز می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$m_{t+1} = \beta\left(\frac{\left(\frac{l_{t+1}}{l_t}\right)^{1-\chi}\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{\chi}\left[1-\theta\left(\frac{C_t}{C_{t+1}}\right)^{\chi}\left(\frac{l_t}{l_{t+1}}\right)^{1-\chi}\right]}{\left[1-\theta\left(\frac{C_{t-1}}{C_t}\right)^{\chi}\left(\frac{l_{t-1}}{l_t}\right)^{1-\chi}\right]}\right)^{-\gamma}\left(\frac{l_{t+1}}{l_t}\right)^{1-\chi}\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{\chi-1}$$

باجایگذاری نرخ رشد مصرف g_c و فراغت g_l در معادله بالا هسته قیمت‌گذاری را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$m_{t+1} = \beta g_{c,t+1}{}^{a}g_{l,t+1}{}^{b}\left(1-\theta g_{c,t+1}{}^{-\chi}g_{l,t+1}{}^{\chi-1}\right)^{-\gamma}\left(1-\theta g_{c,t}{}^{-\chi}g_{l,t}{}^{\chi-1}\right)^{\gamma} \qquad (٦)$$

که $a=\chi-\gamma\chi-1$ و $b=(1-\chi)(1-\gamma)$ است. معادله(۲٤) را نمی‌توان براحتی به لگاریتم خطی فرمول قیمت‌گذاری دارائی لوکاس تبدیل نمود، لذا با استفاده از تقریب مرتبه بالا تیلور[1] به این هدف دست پیدا می‌کنیم:

[1] $\log f(g_{c,t},g_{l,t})|\bar{g}_c,\bar{g}_l \approx f(\bar{g}_c,\bar{g}_l)+\frac{\partial f(\bar{g}_c,\bar{g}_l)}{\partial \bar{g}_c}(\log g_{c,t}-\bar{g}_c)+\frac{\partial f(\bar{g}_c,\bar{g}_l)}{\partial \bar{g}_l}(\log g_{l,t}-\bar{g}_l)$

$$0 = log\beta + E_t\left[\left(a - \frac{\gamma\chi\theta\frac{\bar{g}_l^{\chi-1}}{\bar{g}_c^{\chi}}}{1-\theta\frac{\bar{g}_l^{\chi-1}}{\bar{g}_c^{\chi}}}\right)\hat{g}_{c,t+1} + \left(b + \frac{\gamma(\chi-1)\theta\frac{\bar{g}_l^{\chi-1}}{\bar{g}_c^{\chi}}}{1-\theta\frac{\bar{g}_l^{\chi-1}}{\bar{g}_c^{\chi}}}\right)\hat{g}_{l,t+1}\right] + \left(\frac{\gamma\chi\theta\frac{\bar{g}_l^{\chi-1}}{\bar{g}_c^{\chi}}}{1-\theta\frac{\bar{g}_l^{\chi-1}}{\bar{g}_c^{\chi}}}\right)\hat{g}_{c,t} + \left(-\frac{\gamma(\chi-1)\theta\frac{\bar{g}_l^{\chi-1}}{\bar{g}_c^{\chi}}}{1-\theta\frac{\bar{g}_l^{\chi-1}}{\bar{g}_c^{\chi}}}\right)\hat{g}_{l,t} + E_t\left[\hat{R}_{t+1}^i\right] \quad (۷)$$

پیوست ۳

الف- مدل مهرا و پرسکات(۱۹۸۵) را تحلیل می‌کنیم:

$$E\left[\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t U(c)\right] \quad that \quad U(c_t) = \frac{{c_t}^{1-\gamma}-1}{1-\gamma} \quad with\; 0<\beta<1$$

که $g_{c,t+1} = \frac{c_{t+1}}{c_t}$ و $g_{d,t+1} = \frac{d_{t+1}}{d_t}$ نرخهای رشد مصرف کل و سود سهام است. معادله قیمت‌گذاری دارایی لوکاس بصورت زیر بدست می‌آید:

$$p_t = \beta E_t\left[(p_{t+1}+d_{t+1})\frac{U'(c_{t+1})}{U'(c_t)}\right]$$

که $p_{t+1}+d_{t+1}$ پرداخت دارایی برای دوره بعد است و $U'(c_t) = MU = {c_t}^{-\gamma}$. معادله قیمت‌گذاری دارایی لوکاس را بازنویسی می‌کنیم:

$$p_t = \beta E_t\left[x_{t+1}\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\gamma}\right] \quad with\; x_{t+1} = p_{t+1}+d_{t+1}$$

با توجه به نرخ رشد مصرف داریم: $p_t = \beta E_t\left[x_{t+1}\left(g_{c,t+1}\right)^{-\gamma}\right]$ که مجموع قیمت بستگی به سود سهام دارد. مهرا و پرسکات (۱۹۸۵) فرض می‌کنند p_t همگن از درجه ۱ در d_t است پس :

$$p_t = wd_t \quad و \quad w = \beta E_t\left[(w+1)\frac{d_{t+1}}{d_t}g_{c,t+1}^{-\gamma}\right]$$

با استفاده از نرخ رشد می‌توان معادله را اینگونه نوشت:

$$w = \frac{\beta E_t\left[g_{d,t+1}g_{c,t+1}^{-\gamma}\right]}{1-\beta E_t\left[g_{d,t+1}g_{c,t+1}^{-\gamma}\right]}$$

ما میدانیم: $E_t\left[R_{e,t+1}\right] = E_t\left[\frac{p_{t+1}+d_{t+1}}{p_t}\right]$ که برابر با:

$$E_t[R_{e,t+1}] = E_t\left[\frac{wd_{t+1} + d_{t+1}}{wd_t}\right] = \left[\frac{w+1}{w}\right] E_t[g_{d,t+1}]$$

می‌توان نشان داد که:

$$\frac{w+1}{w} = \frac{1}{\beta E_t[g_{d,t+1} g_{c,t+1}^{-\gamma}]}$$

بخاطر می‌آوریم که شرط برای بازدهی بدون ریسک و بازدهی سهام بصورت زیر خواهد بود:

$$E_t[R_{f,t+1}] = \frac{1}{\beta E_t[g_{c,t+1}^{-\gamma}]} \quad \text{و} \quad E_t[R_{e,t+1}] = \frac{E_t[g_{d,t+1}]}{\beta E_t[g_{d,t+1} g_{c,t+1}^{-\gamma}]}$$

با فرض لگاریتم شرطی و homoskedasticity بازدهی دارایی و مصرف و همچنین بکارگیری خاصیت توزیع لوگنرمال داریم:

$$E_t[R_{f,t+1}] = \frac{1}{\beta exp(-\gamma\mu_c + 0.5\gamma^2\sigma_c^2)}$$

$$E_t[R_{e,t+1}] = \frac{exp(\mu_d + 0.5\sigma_d^2)}{\beta exp(\mu_d - \gamma\mu_c + 0.5(\sigma_d^2 + \gamma^2\sigma_c^2 - 2\gamma\sigma_{cd}))}$$

بعد از لگاریتم‌گیری از رابطه‌های اخیر داریم:

$$\log E_t[R_{f,t+1}] = -log\beta + \gamma\mu_c - 0.5\gamma^2\sigma_c^2$$

$$log E_t[R_{e,t+1}] = -log\beta + \gamma\mu_c - 0.5(\gamma^2\sigma_c^2 - 2\gamma\sigma_{cd})$$

برای بازدهی سهام، صرف ریسک بصورت زیر خواهد بود:

$$log E_t[R_{e,t+1}] - log E_t[R_{f,t+1}] = \gamma\sigma_{cd}$$

ریسک‌گریزی مطلق(ara) از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$ara = -\frac{U''(c)}{U'(c)} = \frac{\gamma}{c}$$

ریسک‌گریزی نسبی نیز خواهد بود:

$$rra = -\frac{c.U''(c)}{U'(c)} = \gamma$$

ب- حال برای گسترش مدل مهرا و پرسکات(۱۹۸۵) با فراغت تحلیل می‌کنیم:

$$E\left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c)\right] \quad that \quad U(c_t, l_t) = \frac{\left(c_t^{\chi} l_t^{1-\chi}\right)^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma}$$

حال اگر برای c_t و c_{t+1} مشتق‌گیری نماییم:

$$U_{c_t}(c_t, l_t) = \left[c_t^{\chi} l_t^{1-\chi}\right]^{1-\gamma} . \chi \left(\frac{l_t}{c_t}\right)^{1-\chi}$$

$$U_{c_{t+1}}(c_{t+1}, l_{t+1}) = \left[c_{t+1}^{\chi} l_{t+1}^{1-\chi}\right]^{1-\gamma} . \chi \left(\frac{l_{t+1}}{c_{t+1}}\right)^{1-\chi}$$

اگر $\chi = 1$ باشد همان مدل استاندارد مهرا و پرسکات(۱۹۸۵) خواهد بود. عامل تنزیل تصادفی m_{t+1} خواهد بود:

$$m_{t+1} = \beta \left(\left(\frac{l_{t+1}}{l_t}\right)^{1-\chi} \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{\chi} \right)^{-\gamma} \left(\frac{l_{t+1}}{l_t}\right)^{1-\chi} \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{\chi-1}$$

حال معرفی می‌کنیم:

$$\frac{C_{t+1}}{C_t} = g_{c,t+1} \text{ و } \frac{l_{t+1}}{l_t} = g_{l,t+1}$$

عامل تنزیل تصادفی بصورت زیر خواهد بود:

$$m_{t+1} = \beta\left[g_{c,t+1}^{(\chi-\gamma\chi-1)} g_{l,t+1}^{(1-\chi-\gamma+\gamma\chi)}\right]$$

اگر $\chi - \gamma\chi - 1 = a$ و $1 - \chi - \gamma + \gamma\chi = b$ تعریف کنیم و بازدهی بروی دارایی بدون ریسک بصورت زیر خواهد شد:

$$E_t\left[R_{f,t+1}\right] = \frac{1}{\beta E_t\left[g_{c,t+1}^{a} g_{l,t+1}^{b}\right]}$$

با توجه به توزیع لوگنرمال

$$\log E_t\left[R_{f,t+1}\right] = -log\beta - a\mu_c - b\mu_l - 0.5(a^2\sigma_c^2 + b^2\sigma_l^2 + 2ab\sigma_{cl})$$

بازدهی دارایی تحت وجود ریسک

$$logE_t\left[R_{e,t+1}\right] - logE_t\left[R_{f,t+1}\right] = a\sigma_{cr_e} + b\sigma_{lr_e}$$

$$logE_t\left[R_{e,t+1}\right] - logE_t\left[R_{f,t+1}\right] = -\gamma\chi\sigma_{cr_e} + (1-\chi)\left(\sigma_{cr_e} + (\gamma-1)\sigma_{lr_e}\right)$$

ریسک‌گریزی مطلق و نسبی برای مصرف از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$ara_c = -\frac{U''(c,l)}{U'(c,l)} = \frac{\gamma\chi - \chi + 1}{c} \text{ و } rra_c = -\frac{c.U''(c,l)}{U'(c,l)} = \gamma\chi - \chi + 1$$

ریسک‌گریزی نسبی برای مصرف نیز خواهد بود:

$$rra_c = -\frac{c.U''(c,l)}{U'(c,l)} = \gamma\chi - \chi + 1$$

ریسک‌گریزی مطلق و نسبی برای فراغت از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$ara_l = -\frac{U''(c,l)}{U'(c,l)} = \frac{\gamma + \chi - \gamma\chi}{l} \text{ و } rra_l = -\frac{l.U''(c,l)}{U'(c,l)} = \gamma + \chi - \gamma\chi$$